REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

A. VESSEREAU

Quelques remarques sur les plans d'échantillonnage

Revue de statistique appliquée, tome 16, nº 1 (1968), p. 5-35

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1968__16_1_5_0>

QUELQUES REMARQUES SUR LES PLANS D'ÉCHANTILLONNAGE

A. VESSEREAU

L'étude théorique des plans d'échantillonnage simple par attributs peut être considérée comme achevée lorsqu'on a écrit :

- les relations qui lient les paramètres du plan : effectif de l'échantillon (n) et critère d'acceptation (A) aux conditions que l'on s'est fixées, risque du fournisseur (α) associé à une proportion p_1 d'individus défectueux, et risque du client (β) associé à une proportion p_2.

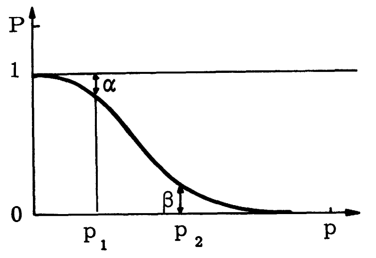


Fig. 1

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{A} C_n^k p_1^k (1 - p_1)^{n-k} = 1 - \alpha \\ \sum_{k=0}^{A} C_n^k p_2^k (1 - p_2)^{n-k} = \beta \end{cases}$$

- l'équation de la courbe d'efficacité :

$$P = \sum_{k=0}^{A} C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

Dans la pratique, bien des difficultés se présentent et bien des erreurs peuvent être commises si l'on applique un plan (choisi sans précaution) dans un recueil de tables d'échantillonnage - les MIL STD 105 D par exemple.

1/ Les équations (1) et (2), déduites de la loi binomiale, supposent que l'échantillon est prélevé de façon non exhaustive, ce qui n'est pratiquement jamais réalisé. Jusqu'à quel degré d'exhaustivité - qui peut être mesuré par le rapport $\frac{n}{N}$ de l'effectif d'échantillon à l'effectif de lot, ou "taux de prélèvement" - peuvent-elles être considérés comme pratiquement valables ?

2/ n et A devant être des nombres entiers, les équations (1) ne peuvent pas être exactement satisfaites pour toutes valeurs des conditions (p_1, α) (p_2, β). D'autre part, si α et β peuvent à priori être arbitrairement choisis, il semblerait qu'il ne puisse pas en être de même pour p_1 et p_2 : lorsque l'effectif de lot est N = 50, comment p_1 et p_2 pourraient-ils prendre des valeurs autres que 0 %, 2 %, 4 %, ... ?

3/ Compte tenu du fait que dans les petits lots, la proportion de défectueux p ne parait susceptible de prendre que des valeurs discontinues, n'est-t-il pas abusif, dans ce cas, de parler de "courbe" d'efficacité ?

Cependant des tables d'échantillonnage d'emploi très courant - les MIL STD 105 D [1] paraissent ignorer toutes ces difficultés - Les courbes d'efficacité des plans qu'elles contiennent sont toutes déduites de la loi binomiale, ou de son approximation par la loi de Poisson lorsque celle-ci est valable, quel que soit le rapport entre l'effectif de l'échantillon et l'effectif de lot (qui varie de $N = 2$ à $N > 500000$). Aucune restriction n'est faite sur les valeurs de p "possibles" compte-tenu de l'effectif de lot ; en particulier, le NQA (niveau de qualité acceptable) qui correspond à peu près à la proportion p_1 de la théorie classique, est souvent une proportion "non possible" pour un lot particulier. Des remarques analogues peuvent être faites à propos du contrôle par mesures, et notamment des tables MIL STD 414 [2].

Nous discuterons ces différents points à propos de l'échantillonnage simple par attributs. Une distinction essentielle devra être faite entre le contrôle d'un lot isolé et le contrôle d'une série de lots provenant d'une même fabrication.

Mais une première observation d'ordre général ne sera peut-être pas inutile. Le contrôle de réception n'a pas pour but d'estimer la proportion p de défectueux dans le ou les lots contrôlés, mais de conduire pour chaque lot, à une décision d'acceptation ou de rejet. Sans doute les résultats du contrôle permettent généralement d'estimer p, mais cela nécessite parfois certaines précautions : ainsi, dans l'échantillonnage double ou multiple, seuls les résultats obtenus sur le 1 er échantillon donnent une estimation sans biais de p - dans l'échantillonnage progressif on ne peut estimer p sans biais.

1 - CONTROLE PAR ATTRIBUTS DE LOTS ISOLES

Nous ferons ici encore deux remarques préliminaires.

La première concerne le choix des proportions p_1 et p_2. Lorsqu'on procède au contrôle d'un lot isolé, on ne possède généralement pas d'information a priori précise sur la "qualité probable" du lot. Sans doute est-on à peu près sûr que la proportion p de défectueux n'est pas "très élevée", mais cette formulation est trop vague pour guider dans le choix des valeurs p_1 et p_2 qui, avec les risques associés α et β, servent à déterminer le plan de contrôle ; p_1 et p_2 résulteront d'un accord entre fournisseur et client, sans que ce dernier sache si le fournisseur peut tenir ces conditions.

La deuxième porte sur la signification des risques α et β qui, répétons le, représentent, pour α associé à p_1, une probabilité (faible) de rejeter un lot acceptable, et pour β associé à p_2 une probabilité (faible) d'accepter un lot que l'on aurait préféré rejeter. Chacun a une notion, plus ou moins claire, de ce qu'il faut entendre par une "faible probabilité". Mais - tout au moins dans les problèmes qui nous occupent ici - des valeurs numériques de α et β, (par exemple 0,01, 0,05, 0,10...) n'acquièrent un sens concret que si on leur donne la signification de "fréquences" dans un processus répétitif. Or, dans le cas où nous nous plaçons, contrôle d'un lot unique, la décision sera également unique : acceptation ou rejet. On doit donc imaginer un processus répétitif potentiel défini de la façon suivante :

Si le lot présenté contient une proportion p_1 d'individus défectueux, et si on lui applique un grand nombre de fois, de façon indépendante, le plan de contrôle, chaque contrôle donnant lieu à l'une des décisions "acceptation" ou "rejet", la proportion des décisions "rejet" sera voisine de α. D'où l'on déduit, par une opération intellectuelle qui, à notre avis, n'est plus du domaine des mathématiques ("les événements de très faible probabilité ne se produisent pas" disait Emile Borel) que, dans le contrôle unique auquel le lot est soumis, il sera "très probablement accepté". La même remarque vaut naturellement pour le couple de valeurs (p_2, β).

Dans tout ce § nous nous imposerons la condition pratique de "non-exhaustivité" généralement admise $\frac{n}{N} \leqslant 0,10$. Ainsi, pour un lot d'effectif N = 50, nous admettrons que l'effectif de l'échantillon ne doit pas dépasser 5 ; pour N = 1 000, cet effectif devra être au maximum de 100. Dans le §2, nous discuterons cette condition et montrerons qu'elle peut, sans grave danger, être sensiblement élargie.

Nous examinerons successivement les différents moyens qui permettent de déterminer le plan répondant "au mieux" aux conditions fixées.

1.1 - Tables de la loi binomiale

Les tables les plus courantes de la loi binomiale sont :

- les Tables du National Bureau of Standards [3]
- les Tables de H.G. Romig [4]

Les Tables du National Bureau of Standards donnent les valeurs de la fonction de distribution de la loi binomiale sous la forme

$$\Pr\ (X \geqslant r) = \sum_{s=r}^{n} C_n^s p^s (1-p)^{n-s}$$

pour $n = 2(1) \ldots\ldots 49$

$p = 0,01\ (0,01) \ldots\ 0,50$

$r = 1(1) \ldots\ldots n$

Dans le contrôle par attributs, on refuse le lot si le nombre de défectueux trouvés dans l'échantillon dépasse le critère d'acceptation A. On a donc la correspondance :

$$r - 1 = A$$

Etant donné les proportions p_1 et p_2 (compatibles avec l'effectif du lot) et les risques associés α et β, on cherchera dans les tables le couple de valeurs (n, r) tel que :

$$\Pr(X \geqslant r/p = p_1) \quad \text{voisin de } \alpha$$
$$\Pr(X \geqslant r/p = p_2) \quad \text{voisin de } 1 - \beta$$

et l'on prendra $A = r - 1$.

Les tables de H.G. Romig donnent les valeurs de la fonction de distribution de la loi binomiale sous la forme :

$$\Pr(X \leqslant x) = \sum_{m=0}^{x} C_m^n p^m (1-p)^{n-m}$$

pour $n = 50(5) \dots\ 100$

$p = 0{,}01\,(0{,}01) \dots\ 0{,}50$

$x = 0\,(1) \dots\ (n-1)$

Le critère d'acceptation $A = x$ s'obtient ici en cherchant dans la table le couple (n, x) tel que

$$Pr(X \leqslant x/p = p_1) \quad \text{voisin de } 1 - \alpha$$

$$Pr(X \leqslant x/p = p_2) \quad \text{voisin de } \beta$$

Malgré leur différence de présentation, qui est assez gênante, les Tables du National Bureau of Standards et celles de Romig se complètent. Elles fournissent les solutions existantes pour tout effectif d'échantillon de 1 à 49 (N. B. S.) et pour des effectifs d'échantillon échelonnés de 5 en 5 depuis 50 jusqu'à 100 (Romig). Pour un effectif d'échantillon n, les plans sont valables pour un effectif de lot $N \geqslant 10n$ (condition pratique de non exhaustivité). Une fois les paramètres de plan (n, A) déterminés, les tables fournissent des points de la courbe d'efficacité.

Mais pour des lots de faible effectif, les solutions correspondant aux valeurs "les plus voisines de α et β", peuvent en fait donner des valeurs fort éloignées pour l'un ou l'autre risque, ou même les deux. Il est en particulier parfaitement vain de rechercher, pour de petits lots, un plan comportant des risques très faibles pour des valeurs de p_1 et p_2 très voisines.

Il faudra donc le plus souvent reconsidérer les données de départ (p_1, α), (p_2, β) et chercher un compromis admissible en se montrant moins exigeant. Ou bien - si cela est possible - procéder à un contrôle à 100 %.

Nous illustrerons ce qui précède par deux exemples.

1 er Exemple - On pose la condition stricte $p_1 = 2$ % associée à un risque α voisin de 0,05 ; plus précisément on s'impose $0{,}03 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}07$. Les plans satisfaisant à ces conditions sont indiqués dans le tableau 1 avec la valeur du risque β pour $p_2 = 10$ %. L'effectif de l'échantillon est un multiple de 5 à partir de $n = 50$.

Pour n limité à 100 (condition imposée par les tables de la loi binomiale) on trouve au total 31 plans. Si l'on pose la condition plus stricte $0{,}04 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}06$, il n'en reste que 17, et, avec $0{,}045 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}055$ il n'en reste que neuf.

Mais la constatation la plus intéressante est la suivante :

Pour des lots d'effectif inférieur ou égal à 200, le risque β (associé à $p_2 = 10$ %) ne peut pas être abaissé au dessous de 0,40. Il s'abaisse à 0,22 pour des lots d'effectif au moins égal à 400 ; il faut un effectif de lot au moins égal à 650 pour qu'il ne dépasse pas 0,10.

2 e Exemple - On pose la condition stricte $p_1 = 4$ %, et pour α les mêmes limites, $0{,}03 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}07$. Le tableau 2 donne les plans correspondants, avec la valeur de β pour $p_2 = 16$ %.

Sans qu'il soit besoin d'insister, on constate qu'on est "plus à l'aise" pour le choix d'un plan, parce qu'on s'est montré moins exigeant sur la distance séparant les proportions p_1 et p_2.

Tableau 1

$p_1 = 2\ \%$ $\quad 0,03 \leqslant \alpha \leqslant 0,07$

n(1)	A	α	β pour $p_2 = 10\ \%$	N minimum (2)
2	0	0,034	0,810	20
3	0	0,059	0,729	30
14	1	0,031	0,584	140
15	1	0,035	0,549	150
16	1	0,040	0,515	160
17	1	0,045	0,482	170
18	1	0,050	0,450	180
19	1	0,055	0,420	190
20	1	0,060	0,392	200
21	1	0,065	0,365	210
34	2	0,030	0,326	340
35	2	0,033	0,306	350
36	2	0,035	0,288	360
37	2	0,038	0,270	370
38	2	0,040	0,254	380
39	2	0,043	0,238	390
40	2	0,046	0,223	400
41	2	0,049	0,209	410
42	2	0,052	0,195	420
43	2	0,055	0,182	430
44	2	0,058	0,170	440
45	2	0,061	0,159	450
46	2	0,064	0,148	460
47	2	0,068	0,138	470
60	3	0,032	0,137	600
65	3	0,041	0,100	650
70	3	0,052	0,071	700
75	3	0,064	0,050	750
90	4	0,035	0,047	900
95	4	0,042	0,033	950
100	4	0,051	0,024	1000

(1) Effectifs d'échantillon multiples de 5 à partir de n = 50.

(2) D'après la condition $\frac{n}{N} \leqslant 0,10$. Cette condition peut être assouplie sans erreur grave, au moins jusqu'à $\frac{n}{N} \leqslant 0,15$. (cf § 2)

On trouvera en Annexe 2, une collection de plans pour les conditions suivantes :

$0,005 \leqslant \alpha \leqslant 0,015$ $p_1 = 1\ \%$; valeur de β pour $p_2 = 2\ \%$, 5 %, 10 %, 15 %

$0,015 \leqslant \alpha \leqslant 0,025$ $p_2 = 2\ \%$; " $p_2 =$ 5 %, 10 %, 15 %

$0,040 \leqslant \alpha \leqslant 0,060$ $p_2 = 5\ \%$; " $p_2 =$ 10 %, 15 %

Tableau 2

$p_1 = 4\ \%$ $\qquad 0,03 \leqslant \alpha \leqslant 0,07$

n(1)	A	α	β p = 16 %	N minimum (2)
9	1	0,048	0,565	90
10	1	0,058	0,508	100
11	1	0,069	0,455	110
18	2	0,033	0,433	180
19	2	0,038	0,394	190
20	2	0,044	0,358	200
21	2	0,050	0,324	210
22	2	0,056	0,293	220
23	2	0,062	0,264	230
24	2	0,069	0,237	240
30	3	0,031	0,270	300
31	3	0,034	0,246	310
32	3	0,038	0,224	320
33	3	0,042	0,203	330
34	3	0,046	0,184	340
35	3	0,050	0,167	350
36	3	0,055	0,150	360
37	3	0,059	0,136	370
38	3	0,064	0,122	380
39	3	0,069	0,110	390
44	4	0,030	0,146	440
45	4	0,033	0,133	450
46	4	0,036	0,121	460
47	4	0,039	0,109	470
48	4	0,042	0,099	480
49	4	0,046	0,089	490
50	4	0,049	0,081	500
55	4	0,069	0,048	550
60	5	0,033	0,067	600
65	5	0,045	0,040	650
70	5	0,061	0,024	700
75	6	0,030	0,034	750
80	6	0,041	0,020	800
85	6	0,054	0,012	850
90	6	0,069	0,007	900
95	7	0,037	0,010	950
100	7	0,048	0,060	1000

(1) Effectifs d'échantillon multiples de 5 à partir de n = 50.

(2) D'après la condition $\frac{n}{N} \leqslant 0,10$. Cette condition peut être assouplie sans erreur grave, au moins jusqu'à $\frac{n}{N} \leqslant 0,15$. (cf. § 2).

1.2 - Tables de la loi de Poisson

On admet généralement que la loi binomiale de paramètres (n, p) est assimilable, avec une très faible erreur, à la loi de Poisson de paramètre $m = np$ si $n \geqslant 50$, $p \leqslant 0,10$. On pourra donc utiliser les tables de cette loi, à condition que l'effectif du lot soit au moins égal à 500, et que la proportion p_2 ne dépasse pas 10 %.

Les tables les plus courantes de la loi de Poisson sont :

- les Tables de E.C. Molina [5]

- les Tables du "Defense Systems Department, General Elec-Company" [6].

Les Tables de Molina donnent les valeurs de la fonction de distribution de la loi de Poisson sous la forme :

$$\Pr(X \geqslant c) = \sum_{x=c}^{\infty} e^{-a} \frac{a^x}{x!}$$

a = 0,001 (0,001) .... 0,01 (0,01).... 0,30 (0,1) ... 15 (1) ... 100

Lorsqu'on les utilise, on recherche les couples de valeurs (a_1, c), (a_2, c) tels que $\frac{a_2}{a_1} \# \frac{p_2}{p_1}$ et que les probabilités correspondantes lues dans la table soient respectivement voisines de α et $1 - \beta$. L'effectif de l'échantillon est $n = \frac{a_2}{p_2} = \frac{a_1}{p_1}$, et le critère d'acceptation $A = c - 1$.

Les tables de la General Electric donnent les valeurs de la fonction de distribution de la loi de Poisson sous deux formes :

$$D(x) = \Pr(X \geqslant x) = \sum_{r=x}^{\infty} e^{-u} \frac{u^r}{r!} \qquad C(x) = \Pr(X \leqslant x) = \sum_{r=0}^{x} e^{-u} \frac{u^r}{r!}$$

u = 0,00000010 (0,0000001) ... 0,0000015 (0,0000005) ... 0,000015
0,000015 (0,000001) 0,00005 (0,000005) 0,0005
0,0005 (0,00001) 0,001 (0,00005) 0,005
0,005 (0,0001) 0,01 (0,0005) 0,2
0,2 (0,001) 0,4 (0,005) 0,5
0,5 (0,01) 1,0 (0,05) 2,0
2,0 (0,1) 5,0 (0,5) 10,0
10,0 (1,0) 100,0 (5) 205,0

Leur mode d'emploi est le même que celui des tables de Molina si on utilise la fonction D(x). Si l'on choisit la fonction C(x), les valeurs de cette fonction, pour une même valeur x, et pour u_1 et u_2 tels que $\frac{u_2}{u_1} \# \frac{p_2}{p_1}$ doivent être respectivement voisines de $1 - \alpha$ et β. Le critère d'acceptation est A = x.

Quelles que soient les tables utilisées, on doit vérifier que la valeur n vérifie la condition $\frac{n}{N} \leqslant 0,10$.

Les tables permettent aussi d'obtenir des points de la courbe d'efficacité : on doit se limiter aux valeurs de $p \leqslant 0,10$.

<u>3e Exemple</u> - On fixe p_1 = 2 % avec α voisin de 0,05
p_2 = 10 % " β " 0,10

Les tables de Molina montrent que :

$$\text{pour } a_1 = 1,3 \qquad c = 4 \qquad \alpha = 0,043$$
$$'' \quad a_2 = 6,5 \qquad c = 4 \qquad \beta = 0,112$$

On a :

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6,5}{1,3} = 5 = \frac{p_2}{p_1}$$

d'où

$$n = \frac{a_1}{p_1} = \frac{1,3}{0,02} = 65 \qquad A = c - 1 = 3$$

Il faut que l'effectif du lot soit au moins égal à 650

Le Tableau 1 ci-dessus montre que, pour le plan (n = 65, A = 3), les risques exacts (loi binomiale) sont :

$$\alpha = 0,041 \qquad \beta = 0,10$$

4 e Exemple - Soit un lot d'effectif N = 300. On fixe p_1 = 4 %, et α voisin de 0,05.

L'effectif de l'échantillon doit être au maximum égal à 30. Les valeurs de u_1 (tables de la General Electric) sont :

$$np_1 = 0,04\ n \quad \text{avec } n = 1 \ldots\ldots 30$$

soit :

$$u_1 = 0,04\ (0,04) \ldots.\ 1,2$$

On trouve dans la table que la plus faible valeur du risque β associé à p_2 = 0,16 (16 %) correspond au plan :

$$n = 30 \qquad A = x = 3 \qquad \alpha = 0,034 \qquad \beta = 0,294$$

Le tableau 2 ci-dessus montre que, pour le plan (n = 30, A = 3) les risque exacts (loi binomiale) sont :

$$\alpha = 0,031 \qquad \beta = 0,270$$

L'approximation par la loi de Poisson est moins bonne que dans le cas précédent (surtout pour le risque β) parce que l'effectif de l'échantillon est inférieur à 50, et p_2 est supérieur à 0,10.

1.3 - Abaques de R. Cavé

L'emploi des tables de la loi binomiale ou de la loi de Poisson est assez compliqué. Mais lorsque l'approximation par la loi de Poisson est valable, on obtient très facilement, grâce aux abaques de R. Cavé [7] les plans correspondant aux valeurs p_1 et p_2 choisies et :

$$\alpha = \beta = 0,001 \qquad \alpha = \beta = 0,01 \qquad \alpha = \beta = 0,05$$
$$\alpha = 0,05 \qquad \beta = 0,10 \qquad \alpha = \beta = 0,10$$

5 e Exemple - On fixe $p_1 = 2\ \%$ $\alpha = 0,05$

$p_2 = 10\ \%$ $\beta = 0,10$

Pour $\frac{p_2}{p_1} = 5$ et les valeurs de α et β choisies, on lit sur le 1 er abaque A = 3, puis sur le 2 e abaque :

$$m_1 = np_1 = 1,36 \qquad m_2 = np_2 = 6,50$$

On prend :

$$n = \frac{m_1 + m_2}{p_1 + p_2} = \frac{1,36 + 6,50}{0,02 + 0,10} = 65,5 \text{ soit } 65$$

(le lot doit avoir un effectif N $\geqslant$650)

L'abaque permet aussi de trouver les points de la courbe d'efficacité pour les probabilités d'acceptation :

P = 0,999	0,99	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50
0,001	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	

(à condition que les valeurs correspondantes de p justifient l'approximation de Poisson)

4.4 - Tables de la variable F

Soit une variable binomiale X de paramètres (n, p) et :

$$P = \Pr(X \leqslant A) = \sum_{x=0}^{A} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

Soit d'autre part la variable F à $\gamma_1 = 2(A+1)$, $\gamma_2 = 2(n-A)$ degrés de liberté, et le fractile $1 - P$ défini par :

$$\Pr(F < F_{1-P}) = 1 - P$$

On a l'identité :

$$\frac{n-A}{A+1}\,\frac{p}{1-p} = F_{1-P}$$

Les paramètres (n, A) du plan (p_1, α), (p_2, β) sont donc tels que :

$$\left.\begin{aligned} \frac{n-A}{A+1}\cdot\frac{p_1}{1-p_1} &= F_\alpha \\ \frac{n-A}{A+1}\cdot\frac{p_2}{1-p_2} &= F_{1-\beta} \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} \gamma_1 &= 2(A+1) \\ \gamma_2 &= 2(n-A) \end{aligned}$$

Les tables de F ne donnant les valeurs de cette variable que pour P $\geqslant$0,50 on utilisera l'identité :

$$F_P(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{F_{1-P}(\gamma_2, \gamma_1)}$$

D'où les relations :

$$\begin{cases} \dfrac{p_1}{1-p_1} = \dfrac{A+1}{n-A} \cdot \dfrac{1}{F_{1-\alpha}} & (\gamma_1 = 2(n-A),\ \gamma_2 = 2(A+1)) \\ \dfrac{p_2}{1-p_2} = \dfrac{A+1}{n-A} \cdot F_{1-\beta} & (\gamma_1 = 2(A+1),\ \gamma_2 = 2(n-A)) \end{cases}$$

qui permettent théoriquement de trouver le plan (n, A) correspondant à des conditions (p_1, α), (p_2, β) données.

En fait leur emploi dans ce sens est peu pratique. Mais lorsqu'un plan (n, A) est donné, elles permettent d'obtenir assez facilement un ordre de grandeur des risques α et β attachés à des proportions p_1 et p_2.

Les Tables de Hald [8] donnent les fractiles de F pour différentes combinaisons de degrés de liberté.

Fractiles	99,95 %	$(\alpha, \beta = 0{,}0005)$	$\gamma_1 = 1(1) \ldots 10, 15, 20, 30, 50, 100, 200, 500, \infty$
	99,90 %	(" $= 0{,}001$)	
	90,00 %	(" $= 0{,}10$)	$\gamma_2 = 1(1) \ldots 20(2) \ldots 30(10) \ldots 60, 80, 100, 200, 500, \infty$
	70,00 %	(" $= 0{,}30$)	
	50,00 %	(" $= 0{,}50$)	

Fractiles	99,5 %	$(\alpha; \beta = 0{,}005)$	$\gamma_1 = 1(1) \ldots 20(2) \ldots 30(5) \ldots 50, 60, 80, 100, 200, 500, \infty$
	99,0 %	(" $= 0{,}010$)	
	97,5 %	(" $= 0{,}025$)	$\gamma_2 = 1(1) \ldots 30(2) \ldots 50(5) \ldots 70(10), \ldots 100, 125, 150, 200, 300, 500, 1000, \infty$
	95,0 %	(" $= 0{,}050$)	

6 e Exemple - Soit le plan $n = 70$ $A = 5$ $(N \geqslant 700)$

Pour $p = 0{,}04$ (4 %), on a :

$$F_{1-\alpha} = \frac{A+1}{n-A} \cdot \frac{1-p_1}{p_1} = 2{,}22 \qquad (\gamma_1 = 130,\ \gamma_2 = 12)$$

On trouve, par interpolation linéaire $1 - \alpha \# 0{,}935$ $\qquad \alpha \# 0{,}065$

Pour $p_2 = 0{,}16$ (16 %) :

$$F_{1-\beta} = \frac{n-A}{A+1} \cdot \frac{p_2}{1-p_2} = 2{,}06 \qquad (\gamma_1 = 12,\ \gamma_2 = 130)$$

On trouve $1 - \beta \# 0{,}975$ $\qquad \beta \# 0{,}025$

Les valeurs exactes des risques (loi binomiale, cf Tableau 2) sont :

$$\alpha = 0{,}061 \qquad \beta = 0{,}024$$

1.5 - Tables MIL STD 105 D (1)

Ces tables ont été conçues pour le contrôle d'une succession de lots provenant d'une même fabrication (cf § 3 - ci-après). Les courbes d'efficacité qu'elles contiennent ont été établies dans l'hypothèse de la loi binomiale (non exhaustivité) ou de son approximation par la loi de Poisson. Leur emploi pour le contrôle d'un lot isolé exige certaines précautions.

On ne doit pas utiliser la "Table 1" qui donne la "lettre-code d'effectif d'échantillon" en fonction de l'effectif N du lot et du "niveau de contrôle". On y trouverait, par exemple, pour des lots d'effectif compris entre 16 et 25, le plan C où l'effectif d'échantillon est de 5. Pour un lot isolé, on aurait $\frac{n}{N} \gg 0,10$.

On ne doit pas non plus se baser sur la valeur du NQA (niveau de qualité acceptable) qui correspond à la proportion p_1, avec un risque qui, selon les plans, peut varier de 0,01 à 0,12 : on trouverait par exemple, pour des lots d'effectif compris entre 2 et 8, un plan pour lequel le NQA est de 0,065 (6,5 % de défectueux), ce qui est à proprement parler absurde !

Il faut procéder de la façon suivante :

a) calculer l'effectif maximum n de l'échantillon, compte-tenu de l'effectif N du lot et de la condition $\frac{n}{N} \leqslant 0,10$.

b) consulter les graphiques X = courbes d'efficacité de tous les plans du MIL STD 105 D, ou les tableaux X qui donnent des points particuliers de ces courbes. Les tableaux X ont deux entrées, qui correspondent au "contrôle normal" et au "contrôle renforcé" ; on peut utiliser l'une ou l'autre, la distinction ne s'appliquant pas au cas d'un lot isolé. On choisira le plan (n,A) qui, pour les valeurs p_1 et p_2 données, ou des valeurs voisines, comporte des risques voisins des valeurs α, β, choisies (naturellement, comme on l'a indiqué en 1 – 1, dans le cas de petits lots on pourra ne trouver aucun plan répondant à ces conditions).

Les tables donnent aussi les plans double et multiple de même efficacité : la condition $\frac{n}{N} \leqslant 0,10$ s'applique alors à l'échantillon total susceptible d'être prélevé.

<u>7e Exemple</u> - N = 800 $\quad p_1 = 2\ \%$ $\quad \alpha = 0,05$

$p_2 = 10\ \%$ $\quad \beta = 0,10$

On doit avoir $\quad n \leqslant 80$

Les plans pour lesquels les conditions fixées sont approximativement réalisées sont les suivants :

"H-NQA = 1,5 (contrôle normal)", ou "H-NQA = 2,5 (contrôle renforcé)"

n = 50 $\quad$ A = 2 ; $\alpha = 0,08$ pour $p_1 = 2\ \%$, $\beta = 0,11$ pour $p_2 = 10\ \%$

"J-NQA = 1,5 (contrôle normal)" ou "J-NQA = 2,5 (contrôle renforcé)"

n = 80 $\quad$ A = 3 ; $\alpha = 0,08$ pour $p_1 = 2\ \%$, $\beta = 0,04$ pour $p_2 = 10\ \%$

Le plan n = 65, A = 3, qui correspond presque exactement aux conditions fixées (cf Tableau 1 ; $\alpha = 0,041$, $\beta = 0,10$) ne figure pas dans les MIL STD. Il n'existe pas de "lettre-code d'effectif d'échantillon" pour laquelle n = 65.

2 - CONDITION DE NON-EXHAUSTIVITE ET APPROXIMATION DE POISSON

En toute rigueur, dans le cas d'un lot isolé, le plan d'échantillonnage devrait être établi à partir de la loi hypergéométrique (tirages exhaustifs). L'approximation par la loi binomiale est considérée comme bonne si $\frac{n}{N} \leqslant 0,10$; qu'arrive-t-il lorsque le taux de prélèvement dépasse 10 % ?

D'autre part, que doit-on entendre exactement par "erreur négligeable" lorsqu'on utilise l'approximation de Poisson quand celle-ci est considérée comme valable ?

Nous devons à l'obligeance de M. Rouzet, Ingénieur à la Compagnie des Compteurs, communication de plans d'échantillonnage calculés à partir de la loi hypergéométrique, dans les conditions suivantes :

$$N = 200(100) \ldots\ldots 1000(1000) \ldots\ldots 10000$$

$p_2 = 2\ \%\ (1\ \%) \ldots \quad 10\ \%$

$p_1 = 0,5\ \%\ (0,5\ \%) \ldots\ldots (p_2 - 1)\ \%$ pour $p_2 \leqslant 6\ \%$

$\quad = 0,5\ \%\ (0,5\ \%) \ldots\ldots 5\ \%$ pour $p_2 > 6\ \%$

Risques théoriques $\alpha = \beta = 0,05$

Risques réels $0,022 \leqslant \alpha \leqslant 0,075 \qquad 0,045 \leqslant \beta \leqslant 0,055$

Les risques réels ne sont connus que par leur "fourchette". Celle-ci est très étroite pour le risque β associé à p_2 ; c'est pourquoi c'est surtout sur ce risque que nous avons porté notre attention dans l'étude critique ci-après.

Les "plans hypergéométriques" correspondent à des taux de prélèvement $\frac{n}{N}$ qui vont de moins de 5 % à plus de 75 %. On a par exemple, pour le même risque $\beta \# 0,05$ (α tombant dans la fourchette indiquée ci-dessus) :

$p_1 = 2\ \%$	$p_2 = 4\ \%$	N = 500	n = 300	A = 8	n/N = 60 %
		N = 2000	n = 515	A = 14	n/N = 26 %
		N = 6000	n = 620	A = 17	n/N = 10 %

Soit, pour une valeur donnée de p_2, un plan particulier (n, A) pour lequel le taux de prélèvement est $\frac{n}{N}$. Si l'on applique à ce plan la loi binomiale ou la loi de Poisson, on trouvera pour β une valeur plus ou moins différente de 0,05, soit

$$\beta' = \sum_{x=0}^{A} C_n^x\, p_2^x\, (1 - p_2)^{n-x} \qquad \text{(loi binomiale)}$$

$$\beta'' = \sum_{x=0}^{A} e^{-np_2} \cdot \frac{(np_2)^x}{x!} \qquad \text{(loi de Poisson)}$$

Les valeurs de β'' ont été recherchées pour tous les plans (au total 396 plans) dans les tables de la loi de Poisson : la condition $p \leqslant 0,10$ était satisfaite pour tous, la condition $n \geqslant 50$ pour la quasi-totalité (pour 10 plans seulement, n est compris entre 41 et 49).

Les valeurs de β' ont été calculées directement chaque fois que les calculs étaient raisonnablement possibles (plans pour lesquels A = 0, 1, 2, 3) - soit 113 plans.

On obtient ainsi, chaque plan étant caractérisé par une valeur de p_1, une valeur de p_2, et une valeur de $\frac{n}{N}$:

$$\beta' = \beta'(p_1, p_2, n/N)$$
$$\beta'' = \beta''(p_1, p_2, n/N)$$

On constate que β' et β'' dépendent très fortement de $\frac{n}{N}$ et relativement peu de p_1 et p_2 (dans la limite des valeurs de p_1 et p_2 utilisées).

Il paraît donc légitime de calculer, pour chaque valeur de $\frac{n}{N}$, la moyenne des β' et la moyenne des β'' pour toutes les valeurs associées de p_1 et p_2. On aboutit ainsi à des "relations moyennes" :

$$\bar{\beta}' = f'\left(\frac{n}{N}\right) \qquad \text{(loi binomiale)}$$

$$\bar{\beta}'' = f''\left(\frac{n}{N}\right) \qquad \text{(loi de Poisson)}$$

alors que β (loi hypergéométrique) est indépendant de $\frac{n}{N}$ et voisin de 0,05 ($0,045 \leqslant \beta \leqslant 0,055$)

Ces relations sont représentées graphiquement sur la figure ci-après qui permet les constatations suivantes :

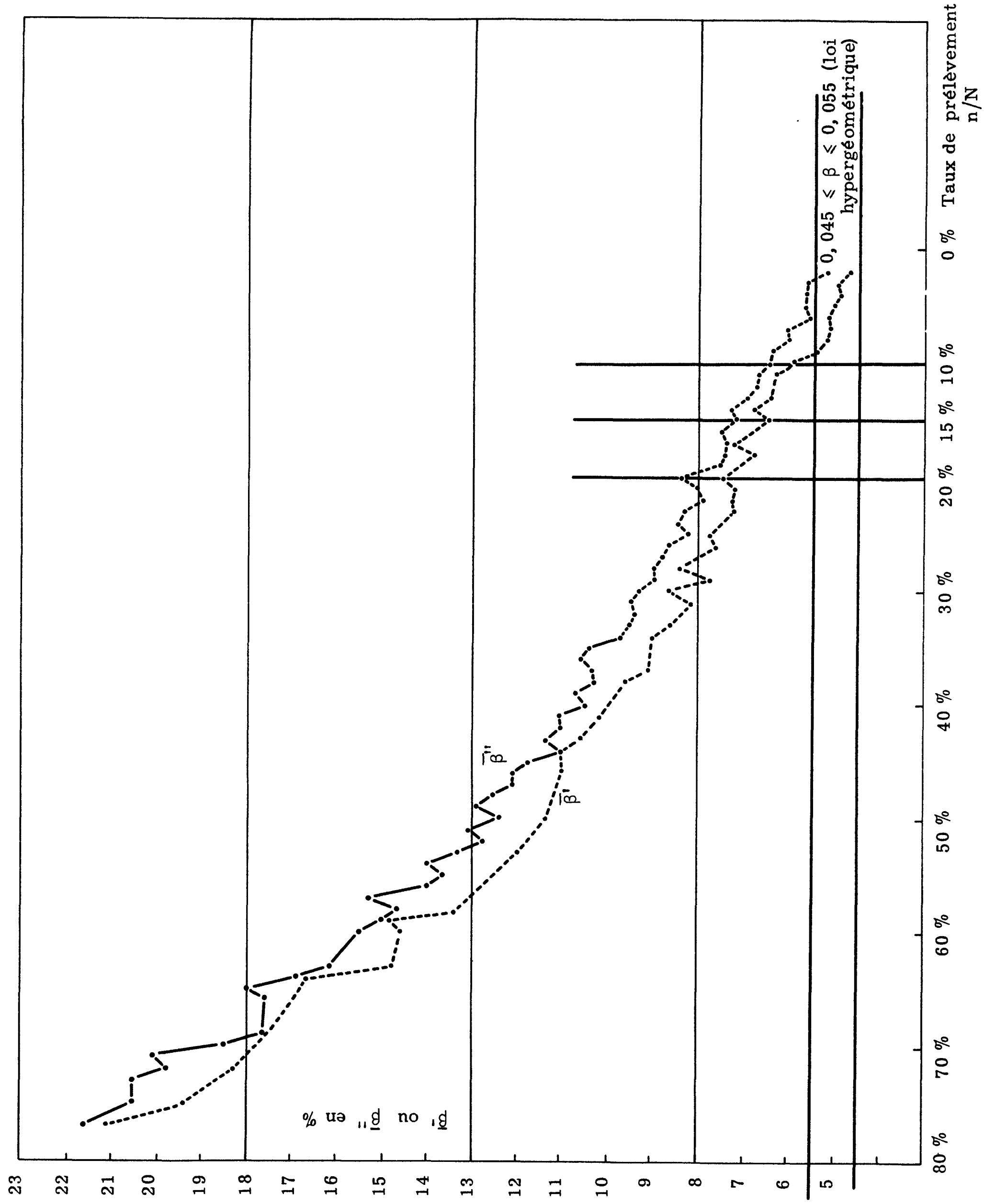
1/ $\bar{\beta}' < \bar{\beta}''$ - L'approximation de Poisson (dans les conditions où elle est considérée comme valable) surestime le risque β, de 0,05 à 1 %, par rapport au risque calculé dans l'hypothèse binomiale.

2/ Pour $\frac{n}{N} \leqslant 0,10$, $\bar{\beta}'$ (loi binomiale) tombe dans la fourchette du risque β calculé d'après la loi hypergéométrique.

3/ Pour $\frac{n}{N} = 0,15$, $\bar{\beta}'$ est de l'ordre de 0,065, et pour $\frac{n}{N} = 0,20$ de l'ordre de 0,07. La différence entre ces valeurs et la valeur exacte, voisine de 0,05 donne l'ordre de grandeur de la surestimation du risque quand on le calcule par la loi binomiale et que le taux de prélèvement est de 15 ou de 20 %.

En définitive, l'application de la loi binomiale au dela de la limite $\frac{n}{N} \leqslant 0,10$ et l'approximation de Poisson jouent dans le même sens, en surestimant le risque, tel qu'il résulte de l'application de la loi hypergéométrique. Elles jouent toutes les deux dans le sens de la "sécurité", puisque le risque réel est inférieur au risque calculé.

Par exemple, si l'on admet un risque $\beta = 0,05$, et si, pour avoir un plan aussi sélectif que possible, on prélève un échantillon d'effectif



$\bar{\beta}'$ ou $\bar{\beta}''$ en %
$\bar{\beta}'$
$\bar{\beta}''$
0, 045 ≤ β ≤ 0, 055 (loi hypergéométrique)
Taux de prélèvement n/N
0 %
10 %
15 %
20 %
30 %
40 %
50 %
60 %
70 %
80 %
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5

Fig. 2

$n = 0,15\ N$, on pourra déterminer le critère d'acceptation en échantillonnage non-exhaustif (loi binomiale ou approximation de Poisson) à partir d'un risque $\beta = 0,065$. Si le taux de prélèvement est de 20 % $\left(\frac{n}{N} = 0,20\right)$ on pourra, dans les mêmes conditions, partir de $\beta = 0,07$.

Une étude semblable conduit, pour le risque α, à des conclusions analogues - mais avec moins de précision, parce que le risque exact pour le prélèvement exhaustif n'est connu qu'à l'intérieur d'une fourchette assez large (0,022 à 0,075).

Ces conclusions sont valables pour des valeurs de p_1 allant de 1 à 5 %, des valeurs de p_2 allant de 2 à 10 %, et des risques α et β voisins de 0,05. Ce sont des conditions assez courantes dans la pratique, et il est permis de penser que les mêmes conclusions s'appliquent, en gros, à des conditions un peu différentes. On doit surtout retenir de ce qui précède qu'il n'y a pas d'inconvénient grave à assouplir la condition classique $\frac{n}{N} \leqslant 0,10$, et à traiter comme non-exhaustifs des prélèvements exhaustifs pour lesquels le taux de prélèvement atteint 15 et même 20 %. D'ailleurs, il n'est généralement pas possible, que l'on fasse les calculs en "exhaustifs", "non-exhaustifs", ou approximation de Poisson, d'obtenir exactement les risques que l'on a choisis. Enfin, pour un lot isolé, la notion même de risque, ou de "probabilité d'erreur", présente un caractère relativement conventionnel.

3 - CONTROLE PAR ATTRIBUTS D'UNE SERIE DE LOTS

Lorsqu'on procède au contrôle d'une série importante de lots provenant de la même fabrication, la situation est toute différente.

Tout d'abord, on a, d'après les résultats des livraisons précédentes, une information sur la qualité généralement fournie, ce qui aide à fixer les valeurs de p_1 et p_2 (ou, si l'on applique les MIL STD 105 D, le niveau de qualité acceptable NQA, et éventuellement la qualité limite LQ).

D'autre part, les risques prennent la signification concrète de "fréquences" : les lots de la qualité p_1 seront acceptés dans la proportion $1 - \alpha$, ceux de la qualité p_2 dans la proportion β. Pour toute autre qualité, la courbe d'efficacité donne la proportion des lots qui seront acceptés.

Mais la différence essentielle réside dans le principe même du contrôle qui ne consiste pas à juger chaque lot isolément, mais <u>la fabrication à travers les lots livrés</u>. Ce qui entraîne les conséquences suivantes :

1/ Les proportions telles que p_1 et p_2 (ou NQA et LQ) s'appliquent à la fabrication et non à un lot particulier : elles peuvent donc avoir des valeurs quelconques. Si le contrôle s'effectue sur des lots d'effectif $N = 8$, il n'est pas absurde de prendre $p_1 = 6,5$ % : cette proportion ne s'applique pas à $N = 8$, mais à l'effectif total, supposé important, de la fabrication.

2/ Accepter ou rejeter un lot, c'est accepter ou rejeter la fabrication jugée à travers le lot, et appliquer cette décision au lot. Pour voir s'il est légitime d'appliquer la loi binomiale au contrôle, il faut comparer l'effectif n de l'échantillon, non pas à l'effectif N des lots, mais à l'effectif beaucoup plus important (d'ailleurs généralement inconnu) de la fabrication d'où sont issus les lots. Il est en effet rigoureusement équivalent(cf. Annexe 1) :

- de prélever directement un échantillon d'effectif n dans la fabrication,

- d'effectuer un premier prélèvement d'effectif N (lot) dans la fabrication, puis un deuxième prélèvement d'effectif n (échantillon) dans le lot, sans qu'il soit nécessaire de supposer que ces prélèvements sont "non-exhaustifs" par rapport à la population d'où ils sont issus.

Il suffit donc pour que la loi binomiale (ou l'approximation de Poisson) puisse être légitimement appliquée que la "condition pratique de non-exhaustivité" soit vérifiée entre l'effectif de l'échantillon et l'effectif de la fabrication - ce qui sera pratiquement toujours le cas.

Dans ces conditions, si la fabrication est de qualité $p \leqslant p_1$ (ou $p \leqslant$ NQA) elle sera acceptée avec une probabilité $\geqslant 1 - \alpha$, ce qui veut dire qu'au maximum une proportion α des lots sera rejetée ; de même si $p \geqslant p_2$ (ou $p \geqslant$ LQ) une proportion maximale β des lots sera acceptée.

3/ Compte tenu de ce qui précède, on voit que le nombre de plans disponibles est plus important que dans le cas des lots isolés, puisque l'effectif de l'échantillon peut (théoriquement tout au moins) aller jusqu'à $N - 1$. En particulier, les plans donnés en Annexe 2 deviennent valables quel que soit l'effectif de lot. D'un autre côté les MIL STD 105 D donnent une sélection de plans applicables sans restriction au contrôle d'une série de lots, la règle de rattachement de l'effectif d'échantillon à l'effectif de lot n'ayant aucun caractère obligatoire.

On fait parfois, à ce qui vient d'être dit, l'objection suivante : Il est bien vrai qu'il est équivalent de prélever directement, de façon qui peut être considérée comme non-exhaustive un échantillon d'effectif n dans une fabrication d'effectif M, ou de procéder par l'intermédiaire d'un lot d'effectif N, la condition de non-exhaustivité n'ayant pas besoin d'être satisfaite, entre N et M d'une part, entre n et N d'autre part.

Mais au fur et à mesure que les contrôles se poursuivent, le "grand lot" constitué par la fabrication s'épuise ; pour le dernier lot par exemple, le prélèvement de n s'effectuera au sein de N individus de façon exhaustive si $\frac{n}{N} > 0,10$. C'est ce qui se produit lorsqu'un fournisseur, après avoir reçu une commande globale de M objets à livrer au cours d'une certaine période, constitue un stock de ces M objets à partir d'une fabrication exécutée une fois pour toutes, puis les livre à la demande par lots de N.

Le problème ainsi posé peut s'énoncer de la façon la plus générale suivante :

L'ensemble des lots est "totalement exhaustif" par rapport à la fabrication. Chaque lot est exhaustif par rapport à la fabrication, ou ce qu'il en reste après contrôle des lots précédents. Chaque échantillon est exhaustif par rapport au lot, mais non par rapport à l'effectif initial M de la fabrication. Cette dernière condition, qui justifie pour les premiers lots l'emploi de la loi binomiale, est-elle encore valable au fur et à mesure que la fabrication s'épuise ?

La réponse est oui. En effet :

Soit λ le nombre de lots d'effectif N ; $M = \lambda N$

1/ La suite des λ lots présentés en recette constitue une partition particulière des M objets en groupes de N (il y a $\frac{M!}{(N!)^{\lambda}}$ partitions distinctes, et $\lambda! \frac{(M)!}{(N!)^\lambda}$ si, dans chaque partition, on distingue les lots suivant un ordre chronologique.

2/ Pour une partition donnée, la loi de probabilité à priori du nombre de défectueux dans chacun des lots constituant cette partition est la même, c'est la loi :

$$\Pr(X = k) = \frac{C_D^k C_{M-D}^{N-k}}{C_M^N}$$

(D = nombre de défectueux dans la fabrication) et la loi de probabilité à priori du nombre de défectueux dans un échantillon de n prélèvé dans chacun de ces lots est également la même. C'est la loi

$$\Pr(x = k) = \frac{C_D^k C_{M-D}^{n-k}}{C_M} \quad \text{(cf. Annexe 1).}$$

3/ Le fait que l'on examine les lots les uns après les autres ne modifie en rien cette propriété si l'on ne tient pas compte, lors du contrôle d'un lot, des résultats obtenus sur les lots précédents. Il en résulte que le raisonnement fait pour un lot particulier s'applique à tous les lots. Lorsqu'on prélève un échantillon d'effectif n dans l'un quelconque d'entre eux, tout se passe comme si on avait prélevé cet échantillon dans la totalité de la fabrication. La loi du nombre de défectueux dans cet échantillon est la loi binomiale $\left(n, p = \frac{D}{M}\right)$.

4/ Il est bien vrai que la loi du nombre de défectueux dans l'échantillon du (r + 1)ième lot n'est plus la même si l'on tient compte des résultats obtenus dans les r lots précédents : si par exemple tous ces lots ont été rejetés, il est bien probable qu'il le sera aussi. Plus précisément, si les échantillons issus des r premiers lots ont contenu k_1, k_2, $k_3 \ldots k_r$ défectueux, l'estimation de la proportion de défectueux dans la fabrication est :

$$\hat{p}_r = \frac{k_1 + \ldots + k_r}{n^r}$$

et suivant la place de l'estimation $\hat{p}_r$ par rapport aux proportions fixées p_1 et p_2, le (r + 1)ième lot aura plus ou moins de chances d'être accepté ou rejeté. Mais cela ne modifie en rien la validité du plan de contrôle, dont le but n'est pas d'estimer p, mais de conduire pour chaque lot à une décision d'acceptation ou de rejet (cf. la remarque faite au début de cet article, immédiatement avant le § 1). Si la proportion de défectueux dans la fabrication est exactement égale à p_1, il est très improbable que $\hat{p}_r$ soit très différent de p_1. Si cela se produit à un certain moment en raison des "hasards d'échantillonnage", il n'en est pas moins vrai que, lorsque tous les lots auront été contrôlés, une proportion de ces lots voisine de α aura été rejetée (la proportion exacte suppose un très grand nombre de lots) ; d'ailleurs, en fin de contrôle, si le nombre λ de lots est grand, on aura forcément $\hat{p}_\lambda \# p_1$.

Ce qui précède ne signifie pas que la connaissance du nombre de défectueux dans les échantillons précédemment contrôlés (ou le nombre de lots acceptés ou rejetés) est sans intérêt pratique. On sait que, dans les MIL STD 105 D, ces renseignements sont utilisés pour passer éventuellement en "contrôle renforcé" ou en "contrôle réduit". S'ils permettent de penser que la fabrication est très bonne, on relâche la sévérité du contrôle de façon à avoir des opérations plus économiques (contrôle réduit) ; s'ils conduisent à penser que la fabrication n'est pas ce qu'on en attendait, on accroît la sévérité (contrôle renforcé), afin d'être mieux protégé contre le risque d'accepter une fabrication médiocre (diminution de LQ pour un même risque β). Mais ceci constitue un tout autre problème.

Peut-être les explications qui précèdent apparaitront-elles plus évidentes à la lumière d'un exemple simple.

On considère un jeu de 52 cartes symbolisant la fabrication, dans lequel les 4 as jouent le rôle de pièces défectueuses ; leur proportion est $p = \frac{1}{13}$ (on supposera aussi par la suite que le nombre d'as peut être quelconque).

1/ Un joueur A reçoit 13 cartes (lot), dont il retourne 5 (échantillon). Il est "gagnant" si, sur les 5 cartes, une au plus est un as. On a :

$$\frac{N}{M} = \frac{13}{52} = 0,25 \gg 0,10 \quad \frac{n}{N} = \frac{5}{13} \gg 0,10 \quad \frac{n}{M} = \frac{5}{52} < 0,10$$

<u>1 re question</u> : Est-il équivalent pour le joueur de recevoir 13 cartes et d'en retourner 5, ou de tirer au hasard 5 cartes dans le jeu complet ? La réponse est évidemment Oui.

<u>2 e question</u> : Quelle est la probabilité pour le joueur de gagner ? La loi binomiale étant applicable à un "taux de prélèvement" $\frac{5}{32}$ la réponse est :

$$P = (1-p)^5 + 5p(1-p)^4 \qquad \text{avec} \qquad p = \frac{1}{13}$$

$$P = 0,949$$

Si l'on applique la loi hypergéométrique (tirages exhaustifs) on trouve la valeur très voisine

$$P = \frac{1}{C_{52}^5}\,[C_{48}^5 + 4C_{48}^4] = 0,957$$

2/ On distribue le jeu de 52 cartes entre 4 joueurs A, B, C, D, la règle du jeu étant la même que pour A.

<u>3 e question</u> : Les 4 joueurs ont-ils la même probabilité de gagner ? La réponse est évidemment Oui.

<u>4 e question</u> : Les 3 premiers joueurs A, B, C, retournent leurs 5 cartes l'un après l'autre, sans annoncer leur résultat. Le joueur D, qui retourne ses cartes en dernier, a-t-il toujours la même probabilité de gagner ? La réponse est évidemment Oui.

<u>Les réponses à ces 4 questions sont les mêmes, quel que soit le nombre d'as dans le jeu</u> ; seule la valeur numérique pour la 2 e question est modifiée, s'il n'y a pas 4 as dans le jeu, c'est-à-dire si $p \neq \frac{4}{52}$. Si le nombre d'as dans le jeu est inconnu, la probabilité de gagner, P, devient une fonction de p (qui peut prendre les valeurs 0, $\frac{1}{52}$, $\frac{2}{52}$, ... 1)

5 e question : Les trois premiers joueurs annoncent leur résultat sous la forme "gain", ou "non gain". Cette information modifie-t-elle la probabilité de gagner pour le joueur D ?

La réponse est évidemment Oui si D sait qu'il y avait 4 as dans le jeu. Par exemple si A a annoncé "non gain", B "gain" et C "non gain", le joueur D est certain de gagner. Mais si D ne sait pas combien il y avait d'as dans le jeu, l'information recueillie est de piètre valeur.

6 e question : Les 3 premiers joueurs annoncent le nombre d'as qu'ils ont obtenu. Cette information modifie t-elle la probabilité de gagner pour le joueur D ?

Evidemment Oui, mais de façon différente, suivant qu'il sait ou ne sait pas qu'il y avait 4 as dans le jeu.

S'il le sait, et si par exemple A et B ont annoncé "un as", C "0 as", il reste 2 as dans les 13 cartes que reçoit D. En en retournant 5, la probabilité qu'il obtienne 0 ou 1 as (gain) doit être calculée par la loi hypergéométrique:

$$P = \frac{1}{C_{13}^5} [C_{11}^5 + 2\, C_{11}^4] = \frac{34}{39} \# 0,9$$

S'il ne le sait pas, il a la possibilité d'estimer le nombre d'as dans le jeu. Par exemple, si A, B, C ont annoncé respectivement 3, 5 et 4 as, cette estimation est $\frac{52}{3 \times 13}(3 + 5 + 4) = 16$ (il faut prendre le nombre entier le plus voisin si le calcul donne un nombre fractionnaire). L'estimation du nombre d'as dans les 13 cartes reçues par D est :

$$16 - (3 + 5 + 4) = R$$

A partir de cette estimation, la probabilité de gagner pour D est :

$$P = \frac{1}{C_{13}^5} [C_9^5 + 4\, C_9^4] = \frac{70}{143} \# 0,5$$

7 e question : Pour un nombre d'as fixé dans le jeu (0, 1, 2, ...) la probabilité que les 4 joueurs se répartissent suivant :

4 gagnants	0 perdant
3 "	1 "
2 "	2 "
1 "	3 "
0 "	4 "

dépend-elle de l'ordre suivant lequel les joueurs retournent leurs cartes et du résultat qu'ils annoncent ?

La réponse est évidemment Non. (certaines des probabilités ci-dessus peuvent être nulles ; par exemple avec 4 as, on ne peut pas avoir 0 gagnant ni 1 gagnant).

Dans l'exemple simulé qui vient d'être décrit, le nombre de lots (4) est petit, de sorte que la "probabilité de gagner" ne peut pas être traduite par une fréquence. Pour retrouver une situation industrielle comparable à celle qui est supposée dans les MIL STD, il suffit d'imaginer qu'on mélange (par exemple) 100 jeux de 52 cartes contenant chacun 4 as. Alors dans les 4 × 100 = 400 groupes de treize cartes, la proportion de groupes amenant la conclusion "gagnant" sera voisine de la probabilité calculée à la "2 e question", soit 0,949 : le nombre de groupes gagnants sera voisin de 380.

4 - REMARQUES COMPLEMENTAIRES SUR LE CONTROLE PAR MESURES

Nous ajouterons deux remarques, qui concernent les Tables MIL STD 414 pour le "contrôle par mesures des pourcentages de défectueux", et qui illustrent à nouveau la distinction essentielle entre le contrôle d'un lot isolé et le contrôle d'une série de lots.

Lorsqu'on consulte la table A-2 qui figure au début de ce document, on constate que certains plans s'appliquent à un "effectif de lot" de 3 à 8, d'autres à un effectif de lot de 9 à 15 etc...

Or ces tables (ainsi d'ailleurs que celles de Bowker et Goode [9]) supposent essentiellement que les mesures du caractère contrôlé sont distribuées suivant une loi normale. Comment un ensemble limité à 3 mesures pourrait-il être considéré comme distribué suivant une loi normale ? L'absurdité disparait si l'on contrôle un grand nombre de lots de 3 pièces provenant de la même fabrication. C'est bien pour ces conditions d'application qu'ont été conçues les tables MIL STD 414. Si on les utilise pour le contrôle d'un lot isolé, il est essentiel que ce lot soit suffisamment important pour que l'hypothèse de normalité lui soit applicable.

Lorsque la variabilité (écart-type) de la fabrication est inconnue, ce qui est le cas le plus fréquent, les tables proposent deux méthodes de contrôle : l'une basée sur l'écart-type s estimé à partir de l'échantillon, l'autre basée sur l'étendue moyenne $\bar{w}$ de l'échantillon. Or si l'on applique les deux méthodes au même lot, ou plus précisément <u>aux mêmes mesures</u> il peut arriver qu'on aboutisse à des conclusions contraires : acceptation dans un cas, rejet dans l'autre.

L'exemple suivant est emprunté aux MIL STD 414 eux-mêmes (exemple B1, page 48 de la traduction française) : on a simplement modifié la limite de spécification (208 au lieu de 209).

La température maximale de travail d'un certain appareillage est fixée à 209°F. Un lot de 40 individus est soumis au contrôle. On décide d'utiliser un contrôle normal et le niveau de contrôle IV avec un NQA égal à 1 %. Les tables A2, B1 (méthode de l'écart-type) et C1 (méthode de l'étendue) montrent que l'effectif de l'échantillon doit être égal à 5.

Les mesures obtenues ont été :

197 188 184 205 201

La limite supérieure de spécification est $\boxed{T = 208}$

Le tableau ci-après donne les calculs et la décision obtenue lorsqu'on applique, d'une part la méthode de l'écart-type (cf. page 49 de la traduction française), d'autre part la méthode de l'étendue (suivant le modèle de l'exemple C1 de la page 81).

Avec des conclusions inversées, on pourrait imaginer le dialogue suivant :

Données	Méthode de l'écart-type	Méthode de l'étendue
Effectif de l'échantillon : n	5	5
Somme des mesures : Σx	975	975
Somme des carrés des mesures : Σx^2	190 435	-
Facteur de correction : $(FC) = \frac{(\Sigma x)^2}{n}$	190 125	-
Somme corrigée des carrés : $(SC) = \Sigma x^2 - (FC)$	310	-
Variance estimée : $(V) = \frac{(SC)}{n-1}$	77,5	-
Estimation de l'écart-type du lot : $S = \sqrt{(V)}$	8,81	-
Etendue de l'échantillon : w	-	21
Moyenne de l'échantillon : $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$	195	195
Indice de qualité :		
méthode de l'écart-type $Q_{(s)} = \frac{T - \bar{x}}{s}$	1,48	-
méthode de l'étendue $Q_{(w)} = \frac{T - \bar{x}}{w}$	-	0,619
Critère d'acceptation :		
méthode de l'écart-type $k_{(s)}$	(table B1) 1,53	-
méthode de l'étendue $k_{(w)}$	-	(table C1) 0,614
Critère d'acceptabilité :		
Méthode de l'écart-type : comparaison de $Q_{(s)}$ à $k_{(s)}$	1,48 < 1,53	-
Méthode de l'étendue : " $Q_{(w)}$ à $k_{(w)}$	-	0,619 > 0,614
Conclusion	Rejet	Acceptation

<u>le fournisseur</u> "Mon lot est rejeté. Mais vous avez utilisé la méthode de l'étendue : c'est 'moins précis' que l'écart-type. Appliquons donc aux mesures, que je ne conteste pas, la méthode de l'écart-type".

<u>le client</u> "Bien que cela n'ait pas été prévu, j'y consens".

<u>le fournisseur</u> "Vous voyez, je suis accepté".

Mais si l'on contrôle dans les mêmes conditions, un grand nombre de lots de 40 pièces prélevées dans la même fabrication, la proportion de lots acceptés et rejetés sera la même, quelle que soit celle des deux méthodes que l'on adopte : elle sera donnée, en fonction de la qualité de la fabrication, par la courbe d'efficacité du plan.

De toutes façons, il ne saurait être question de choisir la règle de décision ou de modifier la règle initialement choisie après que les résultats de l'échantillonnage sont connus. C'est avant les opérations de contrôle que celle-ci doit être décidée ; toute autre façon d'opérer entraînerait une modification (imprévisible) des risques choisis.

Pour terminer, nous conseillons au lecteur qui veut se familiariser avec les tables MIL STD 105 D et MIL STD 414 - et en particulier éviter de les utiliser abusivement - de se procurer le fascicule de documentation récemment publié par l'Association Française de Normalisation sous le titre "Contrôle Statistique de Réception" (10).

BIBLIOGRAPHIE

[1] MIL STD 105 D (Désignation Internationale ABC - STD 105) Traduction française : Règles et Tables d'échantillonnage pour les contrôles par attributs et par décompte du nombre de défauts. Association Française de Normalisation (AFNOR) - NF - X - 06 - 022 ; Juin 1967.

[2] MIL STD 414. Traduction française : Règles et Tables d'échantillonnage pour les contrôles par mesures des Pourcentages de Défectueux - Association Française de Normalisation (AFNOR) - NF - X - 06 - 023 ; Juin 1967.

[3] Tables of the binomial probability distribution - U.S. Departement of Commerce, Applied Mathematics, Séries 6 - Washington 25 DC.

[4] 50 - 100 Binomial Tables - John Wiley and Sons, New-York.

[5] Poisson's Exponential Binomial Limit - D. Van Nostrand Cy, New-York.

[6] Tables of the individual and cumulative terms of Poisson distribution-D. Van Nostrand Cy, New-York.

[7] R. CAVÉ - Le contrôle statistique des fabrications-Editions Eyrolles (Paris) 1961

[8] Statistical Tables and Formulas - John Wiley and Sons ; New York.

[9] BOWKER et GOODE - Sampling inspection by variables - MIL. Graw Hill Book Cy, New York.

[10] Contrôle Statistique de réception. Association Française de Normalisation (AFNOR) NF - X - 06 - 021, Juin 1967.

ANNEXE 1

TIRAGE A DEUX DEGRES DANS UNE FABRICATION

- Une fabrication est constituée de M objets dont D sont défectueux et M-D bons.

- On prélève au hasard un premier échantillon de N objets que l'on appelle lot. Le nombre de défectueux est une variable aléatoire X, prenant les valeurs

$$K = 0, 1, 2 \dots N \text{ si } N \leqslant D$$

$$K = 0, 1, 2 \dots D \text{ si } N \geqslant D$$

- Dans le lot on prélève à nouveau au hasard un échantillon de n objets. Le nombre de défectueux est une variable aléatoire x, prenant les valeurs

$$k = 0, 1, 2 \ldots\ldots n \text{ si } n \leqslant D$$

$$k = 0, 1, 2 \ldots\ldots D \text{ si } n \geqslant D$$

La loi de probabilité de x est la même que si l'échantillon de n objets avait été prélevé au hasard dans la fabrication.

DEMONSTRATION

1/ La loi de X est :

$$\text{Pré}\,[X = K] = \frac{C_D^K\, C_{M-D}^{N-K}}{C_M^N}$$

Si D est petit par rapport à M (non exhaustivité du 1 er prélèvement), on a l'approximation binomiale

$$\text{Pré}\,[X = K] = C_N^K\, p^K\, (1 - p)^{N-K} \qquad \text{avec } p = \frac{D}{M}$$

2/ Pour que $x = k$ (d'où $n - k$ non défectueux) dans l'échantillon, il faut :

$$X \geqslant k \qquad N - X \geqslant n - k$$

$$X \geqslant k \qquad X \leqslant k + (N - n)$$

soit

$$X = k\,,\ k + 1,\ \ldots\ldots\ k + c,\ \ldots\ldots\ k + (N - n)$$

Pour $X = k + c$ ($c = 0, 1, 2 \ldots\ldots N - n$), on a :

$$\text{Pré}\,[x = k/X = k + c] = \frac{C_{k+c}^k\, C_{N-(k+c)}^{n-k}}{C_N^n}$$

D'où :

$$\text{Pré}\,[x = k] = \sum_{c=0}^{N-n} \text{Pré}\,[X = k + c]\ \text{Pré}\,[x = k/X = k + c]$$

$$\boxed{\text{Pré}\,[x = k] = \sum_{c=0}^{N-n} \frac{C_D^{k+c}\, C_{M-D}^{N-(k+c)}}{C_M^N} \times \frac{C_{k+c}^k\, C_{N-(k+c)}^{n-k}}{C_N^n}} \qquad (1)$$

3/ D'autre part, si l'échantillon de n objets est prélevé directement dans la fabrication on a :

$$\boxed{\text{Pré}\,[x = k] = \frac{C_D^k\, C_{M-D}^{n-k}}{C_M^n}} \qquad (2)$$

Il s'agit de démontrer que les expressions (1) et (2) sont identiques.

<u>Cas particulier où le 1 er prélèvement (lot dans fabrication) est non exhaustif</u> $\left(p = \frac{D}{M}\right)$

L'expression (1) s'écrit :

$$\text{Pré}\,[x = k] = \sum_{c=0}^{N-n} C_N^{k+c}\, p^{k+c}\, (1 - p)^{N-(k+c)} \times \frac{C_{k+c}^{k}\, C_{N-(k+c)}^{n-k}}{C_N^n}$$

$$\text{Pré}\,[x = k] = \sum_{c=0}^{N-n} \frac{N!}{(k + c)!\,(N - k - c)!} \cdot \frac{(k + c)!}{k!\,c!} \cdot \frac{(N - k - c)!}{(n - k)!\,(N - n - c)!}$$

$$\frac{n!\,(N - n)!}{N!}\, p^{k+c}\, (1 - p)^{N-(k+c)}$$

$$= \sum_{c=0}^{N-n} \frac{n!\,(N - n)!}{k!\,c!\,(n - k)!\,(N - n - c)!}\, p^{k+c}\, (1 - p)^{N-k-c}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n - k)!}\, p^k\, (1 - p)^{n-k} \sum_{c=0}^{N-n} \frac{(N - n)!}{c!\,[(N - n) - c]!}\, p^c (1 - p)^{(N-n)-c}$$

$$\text{Pré}\,[x = k] = \frac{n!}{k!\,(n - k)!}\, p^k\, (1 - p)^{n-k}$$

Le premier prélèvement étant supposé non-exhaustif, l'échantillon de n objets prélevé directement dans la fabrication l'est à fortiori, et l'expression (2) s'écrit également

$$\text{Pré}\,[x = k] = \frac{n!}{k!\,(n - k)!}\, p^k (1 - p)^{n-k}$$

<u>Cas général</u> - L'expression (1) s'écrit :

$$\text{Pré}\,[x = k] = \sum_{c=0}^{N-n} \frac{D!\,(M - D)!}{(k + c)!\,(D - k - c)!\,(N - k - c)!\,(M - D - N + k + c)!} \times \ldots$$

$$\ldots \times \frac{(k + c)!\,(N - k - c)!}{k!\,c!\,(n - k)!\,(N - n - c)!} \times \frac{N!\,(M - N)!\,n!\,(N - n)!}{M!\,N!}$$

$$= \sum_{c=0}^{N-n} \frac{(M - N)!\,(N - n)!\,(M - D)!\,D!\,n!}{[(D - k) - c]!\,[(M - N) - (D - k) + c]!\,[(N - n) - c]!\,k!\,c!\,(n - k)!\,M!}$$

On posera

$$M - N = R \qquad N - n = r \qquad D - k = d$$

$$\text{Pré}\,[x = k] = \sum_{c=0}^{r} \frac{R!\,r!\,(M - D)!\,n!\,D!}{(d - c)!\,[R - (d - c)]!\,(r - c)!\,k!\,c!\,(n - k)!\,M!} \qquad (1)$$

D'autre part, l'expression (2) s'écrit :

$$\text{Pré}\,[x = k] = \frac{D!\,(M-D)!\,n!\,(M-n)!}{k!\,(D-k)!\,(n-k)!\,(M-D-n+k)!\,M!} = \tag{2}$$

$$= \frac{D!\,(M-D)!\,n!\,(R+r)!}{k!\,d!\,(n-k)!\,(R+r-d)!\,M!}$$

Les expressions (1) et (2) sont identiques si :

$$\sum_{c=0}^{r} \frac{R!\,r!}{(d-c)!\,[R-(d-c)]!\,(r-c)!\,c!} = \frac{(R+r)!}{d!\,(R+r-d)!}$$

ou encore

$$\sum_{c=0}^{r} \frac{d!\,(R+r-d)!}{c!\,(d-c)!\,(r-c)!\,[R-(d-c)]!} = \frac{(R+r)!}{R!\,r!}$$

soit

$$\sum_{c=0}^{r} C_d^c \times C_{R+r-d}^{r-c} = C_{R+r}^{r}$$

ou en posant $R + r = M - n = T$

$$\sum_{c=0}^{r} C_d^c \,.\, C_{T-d}^{r-c} = C_T^r$$

Cette formule est bien exacte (quel que soit $d < T$), comme on le vérifie en appliquant par recurrence la relation :

$$\begin{aligned} C_T^r &= C_{T-1}^r + C_{T-1}^{r-1} \\ &= C_{T-2}^r + 2\,C_{T-2}^{r-1} + C_{T-2}^{r-2} \\ &= C_{T-3}^r + 3\,C_{T-3}^{r-1} + 3\,C_{T-3}^{r-2} + C_{T-3}^{r-3} = \text{etc} \ldots. \end{aligned}$$

Les expressions (1) et (2) sont donc bien identiques.

ANNEXE II

PLANS D'ECHANTILLONNAGE PAR ATTRIBUTS

- Effectifs d'échantillon variant par unité jusqu'à $n = 50$, puis de 5 en 5 jusqu'à $n = 100$.

- Valeurs de n et du critère d'acceptation A pour les valeurs du "risque fournisseur" :

$$\alpha \# 0,01 \quad (0,005 \leqslant \alpha \leqslant 0,015)$$

$$\alpha \# 0,02 \quad (0,015 \leqslant \alpha \leqslant 0,025)$$

$$\alpha \# 0,05 \quad (0,04 \leqslant \alpha \leqslant 0,06)$$

associées à $p_1 = 1\ \%,\ 2\ \%,\ 5\ \%$.

- Valeurs correspondantes du "risque client" β pour :

p_2 = 2 %, 5 %, 10 %, 15 % (lorsque p_1 = 1 %)
p_2 = 5 %, 10 %, 15 % (" p_1 = 2 %)
p_2 = 10 %, 15 % (" p_1 = 5 %)

Les plans ont été calculés dans l'hypothèse où la loi binomiale est applicable.

Dans le cas du contrôle d'un lot isolé, l'effectif minimum du lot indiqué dans la colonne : N minimum (lot isolé) correspond à la condition $N \geqslant 10n$. Cette condition peut, sans grande erreur, être assouplie jusqu'à $N \geqslant 7n$.

p_1 = 1 %, $\alpha \# 0,01$ ($0,005 \leqslant \alpha \leqslant 0,015$)

n	A	α	Valeurs de β pour				N minimum (lot isolé)
			p_2 = 2 %	p_2 = 5 %	p_2 = 10 %	p_2 = 15 %	
11	1	0,005	0,981	0,898	0,697	0,492	110
12	1	0,006	0,977	0,882	0,659	0,443	120
13	1	0,007	0,973	0,865	0,621	0,398	130
14	1	0,008	0,969	0,847	0,585	0,357	140
15	1	0,010	0,965	0,829	0,549	0,319	150
16	1	0,011	0,960	0,811	0,515	0,284	160
17	1	0,012	0,955	0,792	0,482	0,252	170
18	1	0,014	0,950	0,774	0,450	0,224	180
19	1	0,015	0,945	0,755	0,420	0,198	190
34	2	0,005	0,970	0,759	0,326	0,097	340
35	2	0,005	0,967	0,746	0,306	0,087	350
36	2	0,006	0,965	0,732	0,288	0,078	360
37	2	0,006	0,962	0,718	0,270	0,069	370
38	2	0,006	0,960	0,704	0,254	0,062	380
39	2	0,007	0,957	0,692	0,238	0,055	390
40	2	0,007	0,954	0,677	0,223	0,049	400
41	2	0,008	0,951	0,663	0,210	0,043	410
42	2	0,009	0,948	0,649	0,195	0,038	420
43	2	0,009	0,945	0,635	0,182	0,034	430
44	2	0,010	0,942	0,621	0,170	0,030	440
45	2	0,010	0,939	0,608	0,159	0,027	450
46	2	0,011	0,936	0,594	0,148	0,023	460
47	2	0,012	0,932	0,580	0,138	0,021	470
48	2	0,012	0,929	0,567	0,129	0,018	480
49	2	0,013	0,925	0,554	0,120	0,016	490
50	2	0,014	0,922	0,541	0,112	0,014	500
70	3	0,005	0,948	0,534	0,071	0,004	700
75	3	0,007	0,936	0,480	0,050	0,002	750
80	3	0,009	0,923	0,428	0,035	0,001	800
85	3	0,011	0,909	0,380	0,025	0,001	850
90	3	0,013	0,893	0,336	0,017	<0,001	900

Dans le cas du contrôle d'une série de lots provenant de la même fabrication, l'effectif de l'échantillon doit être comparé, suivant les relations précédentes, à l'effectif total de la fabrication et non à l'effectif du lot.

N.B. - Les courbes d'efficacité complètes peuvent être obtenues dans les tables de la loi binomiale [3], [4].

$p_1 = 1\ \%$, $\alpha \# 0,02$ $(0,015 \leqslant \alpha \leqslant 0,025$

n	A	α	Valeurs de β pour :				N minimum (lot isolé)
			$p_2 = 2\ \%$	$p_2 = 5\ \%$	$p_2 = 10\ \%$	$p_2 = 15\ \%$	
2	0	0,020	0,960	0,903	0,810	0,723	20
19	1	0,015	0,945	0,755	0,420	0,198	190
20	1	0,017	0,940	0,736	0,392	0,176	200
21	1	0,019	0,935	0,717	0,365	0,155	210
22	1	0,020	0,929	0,698	0,339	0,137	220
23	1	0,022	0,923	0,679	0,315	0,120	230
24	1	0,024	0,917	0,661	0,292	0,106	240
55	2	0,018	0,902	0,477	0,077	0,007	550
60	2	0,022	0,881	0,417	0,053	0,004	600
95	3	0,016	0,877	0,295	0,012	< 0,001	950
100	3	0,018	0,859	0,258	0,008	< 0,001	1000

$p_1 = 1\ \%$; $\alpha \# 0,05$ $(0,04 \leqslant \alpha \leqslant 0,06)$

n	A	α	Valeurs de β pour :				N minimum (lot isolé)
			$p_2 = 2\ \%$	$p_2 = 5\ \%$	$p_2 = 10\ \%$	$p_2 = 15\ \%$	
5	0	0,049	0,904	0,774	0,590	0,444	50
6	0	0,058	0,886	0,735	0,531	0,377	60
32	1	0,041	0,866	0,520	0,156	0,037	320
33	1	0,043	0,859	0,504	0,144	0,032	330
34	1	0,045	0,852	0,488	0,133	0,028	340
35	1	0,048	0,845	0,472	0,122	0,024	350
36	1	0,050	0,838	0,457	0,113	0,021	360
37	1	0,053	0,831	0,442	0,104	0,018	370
38	1	0,055	0,824	0,427	0,095	0,016	380
39	1	0,058	0,817	0,413	0,088	0,014	390
75	2	0,040	0,810	0,270	0,016	0,001	750
80	2	0,047	0,784	0,231	0,011	< 0,001	800
85	2	0,054	0,758	0,196	0,007	< 0,001	850

$p_1 = 2\ \% \ ;\ \alpha \# 0,01\ (0,005 \leqslant \alpha \leqslant 0,015)$

n	A	α	Valeurs de β pour :				N minimum (lot isolé)
			p_2 = 2 %	p_2 = 5 %	p_2 = 10 %	p_2 = 15 %	
6	1	0,006	-	0,967	0,886	0,776	60
7	1	0,008	-	0,956	0,850	0,717	70
8	1	0,010	-	0,943	0,813	0,657	80
9	1	0,013	-	0,929	0,775	0,599	90
18	2	0,005	-	0,942	0,734	0,480	180
19	2	0,006	-	0,933	0,705	0,441	190
20	2	0,007	-	0,925	0,677	0,405	200
21	2	0,008	-	0,915	0,648	0,370	210
22	2	0,009	-	0,905	0,620	0,338	220
23	2	0,010	-	0,895	0,592	0,308	230
24	2	0,012	-	0,884	0,564	0,280	240
25	2	0,013	-	0,873	0,537	0,254	250
26	2	0,015	-	0,861	0,511	0,230	260
34	3	0,005	-	0,912	0,554	0,228	340
35	3	0,005	-	0,904	0,531	0,209	350
36	3	0,006	-	0,896	0,509	0,191	360
37	3	0,006	-	0,888	0,486	0,174	370
38	3	0,007	-	0,880	0,465	0,158	380
39	3	0,008	-	0,871	0,444	0,143	390
40	3	0,008	-	0,862	0,423	0,130	400
41	3	0,009	-	0,853	0,403	0,118	410
42	3	0,010	-	0,843	0,384	0,107	420
43	3	0,011	-	0,833	0,365	0,096	430
44	3	0,011	-	0,823	0,347	0,087	440
45	3	0,012	-	0,813	0,329	0,078	450
46	3	0,013	-	0,803	0,312	0,071	460
47	3	0,014	-	0,793	0,296	0,064	470
48	3	0,015	-	0 782	0,280	0,057	480
55	4	0,005	-	0,860	0,345	0,070	550
60	4	0,007	-	0,820	0,271	0,042	600
65	4	0,010	-	0,775	0,209	0,026	650
70	4	0,013	-	0,728	0,159	0,015	700
80	5	0,005	-	0,789	0,177	0,014	800
85	5	0,007	-	0,748	0,136	0,008	850
90	5	0,010	-	0,705	0,103	0,005	900
95	5	0,012	-	0,661	0,078	0,003	950
100	5	0,015	-	0,616	0,058	0,002	1000

$p_1 = 2\ \% \ ; \ \alpha \# 0,02 \ (0,015 \leqslant \alpha \leqslant 0,025)$

n	A	α	Valeurs de β pour :				N minimum (lot isolé)
			p = 2 %	p = 5 %	p = 10 %	p = 15 %	
10	1	0,016	-	0,914	0,736	0,544	100
11	1	0,020	-	0,898	0,697	0,492	110
12	1	0,023	-	0,882	0,659	0,443	120
26	2	0,015	-	0,861	0,511	0,230	260
27	2	0,016	-	0,850	0,485	0,207	270
28	2	0,018	-	0,837	0,459	0,187	280
29	2	0,020	-	0,825	0,435	0,168	290
30	2	0,022	-	0,812	0,411	0,151	300
31	2	0,024	-	0,799	0,389	0,136	310
48	3	0,015	-	0,782	0,280	0,057	480
49	3	0,017	-	0,717	0,265	0,051	490
50	3	0,018	-	0,760	0,250	0,046	500
55	3	0,042	-	0,705	0,187	0,025	550
75	4	0,017	-	0,679	0,119	0,008	750
80	4	0,022	-	0,629	0,088	0,005	800
100	5	0,015	-	0,616	0,058	0,002	1000

$p_1 = 2\ \% \ ; \ \alpha \# 0,05 \ (0,04 \leqslant \alpha \leqslant 0,06)$

n	A	α	Valeurs de β pour :				N minimum (lot isolé)
			p = 2 %	p = 5 %	p = 10 %	p = 15 %	
2	0	0,040	-	0,902	0,810	0,722	20
3	0	0,059	-	0,857	0,729	0,614	30
16	1	0,040	-	0,811	0,515	0,284	160
17	1	0,045	-	0,792	0,482	0,252	170
18	1	0,050	-	0,774	0,450	0,224	180
19	1	0,055	-	0,755	0,420	0,198	190
20	1	0,060	-	0,736	0,392	0,176	200
38	2	0,040	-	0,704	0,254	0,062	380
39	2	0,043	-	0,691	0,238	0,055	390
40	2	0,046	-	0,677	0,223	0,049	400
41	2	0,049	-	0,663	0,209	0,043	410
42	2	0,052	-	0,649	0,195	0,038	420
43	2	0,055	-	0,635	0,182	0,034	430
44	2	0,058	-	0,621	0,170	0,030	440
65	3	0,041	-	0,590	0,100	0,008	650
70	3	0,052	-	0,534	0,071	0,004	700
95	4	0,042	-	0,482	0,033	0,001	950
100	4	0,051	-	0,436	0,024	< 0,001	1000

$p_1 = 5\ \%$; $\alpha \# 0,01$ $(0,005 \leqslant \alpha \leqslant 0,015)$

n	A	α	Valeurs de β pour :				N minimum (lot isolé)
			$p_2 = 2\ \%$	$p_2 = 5\ \%$	$p_2 = 10\ \%$	$p_2 = 15\ \%$	
3	1	0,007	-	-	0,972	0,939	30
4	1	0,014	-	-	0,948	0,890	40
8	2	0,006	-	-	0,962	0,895	80
9	2	0,008	-	-	0,947	0,859	90
10	2	0,012	-	-	0,930	0,820	100
11	2	0,015	-	-	0,810	0,779	110
15	3	0,005	-	-	0,944	0,823	150
16	3	0,007	-	-	0,932	0,790	160
17	3	0,009	-	-	0,917	0,756	170
18	3	0,011	-	-	0,902	0,720	180
19	3	0,013	-	-	0,885	0,684	190
23	4	0,005	-	-	0,927	0,744	230
24	4	0,006	-	-	0,915	0,713	240
25	4	0,007	-	-	0,902	0,682	250
26	4	0,009	-	-	0,888	0,650	260
27	4	0,010	-	-	0,873	0,619	270
28	4	0,012	-	-	0,858	0,587	280
29	4	0,014	-	-	0,842	0,555	290
32	5	0,005	-	-	0,906	0,654	320
33	5	0,005	-	-	0,894	0,626	330
34	5	0,006	-	-	0,881	0,597	340
35	5	0,007	-	-	0,868	0,569	350
36	5	0,008	-	-	0,855	0,541	360
37	5	0,010	-	-	0,840	0,513	370
38	5	0,011	-	-	0,825	0,485	380
39	5	0,012	-	-	0,810	0,459	390
40	5	0,014	-	-	0,794	0,433	400
43	6	0,005	-	-	0,867	0,529	430
44	6	0,006	-	-	0,854	0,503	440
45	6	0,007	-	-	0,841	0,478	450
46	6	0,008	-	-	0,828	0,454	460
47	6	0,008	-	-	0,814	0,430	470
48	6	0,009	-	-	0,800	0,416	480
49	6	0,011	-	-	0,785	0,383	490
50	6	0,012	-	-	0,770	0,361	500
55	7	0,006	-	-	0,820	0,405	550
60	7	0,010	-	-	0,752	0,305	600
65	8	0,005	-	-	0,801	0,345	650
70	8	0,008	-	-	0,736	0,259	700
75	8	0,012	-	-	0,666	0,189	750
80	9	0,007	-	-	0,723	0,221	800
85	9	0,010	-	-	0,657	0,162	850
90	9	0,015	-	-	0,588	0,115	900
95	10	0,008	-	-	0,649	0,139	950
100	10	0,011	-	-	0,583	0,099	1000

$p_1 = 5\ \%$; $\alpha \# 0,02$ $(0,015 \leqslant \alpha \leqslant 0,025$

n	A	α	Valeurs de β pour :				N minimum (lot isolé)
			$p_2 = 2\ \%$	$p_2 = 5\ \%$	$p_2 = 10\ \%$	$p_2 = 15\ \%$	
5	1	0,023	-	-	0,919	0,835	50
11	2	0,015	-	-	0,910	0,779	110
12	2	0,020	-	-	0,889	0,736	120
13	2	0,025	-	-	0,866	0,730	130
20	3	0,016	-	-	0,867	0,648	200
21	3	0,019	-	-	0,848	0,611	210
22	3	0,022	-	-	0,828	0,575	220
30	4	0,016	-	-	0,825	0,524	300
31	4	0,018	-	-	0,807	0,494	310
32	4	0,020	-	-	0,789	0,464	320
33	4	0,023	-	-	0,770	0,436	330
41	5	0,016	-	-	0,777	0,407	410
42	5	0,017	-	-	0,760	0,383	420
43	5	0,019	-	-	0,743	0,359	430
44	5	0,022	-	-	0,726	0,336	440
45	5	0,024	-	-	0,708	0,314	450
55	6	0,019	-	-	0,690	0,263	550
65	7	0,016	-	-	0,677	0,222	650
70	7	0,023	-	-	0,599	0,157	700
80	8	0,018	-	-	0,593	0,134	800
90	9	0,015	-	-	0,588	0,115	900
95	9	0,022	-	-	0,518	0,081	950

$p_1 = 5\ \%$; $\alpha \# 0,05$ $(0,04 \leqslant \alpha \leqslant 0,06)$

n	A	α	Valeurs de β pour :				N minimum (lot isolé)
			$p_2 = 2\ \%$	$p_2 = 5\ \%$	$p_2 = 10\ \%$	$p_2 = 15\ \%$	
7	1	0,044	-	-	0,850	0,717	70
8	1	0,057	-	-	0,813	0,657	80
16	2	0,043	-	-	0,789	0,561	160
17	2	0,050	-	-	0,762	0,520	170
18	2	0,058	-	-	0,734	0,480	180
27	3	0,044	-	-	0,718	0,407	270
28	3	0,049	-	-	0,695	0,377	280
29	3	0,055	-	-	0,671	0,349	290
38	4	0,040	-	-	0,670	0,307	380
39	4	0,044	-	-	0,650	0,284	390
40	4	0,048	-	-	0,629	0,263	400
41	4	0,053	-	-	0,608	0,243	410
42	4	0,057	-	-	0,588	0,225	420
55	5	0,056	-	-	0,524	0,148	550
65	6	0,043	-	-	0,522	0,126	650
70	6	0,060	-	-	0,442	0,084	700
80	7	0,047	-	-	0,446	0,073	800
95	8	0,048	-	-	0,382	0,042	950