REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

R. THÉODORESCU

I. VĂDUVA

Le contrôle statistique de la qualité à plusieurs caractères

Revue de statistique appliquée, tome 17, nº 3 (1969), p. 5-29

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1969__17_3_5_0>

LE CONTROLE STATISTIQUE DE LA QUALITÉ A PLUSIEURS CARACTÈRES

R. THÉODORESCU

Université Laval, Faculté des Sciences
Département de mathématiques, Québec

et I. VǍDUVA

The University of Manchester
Institute of Science and Technology, Manchester

INTRODUCTION

Les problèmes de contrôle statistique de la qualité en cours de fabrication, traités dans la littérature, considèrent pour la plupart un seul caractère mesurable (voir, par exemple Cavé (1961), Cowden (1957), Rancu et Tövissy (1963) et Schindowski et Schürz (1965) ; dans Cavé (1961) on fait seulement mention de quelques aspects concernant plusieurs caractères). L'extension à plusieurs caractères mesurables se heurte à des difficultés d'ordre théorique ainsi que d'ordre pratique en ce qui concerne la mise en oeuvre du contrôle proprement dit.

Les avantages du contrôle statistique à plusieurs caractères simultanés, dépendants ou indépendants, sont cependant multiples ; il suffit en premier lieu de remarquer qu'un tel contrôle tient compte des corrélations existant entre les différents caractères mesurables donnés et utilise une seule fiche de contrôle. Ainsi la surveillance du fonctionnement des mécanismes, qui sont à l'origine des caractères mesurables, concerne l'ensemble de ces mécanismes, qui s'influencent et se conditionnent les uns les autres pendant la fabrication.

L'introduction du contrôle statistique en cours de fabrication comprend deux stades : (a) l'analyse statistique préliminaire de la fabrication et (b) le choix de la méthode de contrôle et son application.

Le stade de l'analyse statistique préliminaire de la fabrication a pour but de vérifier que la fabrication est sous contrôle ; il pose deux problèmes théoriques importants : l'étude des échantillons prélevés et l'estimation de la variabilité de la fabrication (c'est-à-dire l'estimation de la fonction de répartition simultanée des caractères considérés) ; il est également nécessaire de supposer que les machines qui interviennent dans la fabrication sont adaptées à leur travail, c'est-à-dire que la variabilité correspond aux tolérances fixées.

En ce qui concerne le deuxième stade, on sait que, pour la surveillance optimale de la fabrication, il faut effectuer le contrôle en cours de fabrication d'un paramètre donnant la tendance centrale, et d'un paramètre donnant la dispersion des machines qui interviennent dans la fabrication considérée.

Les méthodes de contrôle qui sont suggérées ici ont effectivement en vue le contrôle de la tendance centrale ainsi que de la dispersion ; elles sont élaborées en supposant que la fabrication est sous contrôle et que les machines qui interviennent dans la fabrication sont adaptées à leur travail. De même, nous supposerons que la fonction de répartition simultanée des caractères considérés est normale. D'autre part, les plans d'échantillonnage envisagés sont construits sur des principes un peu différents, et sont déterminés plutôt par des facteurs économiques.

Cet article donne un compte rendu des résultats publiés par nous (1965), (1966), (1967 a-c). Ces résultats généralisent d'une manière naturelle les résultats connus pour le contrôle en cours de fabrication d'un seul caractère mesurable. L'article est divisé en deux chapitres. Le premier chapitre traite de l'analyse statistique préliminaire et le deuxième chapitre des méthodes de contrôle et des plans d'échantillonnage optimaux.

1 - L'ANALYSE STATISTIQUE PRELIMINAIRE

1.1 - Tests du caractère aléatoire des observations

1.1.1 - Surfaces médianes

L'étude des prélèvements, dont nous disposons pour l'analyse statistique préliminaire de la fabrication montre que très souvent ils ne s'effectuent pas au hasard. Pour véfifier que les prélèvements sont effectués au hasard, nous généraliserons quelques résultats classiques concernant les itérations déterminées par la médiane expérimentale.

Soit donc Δ l'ensemble des valeurs d'un vecteur aléatoire à h dimensions $\boldsymbol{\xi}' = (\xi_1, \ldots\ldots, \xi_h)$ (1), défini sur un espace probabilisé donné $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, où ξ_i, $1 \leq i \leq h$, représentent, dans les applications, des caractères mesurables de la même pièce. On appelle surface médiane du vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi}$ une surface convexe Γ de l'espace euclidien à h dimensions R^h qui sépare l'ensemble Δ en deux parties Δ_1 et Δ_2 telles que

$$P(\boldsymbol{\xi} \in \Delta_1) \geq \frac{1}{2} \leq P(\boldsymbol{\xi} \in \Gamma \cup \Delta_2).$$

Evidemment, la surface médiane ainsi définie n'est pas déterminée de façon unique ; elle peut être précisée si elle vérifie des conditions supplémentaires.

Supposons que $\boldsymbol{\xi}$, vecteur aléatoire à h dimensions, ait une fonction de répartition normale (non dégénérée) $N(\mathbf{m}, \boldsymbol{\Sigma})$, où $\mathbf{m}$ est le vecteur moyenne et $\boldsymbol{\Sigma}$ la matrice de covariance ; alors l'hyperplan

$$\mathbf{x}'\mathbf{d} = \mathbf{m}\,\mathbf{d},$$

où $\mathbf{d}$ est un vecteur unité donné, est une surface médiane pour $\boldsymbol{\xi}$. La surface ellipsoïdale

$$(\mathbf{x} - \mathbf{m})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}) = \theta\left(\frac{1}{2}\right), \tag{1.1}$$

où $\theta\left(\frac{1}{2}\right)$ vérifie la condition

---

(1) $\boldsymbol{\xi}$ est un vecteur colonne, c'est-à-dire une matrice $n \times 1$; dans ce qui suit nous noterons par $\mathbf{A}'$ et $\mathbf{A}^{-1}$ la transposée et l'inverse, respectivement, d'une matrice donnée $\mathbf{A}$.

$$P\left(\chi^2(h) < \theta\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2},$$

est aussi une surface médiane de $\boldsymbol{\xi}$. Dans ces relations, nous avons noté par $\mathbf{a}'\mathbf{b}$ le produit scalaire des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ et par $\chi^2(h)$ une variable aléatoire χ^2 à h degrés de liberté.

1.1.2 - Surfaces médianes expérimentales

Soit $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n_1})$ un échantillon d'effectif n_1 du vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi}$; à celui-ci nous associons le vecteur expérimental $\boldsymbol{\xi}_{(n_1)}$ qui prend les valeurs $\mathbf{x}_{j_1}$, $1 \leq j_1 \leq n_1$, où $\mathbf{x}'_{j_1} = (x_{1j_1}, \ldots, x_{hj_1})$, avec même probabilité égale à $\frac{1}{n_1}$. Nous arrivons donc naturellement à appeler surface médiane expérimentale du vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi}$ une surface médiane du vecteur $\boldsymbol{\xi}_{(n_1)}$.

Soit maintenant $u(\mathbf{x}) = \mu$ une surface médiane de $\boldsymbol{\xi}$. A l'aide de la fonction mesurable u, nous pouvons associer à l'échantillon $(\mathbf{x}_1 \ldots, \mathbf{x}_{n_1})$ un échantillon $(z_1, \ldots, z_{n_1})$, défini par

$$z_{j_1} = u(\mathbf{x}_{j_1}) \quad , \quad 1 \leq j_1 \leq n_1,$$

de la variable aléatoire

$$\zeta = u(\boldsymbol{\xi}).$$

Notons par $z_{(n_1)}$ la médiane expérimentale de l'échantillon $(z_1, \ldots, z_{n_1})$.
Alors la surface

$$u(\mathbf{x}) = z_{(n_1)}$$

est une surface médiane expérimentale de $\boldsymbol{\xi}$.

Supposons maintenant que $\boldsymbol{\xi}$ ait la densité de répartition f. Sous certaines conditions de régularité pour u, la variable aléatoire ζ a aussi une densité de répartition, notée par g. Nous en déduisons (Cramér (1948), p. 369) que la médiane expérimentale $z_{(n_1)}$ de la variable aléatoire ζ est asymptotiquement normale $N\left(\mu, \frac{1}{2\,g(\mu)\sqrt{n_1}}\right)$. Dans ce cas on a pour l'espérance mathématique et la variance de $z_{(n_1)}$

$$E z_{(n_1)} = \mu, \qquad \lim_{n \to \infty} D^2 z_{(n_1)} = 0,$$

d'où il résulte que la médiane expérimentale $z_{(n_1)}$ converge en probabilité (1) vers la médiane théorique μ de ζ lorsque $n_1 \to \infty$. Cela signifie que la surface médiane expérimentale $u(\mathbf{x}) = z_{(n_1)}$ peut être considérée comme une estimation sans biais et consistante de la surface médiane théorique $u(\mathbf{x}) = \mu$.

----

(1) Soient Γ et $(\Gamma_n)_{1 \leq n < \infty}$ une surface et une suite de surfaces invariantes à un groupe de transformations ; nous dirons que la suite $(\Gamma_n)_{1 \leq n < \infty}$ converge en probabilité vers la surface Γ si les paramètres qui engendrent la suite des surfaces considérées convergent en probabilité vers les paramètres de la surface limite lorsque $n \to \infty$.

La surface médiane expérimentale permet de vérifier si les prélèvements sont effectués au hasard. Reprenons donc l'échantillon $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n_1})$ d'effectif n_1, considéré plus haut. Etant donnée la fonction u, le problème revient à l'étude des itérations déterminées par les valeurs z_{j_1}, $1 \leq j_1 \leq n_1$, par rapport à la médiane expérimentale $z_{(n_1)}$. Il en résulte que pour tester le caractère aléatoire de l'échantillon $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n_1})$ d'effectif n du vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi}$ à h dimensions, nous testons le caractère aléatoire de l'échantillon $(z_1, \ldots, z_{n_1})$ d'effectif n_1 de la variable aléatoire à une seule dimensions $\zeta = u(\boldsymbol{\xi})$; le problème revient donc à l'application des tests classiques pour des variables aléatoires à une seule dimension qui utilisent le nombre total des itérations R ou bien la longueur maximale K des itérations (voir Cavé (1961), Rancu et Tövissi (1963), Dunin-Barkovski et Smirnov (1955) ainsi que d'autres) lorsque $n_1 > 30$.

Dans les applications, il est utile de prendre pour u une des fonctions

$$u_1(\mathbf{x}) = \mathbf{d}'\mathbf{x},$$

$$u_2(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{m})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}),$$

où $\mathbf{d}$ est un vecteur unité et $\mathbf{m}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$ sont le vecteur moyen et la matrice de covariance, respectivement, éventuellement leurs estimations. Pour la fonction u_1, la manière la plus convenable de choisir le vecteur unité $\mathbf{d}$ est de le prendre égal au petit axe de l'ellipsoïde de concentration.

1.2 - Tests de normalité

Un autre problème concernant l'analyse statistique préliminaire de la fabrication est l'estimation de la variabilité de la fabrication, c'est-à-dire la détermination de la fonction de répartition simultanée des caractères considérés et les tests de nullité correspondants, à l'aide d'un échantillon d'effectif n_2.

Un des tests de nullité, d'assez large portée, est le test général χ^2. Supposons donc que les composantes ξ_i, $1 \leq i \leq h$, du vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi}$ représentent des caractères mesurables continus de la même pièce et considérons une partition $(\Delta_s)_{1 \leqslant s \leqslant v}$ de l'ensemble Δ.

Nous distinguons deux cas.

1° Supposons que $\mathbf{m}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$ sont connus. Etant donnés les nombres réels θ_s, $1 \leqslant s \leqslant v$, tels que $0 < \theta_1 < \ldots < \theta_v = \infty$, nous définissons la partition $(\Delta_s)_{1 \leqslant s \leqslant v}$ correspondant au test de nullité χ^2 par

$$\Delta_1 = E_{\theta_1},$$

$$\Delta_s = E_{\theta_s} - E_{\theta_{s-1}}, \quad 2 \leq s \leq v, \tag{1.2}$$

où

$$E_\theta : (\mathbf{x} - \mathbf{m})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) < \theta . \tag{1.3}$$

On sait que l'expression

$$\chi^2 = \sum_{s=1}^{v} \frac{(\nu_s - n_2 p_s)^2}{n_2 p_s}, \tag{1.4}$$

où ν_s est le nombre des valeurs de l'échantillon qui appartiennent à l'ensemble Δ_s et $p_s = P(\xi \in \Delta_s)$, $1 \leq s \leq v$, est asymptotiquement une variable aléatoire $\chi^2(v-1)$. Les probabilités p_s, $1 \leqslant s \leqslant v$, résultent du fait que $(\xi - m)' \Sigma^{-1}(\xi - m)$ est une variable aléatoire $\chi^2(h)$.

2° Si m et Σ ne sont pas connus, nous considérons un échantillon préliminaire d'effectif n_3 et utilisons pour m et Σ les estimations de vraisemblance maximale $\bar{x}$ et S, respectivement. Nous remarquons que si les Δ_s, $1 \leqslant s \leqslant v$, ont la forme (1.2), les estimations de vraisemblance maximale coïncident avec les estimations obtenues par la méthode modifiée du minimum du χ^2 (voir Cramér (1948)). Soient maintenant $\bar{\Delta}_s$, $1 \leqslant s \leqslant v$, les ensembles définis par (1.2) avec $m = \bar{x}$ et $\Sigma = S$. Considérons un autre échantillon $(x_1, \ldots, x_{n_1})$ d'effectif n , indépendant du premier. L'expression χ^2, donnée par (1.4), est une variable aléatoire $\chi^2(v - 1)$. Les probabilités p_s, $1 \leqslant s \leqslant v$, résultent du fait que $\frac{n_3}{n_3 - 1}(x_{j_2} - \bar{x})' S^{-1}(x_{j_2} - \bar{x})$, $1 \leqslant j_2 \leqslant n_2$, est une variable aléatoire T^2 avec $n_3 - 1$ degrés de liberté ou, sous une forme équivalente,

$$\frac{n_3(n-h)}{h(n_3-1)(n_3+1)}(x_{j_2} - \bar{x})' S^{-1}(x_{j_2} - \bar{x}) = F(h, n_3 - h),$$

où $F(h, n_3 - h)$ est une variable aléatoire F avec h et $n_3 - h$ degrés de liberté (voir Văduva (1967)).

1.3 - Adaptation des machines

Pour que la fabrication soit valablement réalisée, il est aussi nécessaire que les machines qui interviennent soient adaptées à leur travail. Soit $t' = (t_1, \ldots, t_n)$ le milieu de l'intervalle de tolérance à h dimensions $T = [T_{11}, T_{12}] \times \ldots \times [T_{h1}, T_{h2}]$, où $[T_{i1}, T_{i2}]$, $1 \leqslant i \leqslant h$, est l'intervalle de tolérance donné pour le caractère ξ_i, $1 \leq i \leq h$. Nous admettons que la machine est réglée sur le milieu t de l'intervalle de tolérance T à h dimensions, c'est-à-dire que la condition $m = t$ est remplie.

Considérons le domaine ellipsoïdal E_θ, défini par (1.3), et $\theta = \chi^2_{1-\alpha}(h)$, où $P(\chi^2(h) \geqslant \chi^2_{1-\alpha}(h)) = \alpha$, α étant une probabilité fixée, très faible ($\alpha \leqslant 0,05$). Nous dirons que la machine est adaptée à son travail, si

$$E_\theta \subset T. \tag{1.5}$$

Ici nous avons évidemment supposé que la matrice Σ est connue ; elle a été estimée en utilisant un échantillon préliminaire.

Une condition du type (1.5) est supposée remplie pour chaque méthode de contrôle.

2 - LE CONTROLE STATISTIQUE DE LA QUALITE EN COURS DE FABRITION

2.1 - Méthodes de contrôle

2.1.1 - Considérations générales

Les méthodes de contrôle statistique de la qualité en cours de fabrication se refèrent à un paramètre donnant la tendance centrale et à un paramètre donnant la dispersion des machines qui interviennent dans la fabrication considérée. Pour chaque paramètre π, dont nous connaissons la fonction de répartition, nous déterminons les limites de contrôle L_i (limite inférieure) et L_s (limite supérieure) en partant du risque de 1ère espèce α et de l'effectif n_4 de l'échantillon considéré, qui sont donnés. Il résulte que

$$P_\pi(L_i \leqslant \pi < L_s) = F_\pi(L_s) - F_\pi(L_i) = 1 - \alpha,$$

où F_π représente la fonction de répartition de π quand la fabrication se déroule correctement.

Pour prendre des décisions suffisamment correctes, il est nécessaire que α soit assez faible ($\alpha \leqslant 0,05$) et que le risque de 2ème espèce β, défini par

$$P^*_\pi \ (L_i \leqslant \pi < L_s) = F^*_\pi \ (L_s) - F^*_\pi \ (L_i) = \beta,$$

où F^*_π représente la fonction de répartition de π quand la fabrication ne se déroule pas correctement, soit aussi assez faible. Il s'ensuit que le choix de α et n_4 doit conduire à un risque de 2ème espèce β assez faible. Quelquefois même, on donne β et n_4, et c'est α qui en résulte.

En ce qui concerne l'application de la méthode de contrôle caractérisée par le paramètre π, on prélève n_4 pièces à des intervalles de temps à peu près égaux fixés à l'avance ; nous sommes donc en présence d'un échantillon $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n_4})$ d'effectif n_4 du vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi}$. Ensuite on détermine la valeur de π pour cet échantillon. Si

$$L_i \leqslant \pi(\mathbf{x}_1, \ \ldots, \ \mathbf{x}_{n_4}) < L_s$$

la machine travaille correctement et la fabrication peut continuer. Par contre, si $\pi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n_4})$ ne se situe pas entre les limites de contrôle, la machine ne travaille pas correctement, d'où il résulte que la fabrication ne peut pas être poursuivie ; dans ce cas la machine est arrêtée et révisée et on contrôle à 100 % la fabrication depuis le dernier contrôle.

Dans ce qui suit nous supposerons que la fabrication est sous contrôle et que les machines qui interviennent dans la fabrication sont adaptées à leur travail.

2.1.2 - La méthode du vecteur moyen

Le plus important et le plus efficace des paramètres qui donnent la tendance centrale de la machine dans le cas du contrôle statistique à un seul caractère est la moyenne expérimentale. Il s'impose donc naturellement de considérer, pour le contrôle de la tendance centrale correspondant à h caractères simultanés, le vecteur moyen expérimental (voir nos travaux (1965) et (1967 c)).

Reprenons le vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi}$ supposé normal $N(\mathbf{m}, \boldsymbol{\Sigma})$. Pour établir la méthode de contrôle de la tendance centrale, il faut tenir compte de la fonction de répartition du vecteur $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_{n_4})$ qui est normal $N\left(\mathbf{m}, \frac{1}{n_4}\boldsymbol{\Sigma}\right)$.

Dans ce qui suit nous discuterons le contrôle statistique de la qualité en cours de fabrication de la tendance centrale lorsque (a) la matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ est connue et (b) la matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ n'est pas connue.

(a) Si $\boldsymbol{\Sigma}$ est une matrice connue, nous prenons comme paramètre de contrôle

$$\theta = n_4(\mathbf{x} - \mathbf{t})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{t}). \tag{2.1}$$

La grandeur θ est une variable aléatoire $\chi^2(h)$. Si α est le risque de 1ère espèce, les limites de contrôle sont $L_i = 0$ et $L_s = \chi^2_{1\alpha}(h)$, où $P(\chi^2(h) \geq \chi^2_{1-\alpha}(h)) = \alpha$. Pour déterminer le risque de 2ème espèce β, nous remarquons que la grandeur θ, quand $\mathbf{m} \neq \mathbf{t}$, est une variable aléatoire $\chi'^2(h\ ;\delta)$, c'est-à-dire une variable χ^2 non centrée à h degrés de liberté et à paramètre de non centralité donné par $\delta^2 = n_4(\mathbf{m} - \mathbf{t})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{m} - \mathbf{t})$. Il en résulte donc

$$\beta = P(\chi'^2(h\ ;\delta) < \chi^2_{1-\alpha}(h)).$$

Cette formule se simplifie si on utilise l'approximation usuelle des variables aléatoires χ^2 non centrées par des variables aléatoires χ^2 centrées (voir Scheffé (1958)).

(b) Quand la matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ n'est pas connue, nous prenons comme paramètre de contrôle

$$T^2 = n_4(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{t})'S^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{t}). \tag{2.2}$$

La grandeur T^2 est une variable aléatoire de Hotelling à $n_4 - 1$ degrés de liberté. Si α est le risque de 1ère espèce, les limites de contrôle sont $L_i = 0$ et $L_s = T^2_{1-\alpha}$, où $P(T^2 \geqslant T^2_{1-\alpha}) = \alpha$. Pour déterminer le risque de 2ème espèce β, nous remarquons que la grandeur $\frac{T^2}{n_4 - 1}\,\frac{n_4 - h}{h}$, quand $\mathbf{m} \neq \mathbf{t}$, est une variable aléatoire $F'(h,\ n_4 - h\ ;\delta)$, c'est-à-dire une variable F non centrée à h et $n_4 - h$ degrés de liberté et à paramètre de non centralité δ. Il en résulte que

$$\beta = P\left(F'(h,\ n_4 - h\ ;\delta) < \frac{T^2_{1-\alpha}}{n_4 - 1}\,\frac{n_4 - h}{h}\right). \tag{2.3}$$

Cette formule se simplifie lorsqu'on utilise l'approximation usuelle des variables aléatoires F non centrées par des variables aléatoires F centrées (voir nos travaux (1965) et (1967 c)).

2.1.3 - La méthode de la variance généralisée

Pour le contrôle statistique de la qualité en cours de fabrication de la dispersion de la machine nous utilisons (voir nos travaux (1965) et (1967 c)) comme paramètre de contrôle

$$\tilde{V} = h\,V^{1/h},$$

où

$$V = \frac{\det S}{\det \boldsymbol{\Sigma}},$$

det $\boldsymbol{\Sigma}$ est la variance généralisée et det $\mathbf{S}$ la variance généralisée expérimentale. La fonction de répartition de $\tilde{V}$ résulte de la relation

$$\det \mathbf{S} = \frac{\det \boldsymbol{\Sigma}}{(n_4 - 1)^h} \chi^2(n_4 - 1) \ldots \chi^2(n_4 - h).$$

Pour h = 2, nous obtenons le paramètre de contrôle $\tilde{V} = 2V^{1/2}$ qui est une variable aléatoire $\chi^2(2n_4 - 4)$. En général, on sait (voir Andersen (1957)) qu'une expression approximative pour la fonction de répartition de $\tilde{V}$ est donnée par

$$\tilde{V}(y) = \left(\frac{c}{h}\right)^{\frac{1}{2}h(n_4-h)} \frac{y^{\frac{1}{2}h(n_4-h)-1} e^{-\frac{c}{h}y}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}h(n_4 - h)\right)},$$

$$c = \frac{h}{2}\left(1 - \frac{(h-1)(h-2)}{2n_4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si α est le risque de 1ère espèce, les limites de contrôle sont $L_i = 0$ et $L_s = \tilde{V}_{1-\alpha}$, où $P(\tilde{V} \geqslant V_{1-\alpha}) = \alpha$. Pour déterminer le risque de 2ème espèce nous remarquons que

$$\beta = P(\delta_0 \tilde{V} < \tilde{V}_{1-\alpha}), \tag{2.4}$$

où $\delta_0 > 1$ est un nombre donné à l'avance, qui caractérise la limite acceptable pour la dispersion de la machine.

2.1.4 - Méthodes utilisant l'étendue

Reprenons l'échantillon $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n_4})$ d'effectif n_4 du vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi}$ normal $N(\mathbf{m}, \boldsymbol{\Sigma})$ et formons les grandeurs

$$\theta_{j_4} = (\mathbf{x}_{j_4} - \mathbf{t})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_{j_4} - \mathbf{t}) \quad , \quad 1 \leq j_4 \leq n_4.$$

L'étendue

$$R_\theta = \max_{1 \leqslant j_4 \leqslant n_4} \theta_{j_4} - \min_{1 \leqslant j_4 \leqslant n_4} \theta_{j_4} \tag{2.5}$$

peut être utilisée pour le contrôle statistique de la qualité en cours de fabrication de la tendance centrale si $\boldsymbol{\Sigma}$ est une matrice connue, c'est-à-dire s'il y a stabilité en ce qui concerne la dispersion de la fabrication.

Si la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ est inconnue, on définit l'étendue par

$$R_\eta = \max_{1 \leqslant q \leqslant k} \eta_q - \min_{1 \leqslant q \leqslant k} \eta_q,$$

où

$$\eta_q = \frac{n_4 - h}{h} \frac{T^2}{n_4 - 1} \quad , \quad 1 \leq q \leq k,$$

et

$$T_q^2 = n_4(\bar{\mathbf{x}}_q - \mathbf{t})' S^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_q - \mathbf{t}) \quad , \quad 1 \leq q \leq k,$$

sont des grandeurs calculées à l'aide de k échantillons indépendants d'effectif n_4. Cette étendue peut être utilisée pour le contrôle statistique global de la qualité en cours de fabrication de la tendance centrale de plusieurs machines ou bien d'une seule machine qui possède des dispositifs identiques produisant la même pièce.

Les fonctions de répartitions de R_θ et R_η ainsi que les limites de contrôle et les risques de 1ère et 2ème espèce sont donnés dans nos travaux (1967 b, c).

Pour le contrôle statistique de la qualité en cours de fabrication de la dispersion nous distinguons encore deux cas : (a) la matrice de covariance Σ est connue et (b) la matrice de covariance Σ n'est pas connue.

(a) Reprenons l'échantillon $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n_4})$ d'effectif n_4 du vecteur aléatoire ξ normal $N(\mathbf{m}, \Sigma)$ et considérons les quantités $(\mathbf{x}_{j_5} - \mathbf{x}_{j_6}), 1 \leqslant j_5 < j_6 \leqslant n_4$; ces quantités sont évidemment normales $N(\mathbf{0}, 2\Sigma)$. Posons, ensuite

$$R^{\Sigma}_{j_5 j_6} = (\mathbf{x}_{j_5} - \mathbf{x}_{j_6})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_{j_5} - \mathbf{x}_{j_6}) \quad , \quad 1 \leqslant j_5 < j_6 \leqslant n_4 ,$$

et

$$R^{\Sigma} = \max_{1 \leqslant j_5 < j_6 \leqslant n_4} R_{j_5 j_6} .$$

La grandeur R^{Σ} peut être interprétée comme la "distance" statistique maximale entre deux points de l'échantillon et de ce point de vue elle représente une généralisation de l'étendue d'une variable aléatoire à une seule dimension. Il est donc naturel d'appeler R^{Σ} étendue généralisée(1).

L'étendue généralisée R^{Σ} caractérise la dispersion des points $\mathbf{x}_{j_4}$, $1 \leqslant j_4 \leqslant n_4$, donc la dispersion de ξ. Il s'ensuit qu'elle peut être utilisée pour le contrôle statistique en cours de fabrication de la dispersion.

Pour déterminer la fonction de répartition de R^{Σ} il faut tenir compte du fait que les quantités $R^{\Sigma}_{j_5 j_6}$, $1 \leq j_5 < j_6 \leq n_4$, sont des variables aléatoires $\chi^2(h)$, en général dépendantes. Des formules approximatives pour cette fonction de répartition ont été données par Siotani (1959), (1960) et (1964). Les limites de contrôle ainsi que les risques de 1ère et 2ème espèce ont été donnés dans notre travail (1967 b).

(b) Si la matrice de covariance Σ n'est pas connue, nous considérons les quantités

$$R^{S}_{j_5 j_6} = (\mathbf{x}_{j_5} - \mathbf{x}_{j_6})' S^{-1} (\mathbf{x}_{j_5} - \mathbf{x}_{j_6}) \quad , \quad 1 \leqslant j_5 < j_6 \leqslant n_4 ,$$

et nous posons

$$R^{S} = \max_{1 \leqslant j_5 < j_6 \leqslant n_4} R^{S}_{j_5 j_6} .$$

Cette grandeur sera appelée étendue généralisée expérimentale (2). Elle sera utilisée dans ce cas comme paramètre donnant la dispersion. Une expression approximative de la fonction de répartition a été donnée par Siotani (1960). Les limites de contrôle et les risques de 1ère et 2ème espèce ont été donnés dans nos travaux (1967 b, c).

----

(1) Cette étendue généralisée a été considérée par Siotani (1959), (1960) et (1964).

(2) Voir la note précédente.

2.1.5 - Transposition de la méthode des calibres modifiés

Soit la matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ connue et p_0, $0 < p_0 < 1$, une probabilité fixée. Considérons l'ellipsoïde

$$E_{\theta(1-p_0)} : (\mathbf{x} - \mathbf{t})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{t}) < \theta(1 - p_0) \tag{2.6}$$

tel que

$$P(\chi^2(h) \geq \theta(1 - p_0)) = p_0$$

et

$$E_{\theta(1-p_0)} \subset T.$$

Pour fixer les idées, nous supposons que $h = 2$ (pour le cas général, voir nos travaux (1966) et (1967 c)). Soient D_1 et D_2 les axes de l'ellipse $E_{\theta(1-p_0)}$ et reprenons l'échantillon $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n_4})$ d'effectif n_4. Notons par N_k le nombre des points de cet échantillon qui se trouveront à l'extérieur de cette ellipse et dans le cadran k, $1 \leq k \leq 4$, déterminé par D_1 et D_2. Le paramètre donnant la tendance centrale sera

$$\varphi = \max_{k_1 \neq k_2} |N_{k_1} - N_{k_2}| = \max_{1 \leqslant k \leqslant 4} N_k - \min_{1 \leqslant k \leqslant 4} N_k = N^+ - N^-$$

et le paramètre donnant la dispersion sera

$$\psi = \sum_{k=1}^{4} N_k .$$

Dans nos travaux (1966) et (1967 c) nous avons indiqué les limites de contrôle et les risques de 1ère et 2ème espèce pour φ et ψ.

2.1.6 - Un exemple

Mărgăritescu, Obreja et Ursianu (1968) ont étudié un exemple effectif que nous allons reproduire ici pour illustrer la théorie. Il s'agit de $h = 2$.

Soit donc un échantillon d'effectif $n_2 = 200$ concernant les caractères ξ_1 et ξ_2, avec les intervalles de tolérance $[162,55 - 0,2 ; 162,55 + 0,2]$ et $[132,55 - 0,2 ; 132,55 + 0,2]$ respectivement, exprimés en millimètres. Ces caractères représentent les dimensions d'une pièce d'un moteur de camion et les prélèvements ont été effectués directement en usine. Les données fournies par cet échantillon sont rassemblées dans le tableau 1 ; il en résulte qu'il y a seulement $n_0 = 47$ valeurs distinctes $\mathbf{x}_{j_0}$, $1 \leqslant j_0 \leqslant 47$, la fréquence de $\mathbf{x}_{j_0}$ étant notée f_{j_0}, $1 \leqslant j_0 \leqslant 47$. A l'aide de cet échantillon, les matrices $\mathbf{m}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$ ont été estimées par

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 162,532 \\ 132,568 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 26\,841\,975 \times 10^{-10} & -6\,423\,518\,599 \times 10^{-12} \\ -6\,423\,518\,599 \times 10^{-12} & 358\,891 \times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

Le coefficient de corrélation expérimental r de ξ_1 et ξ_2 a été calculé et on a obtenu $r = -0,6423$; il diffère significativement de 0. La forme quadratique du premier membre de (1.1) devient

$$u_2(x) = 1,7022704 \left[\frac{(x_1 - 162,532)^2}{26\ 841\ 975 \times 10^{-10}} - 414,0104\,(x_1 - 162,532)\,(x_1 - 132,568) + \frac{(x_2 - 132,568)^2}{358\ 891 \times 10^{-8}} \right] \qquad (2.7)$$

Tableau 1

j_0	x_{1,j_0}	x_{2,j_0}	f_{j_0}
1	162,635	132,410	1
2	162,665	132,410	1
3	162,515	132,450	1
4	162,575	132,450	1
5	162,605	132,450	3
6	162,635	132,450	1
7	162,665	132,450	1
8	162,485	132,490	1
9	162,515	132,490	3
10	162,545	132,490	4
11	162,575	132,490	4
12	162,605	132,490	7
13	162,635	132,490	1
14	162,455	132,530	1
15	162,485	132,530	3
16	162,515	132,530	8
17	162,545	132,530	12
18	162,575	132,530	11
19	162,605	132,530	4
20	162,635	132,530	1
21	162,455	132,570	2
22	162,485	132,570	8
23	162,515	132,570	15
24	162,545	132,570	14
25	162,575	132,570	7
26	162,605	132,570	3
27	162,635	132,570	1
28	162,425	132,610	3
29	162,455	132,610	7
30	162,485	132,610	10
31	162,515	132,610	10
32	162,545	132,610	9
33	162,575	132,610	3
34	162,605	132,610	1
35	162,455	132,650	1
36	162,455	132,650	15
37	162,485	132,650	5
38	162,515	132,650	3
39	162,545	132,650	2
40	162,575	132,650	1
41	162,395	132,690	1
42	162,425	132,690	4
43	162,455	132,690	2
44	162,485	132,690	1
45	162,515	132,690	1
46	162,395	132,730	1
47	162,425	132,730	1

Considérons maintenant un autre échantillon d'effectif $n_1 = 43$ concernant le vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi}' = (\xi_1, \xi_2)$. Les valeurs ont été insérées dans le tableau 2, dans l'ordre de la fabrication. De la 4ème colonne de ce tableau il résulte que la médiane expérimentale de la variable aléatoire

$$\zeta = u_2(\boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{t})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{t})$$

est $z_{(43)} = 1,309172$.

Tableau 2

j_1	x_{1,j_1}	x_{2,j_1}	$u_2(\mathbf{x}_{j_1})$	Itérations
1	162,510	132,560	0,461340	a
2	162,570	132,500	1,287892	a
3	162,570	132,440	5,258978	b
4	162,510	132,560	0,461340	a
5	162,550	132,590	0,714126	a
6	162,550	132,530	0,544512	a
7	162,500	132,620	0,759232	a
8	162,480	132,550	2,528158	b
9	162,520	132,600	0,306392	a
10	162,551	132,510	0,958066	a
11	162,540	132,540	0,254584	a
12	162,610	132,570	0,565546	a
13	162,500	132,620	0,759232	a
14	162,510	132,520	2,143988	b
15	162,590	132,590	3,262228	b
16	162,530	132,580	0,053924	a
17	162,520	132,600	0,306392	a
18	162,590	132,470	2,682844	b
19	162,540	132,510	1,309172	a
20	162,510	132,560	0,461340	a
21	162,500	132,600	0,413428	a
22	162,580	132,620	4,502776	b
23	162,590	132,530	1,401194	b
24	162,630	132,420	3,868334	b
25	162,340	132,540	0,254584	a
26	162,460	132,570	3,188014	b
27	162,510	132,560	0,461340	a
28	162,570	132,480	2,232136	b
29	162,600	132,500	1,866886	b
30	162,620	132,510	2,909618	b
31	162,610	132,540	2,691036	b
32	162,510	132,500	3,554490	b
33	162,550	132,580	0,426004	a
34	162,440	132,660	4,573884	b
35	162,500	132,510	3,553024	b
36	162,540	132,540	0,254584	a
37	162,470	132,530	4,919298	b
38	162,500	132,600	0,413428	a
39	162,590	132,540	1,360726	b
40	162,610	132,560	3,448954	b
41	162,510	132,520	2,142988	b
42	162,480	132,560	2,038364	b
43	162,580	132,590	1,280738	a

La 5ème colonne du tableau 2 contient les itérations par rapport à la médiane expérimentale $z_{(43)}$, symbolisées par les lettres a et b ; on inscrit a ou b suivant que $u_2(x_{j_1}) \leqslant z_{(43)}$ ou $u(x_{j_1}) > z_{(43)}$, $1 \leqslant j_1 \leqslant 43$, ces valeurs étant calculées à l'aide de (2.7). D'après Dunin-Barkowski et Smirnov (1955), nous savons que les prélèvements ont été effectués au hasard si

$$R > R_{1-\alpha} , \quad R_{1-\alpha} = \frac{1}{2}(n_1 + 1 - u\sqrt{n_1 - 1})$$

ou

$$K < K_{1-\alpha} , \quad K_{1-\alpha} = \frac{\log\left(-\frac{n_1}{\log(1-\alpha)}\right)}{\log 2} - 1 ,$$

R et K ayant été définies au paragraphe 1.1.2, α étant le risque de 1ère espèce donné et u le quantile α supérieur d'une variable aléatoire normale N(0, 1). Pour $\alpha = 0,05$ on a $u = 1,96$. Du tableau 2 nous déduisons $R = 21$ et $K = 5$. Pour $\alpha = 0,05$ nous avons $R_{1-\alpha} = 15,65$ et $K_{1-\alpha} = 8,7$, d'où nous concluons que les prélèvements ont été effectués au hasard.

Pour tester la normalité nous supposons l'échantillon initial d'effectif $n_2 = 200$ et nous tenons compte des résultats du § 1.1.1, et des données du tableau 1. On a choisi $v = 11$, $\theta_s = s\theta$, $\theta = 0,8$, $1 \leqslant s \leqslant 11$ et

$$p_1 = 1 - e^{-\frac{\theta}{2}},$$

$$p_s = e^{-\frac{(s-1)\theta}{2}} - e^{-\frac{s\theta}{2}}, \quad 2 \leq s \leq 10,$$

$$p_{11} = e^{-\frac{10\theta}{2}}. \tag{2.8}$$

Le tableau 3 nous fournit la valeur de χ^2 donnée par (1.4).

Tableau 3

p_s	ν_s	n_2p_s	$\lvert\nu_s - n_2p_s\rvert$	$(\nu_s - n_2p_s)^2$	$\frac{(\nu_s - n_2p_s)^2}{n_2p_s}$
0,3297	62	65,94	3,94	15,5236	0,23542
0,2210	42	44,20	4,20	17,6400	0,39909
0,1482	34	29,64	4,36	19,0096	0,64130
0,0992	15	19,84	4,84	23,4256	1,18072
0,0664	15	13,28	1,72	2,9584	0,22277
0,0446	12	9,92	2,08	4,3264	0,43613
0,0299	7	5,98	1,02	1,0404	0,17369
0,0200	3	4,00	1,00	1,0000	0 25000
0,0135	7	2,70	4,30	18,4900	0,84815
0,0090	1	1,80	0,80	0,6400	0,35555
0,0183	2	3,66	1,66	2,7556	0,75289
	$200 = n_2$				$\chi^2 = 11,49581$

2

Supposons que $\mathbf{m}$ et Σ sont connues. La 1ère colonne contient les probabilités p_s, $1 \leqslant s \leqslant 11$, calculées d'après les relations (2.8). La 2ème colonne contient les fréquences ν_s, $1 \leqslant s \leqslant 11$, calculées à l'aide du premier échantillon d'effectif $n_2 = 200$, en utilisant les données du tableau 1. Les autres colonnes du tableau 3 nous conduisent à la valeur $\chi^2 = 11,496$. Pour $\alpha = 0,05$ on a $\chi^2_{0,95}(10) = 18,3$. Comme $\chi^2 < \chi^2_{0,95}(10)$ nous acceptons l'hypothèse statistique que ξ est un vecteur aléatoire normal.

Passons maintenant aux différentes méthodes de contrôle statistique de la qualité en cours de fabrication.

La méthode de la moyenne - Si la matrice de covariance Σ est connue, nous utilisons pour contrôle de la tendance centrale le paramètre (2.1) avec $n_4 = 5$, et les limites de contrôle sont $L_i = 0$ et $L_s = \chi^2_{0,95}(2) = 5,99$ pour $\alpha = 0,05$.

Etant donnée la valeur du paramètre de non centralité $\delta = 3$[1], on prend pour approximation (voir Scheffé (1958)) de la variable aléatoire non centrée $\chi'^2(h\ ;\delta)$ la variable aléatoire centrée $\chi^2(h)$ telle que

$$\chi'^2(h\ ;\delta) = c\ \chi^2(\tilde{h}).$$

Pour déterminer les constantes c et h, nous utilisons les équations :

$$\begin{aligned} c\tilde{h} &= h + \delta^2 , \\ c^2\tilde{h} &= h + 2\,\delta^2, \end{aligned} \tag{2.9}$$

qui expriment l'égalité des espérances mathématiques et des variances. On obtient ainsi ($h = 2$, $\delta = 3$), $c = 1,82$ et $\tilde{h} = 6$, donc

$$\beta = P(c\ \chi^2(\tilde{h}) < \chi^2_{0,95}(\tilde{h})) = P(\chi^2(6) < 3,92) \approx 0,23.$$

Si la matrice Σ n'est pas connue, on utilise pour contrôler la tendance centrale le paramètre (2.2) avec $n_4 = 5$ et les limites de contrôle sont $L_i = 0$ et $L_s = T^2_{0,95} = \frac{(n_4 - 1)h}{n_4 - h} \cdot F_{0,95}(2,3)$ pour $\alpha = 0,05$.

Pour déterminer le risque de 2ème espèce, on fait appel à la formule (2.3), après avoir approximé la variable aléatoire $F'(h,\ n_4 - h\ ;\ \delta)$ par une variable aléatoire $F(\tilde{h},\ n_4 - h)$ telle que

$$F'(h,\ n_4 - h\ ;\ \delta) = \frac{c\tilde{h}}{h}\ F(\tilde{h},\ n_4 - h),$$

où $\tilde{h}$ et c vérifient les équations (2.9). Pour $\delta = 3$, nous obtenons $c = 1,82$ et $h = 6$, donc

$$\begin{aligned} \beta &= P\left(\frac{c\tilde{h}}{h}\ F(\tilde{h},\ n_4 - h) < F_{0,95}(\tilde{h},\ n_4 - h)\right) = \\ &= P(F(6,3) < 1,7) \approx 0,33. \end{aligned}$$

----

(1) Parmi les valeurs admissibles du paramètre de non-centralité, sont. $\delta = 3, 4, 5, 6$, (voir Scheffé (1958), § 2.8).

La méthode de la variance généralisée - Pour $h = 2$, le paramètre $V = 2\ \tilde{V}^{1/2}$ est une variable aléatoire $\chi^2(2n_4 - 4) = \chi^2(6)$, puisque nous avons pris $n_4 = 5$. Donc les limites de contrôle sont $L_i = 0$ et $L_s = \chi^2_{0,95}(6) = 12,592$ pour $\alpha = 0,05$. En tenant compte de (1.4), nous déduisons pour le risque de 2ème espèce β la valeur

$$\beta = P(\delta_0\, \chi^2(6) < \chi^2_{0,95}(6)) \approx 0,35$$

si $\delta_0 = 3$. Dans le cas $\alpha = 0,1$, on obtient $\beta = 0,26$.

La méthode de l'étendue - Nous allons illustrer la théorie seulement pour le paramètre R_θ défini par (2.5) avec $n_4 = 5$. Dans ce cas la fonction de répartition de R_θ est donnée par

$$F(x) = (1 - e^{-x/2})^4 .$$

Les limites de contrôle sont $L_i = 0$ et $L_s = x_{1-\alpha} = 8,7245$, où $x_{1-\alpha}$ est la solution de l'équation

$$F(x) = 1 - \alpha, \quad \alpha = 0,05.$$

Transposition de la méthode des calibres modifiés - L'équation de l'ellipse (?.6) devient pour $p_0 = 0,32$

$$634,18(x_1 - 162,55)^2 - 243(x_1 - 162,55)(x_2 - 132,55) + 443,55(x_2 - 132,55)^2 = 2,27866,$$

d'où résultent les équations des axes D_1 et D_2

$$D_1 : 1,19\ x_1 + x_2 - 325,88 = 0,$$
$$D_2 : 1,65\ x_1 - x_2 - 135,92 = 0.$$

En utilisant les tableaux 4 et 5 (calculés par nous (1966)), nous obtenons pour $n_4 = 5$ et $\alpha = 0,05$ les limites de contrôle pour φ : $L_i = 0$ et $L_s = 2$ et pour ψ : $L_i = 0$ et $L_s = 3$.

2.2 - Plans d'échantillonnage optimaux

2.2.1 - Considérations générales

L'optique des plans d'échantillonnage optimaux est différente de celle adoptée dans les méthodes de contrôle considérées plus haut. Tandis que dans ces méthodes l'effectif de l'échantillon n et le risque de 1ère (2ème) espèce α (β) sont donnés, d'où résultent les limites de contrôle et le risque de 2ème (1ère) espèce β (α), dans ce qui suit nous supposons données les pertes impliquées par les pièces mauvaises ainsi que les coûts de contrôle par pièce, et nous chercherons à déterminer un plan d'échantillonnage optimal, c'est-à-dire un effectif n optimal, qui minimise les pertes. Ce plan résulte du principe du minimax (voir van der Waerden (1960), Stange (1964), Penkov et Theodorescu (1966) et Theodorescu (1968)).

Le problème ainsi abordé présente l'intérêt pas seulement pour le contrôle en cours de fabrication mais aussi pour le contrôle final quand celui-ci concerne des caractères mesurables.

Tableau 4

Valeurs de $p = P(\varphi = x)$ pour $h = 2$

$n_4 = 5$	$p_0 = 0,48$	$p_0 = 0,46$	$p_0 = 0,44$	$p_0 = 0,40$
	$\theta(p_0) = 1,46774$	$\theta(p_0) = 1,55284$	$\theta(p_0) = 1,64176$	$\theta(p_0) = 1,83238$
$\varphi = x$	p	p	p	p
0	0,6153	0,6046	0,5930	0,5075
1	0,1546	0,1458	0,1370	0,1193
2	0,0219	0,0196	0,0173	0,0137
3	0,0017	0,0013	0,0011	0,0008
4	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$n_4 = 5$	$p_0 = 0,36$	$p_0 = 0,32$	$p_0 = 0,28$	$p_0 = 0,24$
	$\theta(p_0) = 2,04310$	$\theta(p_0) = 2,27866$	$\theta(p_0) = 2,54574$	$\theta(p_0) = 2,85402$
$\varphi = x$	p	p	p	p
0	0,5383	0,5049	0,4666	0,4229
1	0,1018	0,0849	0,0681	0,0529
2	0,0103	0,0075	0,0053	0,0034
3	0,0005	0,0003	0,0002	0,0001
4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$n_4 = 6$	$p_0 = 0,48$	$p_0 = 0,46$	$p_0 = 0,44$	$p_0 = 0,40$
	$\theta(p_0) = 1,46774$	$\theta(p_0) = 1,55284$	$\theta(p_0) = 1,64176$	$\theta(p_0) = 1,83238$
$\varphi = x$	p	p	p	p
0	0,6523	0,6426	0,6324	0,6092
1	0,1939	0,1840	0,1740	0,1536
2	0,0353	0,0320	0,0289	0,0230
3	0,0038	0,0033	0,0029	0,0020
4	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tableau 4 (suite)

$n_4 = 6$	$p_0 = 0,36$	$p_0 = 0,32$	$p_0 = 0,28$	$p_0 = 0,24$
	$\theta(p_0) = 1,46774$	$\theta(p_0) = 2,04310$	$\theta(p_0) = 2,54740$	$\theta(p_0) = 1,85402$
$\varphi = x$	p	p	p	p
0	0,5822	0,5505	0,5134	0,4700
1	0,1330	0,1123	0,0919	0,0723
2	0,0178	0,0132	0,0093	0,0063
3	0,0014	0,0009	0,0005	0,0033
4	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$n_4 = 7$	$p_0 = 0,48$	$p_0 = 0,36$	$p_0 = 0,28$	$p_0 = 0,24$
	$\theta(p_0) = 1,46774$	$\theta(p_0) = 2,04310$	$\theta(p_0) = 2,54575$	$\theta(p_0) = 1,85402$
$\varphi = x$	p	p	p	p
0	0,6418	0,6169	0,5522	0,5097
1	0,1861	0,1630	0,1156	0,0921
2	0,0340	0,0267	0,0145	0,0098
3	0,0040	0,0028	0,0011	0,0006
4	0,0003	0,0002	0,0000	0,0000
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$n_4 = 8$	$p_0 = 0,48$	$p_0 = 0,46$	$p_0 = 0,44$	$p_0 = 0,40$
	$\theta(p_0) = 1,46774$	$\theta(p_0) = 1,55284$	$\theta(p_0) = 1,64176$	$\theta(p_0) = 1,83238$
$\varphi = x$	p	p	p	p
0	0,7033	0,6967	0,6870	0,6679
1	0,2625	0,2567	0,2401	0,2165
2	0,0669	0,0602	0,0563	0,0468
3	0,0116	0,0101	0,0089	0,0072
4	0,0014	0,0011	0,0010	0,0013
5	0,0001	0,0001	0,0001	0,0007
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$n_4 = 8$	$p_0 = 0,36$	$p_0 = 0,32$	$p_0 = 0,28$	$p_0 = 0,24$
	$\theta(p_0) = 2,04310$	$\theta(p_0) = 1,27866$	$\theta(p_0) = 2,54574$	$\theta(p_0) = 2,85402$
$\varphi = x$	p	p	p	p
0	0,6450	0,6175	0,5851	0,5435
1	0,1916	0,1657	0,1400	0,1128
2	0,0368	0,0282	0,0216	0,0148
3	0,0037	0,0031	0,0029	0,0017
4	0,0004	0,0002	0,0010	0,0006
5	0,0000	0,0000	0,0009	0,0005
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tableau 4 (suite)

$n_4 = 9$	$p_0 = 0,46$	$p_0 = 0,32$	$p_0 = 0,28$	$p_0 = 0,24$
	$\theta(p_0) = 1,55284$	$\theta(p_0) = 2,27866$	$\theta(p_0) = 2,54574$	$\theta(p_0) = 2,85402$
$\varphi = x$	p	p	p	p
0	0,7192	0,6112	0,6112	0,5723
1	0,2858	0,1619	0,1619	0,1321
2	0,0779	0,0276	0,0276	0,0193
3	0,0155	0,0031	0,0031	0,0018
4	0,0036	0,0002	0,0002	0,0001
5	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$n_4 = 10$	$p_0 = 0,44$	$p_0 = 0,36$	$p_0 = 0,28$	$p_0 = 0,20$
	$\theta(p_0) = 1,64176$	$\theta(p_0) = 2,04310$	$\theta(p_0) = 2,54574$	$\theta(p_0) = 2,21970$
$\varphi = x$	p	p	p	p
0	0,7230	0,6874	0,6342	0,5502
1	0,2954	0,2436	0,1840	0,1188
2	0,0866	0,0595	0,0353	0,0163
3	0,0183	0,0102	0,0046	0,0015
4	0,0028	0,0012	0,0004	0,0001
5	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tableau 5

Valeurs de $q = P(\psi = y)$ pour $h = 2$

$n_4 = 5$	$p_0 = 0,48$	$p_0 = 0,46$	$p_0 = 0,44$	$p_0 = 0,40$
	$\theta(p_0) = 1,46774$	$\theta(p_0) = 1,55284$	$\theta(p_0) = 1,64176$	$\theta(p_0) = 1,83238$
$\psi = y$	q	q	q	q
0	0,7464	0,7293	0,7113	0,6723
1	0,3461	0,3250	0,3041	0,2627
2	0,0932	0,0855	0,0744	0,0579
3	0,0134	0,0114	0,0096	0,0067
4	0,0002	0,0006	0,0005	0,0003
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$n_4 = 5$	$p_0 = 0,36$	$p_0 = 0,32$	$p_0 = 0,28$	$p_0 = 0,24$
	$\theta(p_0) = 2,04310$	$\theta(p_0) = 2,27866$	$\theta(p_0) = 2,5474$	$\theta(p_0) = 2,85402$
$\psi = y$	q	q	q	q
0	0,6292	0,5818	0,5296	0,4723
1	0,2223	0,1835	0,1464	0,1125
2	0,0437	0,0318	0,0220	0,0143
3	0,0045	0,0029	0,0017	0,0009
4	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tableau 5 (suite)

$n_4 = 6$	$p_0 = 0,48$	$p_0 = 0,46$	$p_0 = 0,44$	$p_0 = 0,40$
	$\theta(p_0) = 1,46774$	$\theta(p_0) = 1,55284$	$\theta(p_0) = 1,64176$	$\theta(p_0) = 1,83238$
$\phi = y$	q	q	q	q
0	0,8073	0,7916	0,7748	0,7379
1	0,4422	0,4181	0,3937	0,3447
2	0,1539	0,1392	0,1250	0,0989
3	0,0325	0,0281	0,0239	0,0170
4	0,0038	0,0032	0,0025	0,0016
5	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$n_4 = 6$	$p_0 = 0,36$	$p_0 = 0,32$	$p_0 = 0,28$	$p_0 = 0,24$
	$\theta(p_0) = 2,04310$	$\theta(p_0) = 2,27866$	$\theta(p_0) = 2,54740$	$\theta(p_0) = 2,85402$
$\phi = y$	q	q	q	q
0	0,6960	0,6487	0,5954	0,5356
1	0,2956	0,2472	0,2002	0,1556
2	0,0758	0,0560	0,0394	0,0216
3	0,0115	0,0074	0,0045	0,0025
4	0,0009	0,0005	0,0003	0,0001
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$n_4 = 7$	$p_0 = 0,48$	$p_0 = 0,36$	$p_0 = 0,28$	$p_0 = 0,24$
	$\theta(p_0) = 1,46774$	$\theta(p_0) = 2,04310$	$\theta(p_0) = 2,54574$	$\theta(p_0) = 2,85402$
$\phi = y$	q	q	q	q
0	0,8536	0,7507	0,7049	0,5913
1	0,5299	0,3677	0,3114	0,2012
2	0,2232	0,1155	0,0866	0,0416
3	0,0618	0,0230	0,0152	0,0053
4	0,0107	0,0028	0,0016	0,0004
5	0,0002	0,0002	0,0001	0,0000
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$n_4 = 8$	$p_0 = 0,48$	$p_0 = 0,46$	$p_0 = 0,44$	$p_0 = 0,40$
	$\theta(p_0) = 1,46774$	$\theta(p_0) = 1,55284$	$\theta(p_0) = 1,64176$	$\theta(p_0) = 1,83238$
$\phi = y$	q	q	q	q
0	0,8887	0,8764	0,8630	0,8658
1	0,6075	0,5811	0,5339	0,5638
2	0,2967	0,2724	0,2487	0,2618
3	0,1004	0,0800	0,0765	0,0856
4	0,0299	0,0191	0,0158	0,0195
5	0,0033	0,0026	0,0021	0,0030
6	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003
7	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000

Tableau 5 (suite)

$n_4 = 8$	$p_0 = 0,36$	$p_0 = 0,32$	$p_0 = 0,28$	$p_0 = 0,24$
	$\theta(p_0) = 2,06310$	$\theta(p_0) = 2,27866$	$\theta(p_0) = 2,64574$	$\theta(p_0) = 2,85402$
$\phi = y$	q	q	q	q
0	0,7956	0,7521	0,7008	0,6404
1	0,4366	0,3744	0,3111	0,2481
2	0,1608	0,1226	0,0891	0,0609
3	0,0397	0,0267	0,0168	0,0098
4	0,0065	0,0038	0,0021	0,0011
5	0,0007	0,0003	0,0002	0,0001
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$n_4 = 9$	$p_0 = 0,46$	$p_0 = 0,32$	$p_0 = 0,24$
	$\theta(p_0) = 1,55284$	$\theta(p_0) = 2,27866$	$\theta(p_0) = 2,85420$
$\phi = y$	q	q	q
0	0,9154	0,7918	0,6835
1	0,6750	0,4349	0,2951
2	0,3713	0,1629	0,0843
3	0,1480	0,0420	0,0158
4	0,0420	0,0075	0,0020
5	0,0085	0,0009	0,0002
6	0,0010	0,0001	0,0000
7	0,0001	0,0000	

$n_4 = 10$	$p_0 = 0,44$	$p_0 = 0,36$	$p_0 = 0,28$	$p_0 = 0,20$
	$\theta(p_0) = 1,64176$	$\theta(p_0) = 2,06310$	$\theta(p_0) = 2,54575$	$\theta(p_0) = 3,21866$
$\phi = y$	q	q	q	q
0	0,9166	0,8626	0,7787	0,6513
1	0,6815	0,5609	0,4546	0,2639
2	0,3731	0,2629	0,1546	0,0702
3	0,1486	0,0884	0,0400	0,0128
4	0,0478	0,0214	0,0074	0,0016
5	0,0106	0,0037	0,0010	0,0001
6	0,0018	0,0004	0,0001	0,0000
7	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

2.2.2 - La fonction de perte

Considérons un lot de N pièces qui sont contrôlées à l'aide d'un échantillon d'effectif n. Si p est la proportion des pièces mauvaises dans le lot, nous prenons d'après van der Waerden (1960) et Stange (1964) la fonction de perte

$$L(p, n) = (Ap + F)\ W(p, n) + (Bp + E + F)\ (1 - W(p,n)) + nc ,$$

où

$$A = aN, \qquad B = bN, \qquad E = eN, \qquad F = fN,$$

a est la perte produite par chaque pièce mauvaise retournée, b la perte produite par chaque pièce mauvaise découverte à un contrôle à 100 % ($b < a$), c le prix du contrôle d'une pièce prélevée, e le prix du contrôle d'une pièce à un contrôle à 100 %, f le prix constant de contrôle pour chaque pièce et $W(p, n)$ l'efficacité.

Nous allons supposer que le point commun des droites

$$Ap + F = 0, \qquad Bp + E + F = 0$$

dans le plan (p, L) a l'abscisse $p_0 \in (0,1)$; évidemment,

$$p_0 = \frac{e}{a - b} \cdot \tag{2.10}$$

La fonction de perte $L(p, n)$ peut s'écrire aussi sous la forme

$$L(p, n) = L_{min}(p) + R(p, n) \, ,$$

où L_{min} est la perte minimale inévitable,

$$L_{min}(p) = \min(Ap + F, \; Bp + E + F)$$

et

$$R(p, n) = \begin{cases} (A - B)\,(p_0 - p_0)\,(1 - W(p, n)) + cn & \text{pour} \quad p \le p_0, \\ (A - B)\,(p - p_0)\,W(p, n) + cn & \text{pour} \quad p > p_0, \end{cases} \tag{2.11}$$

est le regret .

Nous remarquons que $L_{min}(p)$ ne dépend pas de n, donc pour obtenir la solution de perte minimale, il suffit de considérer le regret.

2.2.3 - Le plan $(\mathbf{x}, \mathbf{\Sigma})$

Soit la matrice de covariance $\mathbf{\Sigma}$ connue. Considérons le domaine ellipsoïdal

$$(\mathbf{x} - \mathbf{t})'\mathbf{\Sigma}^{-1}\,(\mathbf{x} - \mathbf{t}) \leqslant l$$

et choisissons l tel que ce domaine soit le plus grand de cette forme contenu dans l'intervalle de tolérance à h dimensions T. Une pièce sera mauvaise si le $\boldsymbol{\xi}$ correspondant vérifie la condition

$$(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{t})'\mathbf{\Sigma}^{-1}\,(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{t}) > l.$$

Il en résulte que la proportion des pièces mauvaises dans le lot est donnée par

$$p = P((\boldsymbol{\xi} - \mathbf{t})'\mathbf{\Sigma}^{-1}\,(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{t}) > l).$$

Tenant compte de ce que la grandeur

$$\theta^{\boldsymbol{\Sigma}} = (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{t})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{t})$$

est une variable aléatoire $\chi'^2(h\ ;\ \delta)$, nous en déduisons que

$$p = \mathbf{P}(\chi'^2(h\ ;\ \delta) > l) = 1 - H_{h;\delta}(l)\ ,$$

où $H_{h;\delta}$ est la fonction de répartition de $\chi'^2(h\ ;\ \delta)$; dans ce qui suit nous noterons h_1 la densité de répartition correspondant à $H^{(1)}_{h;\delta}$.

Considérons un échantillon $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ d'effectif n du $\boldsymbol{\xi}$ et soit

$$z^{\boldsymbol{\Sigma}} = n(\mathbf{x} - \mathbf{t})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{t}) + k\ ,$$

où k est une constante à déterminer. Si $z^{\boldsymbol{\Sigma}} \leqslant l$ nous acceptons le lot et si $z^{\boldsymbol{\Sigma}} > l$ nous le rejetons ; ce plan de contrôle sera appelé le plan $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Nous remarquons que $z^{\boldsymbol{\Sigma}} - k$ est une variable aléatoire $\chi'^2(h\ ;\ \sqrt{n}\ \delta)$, d'où il résulte que

$$W(p\ ,\ n) = H_{h;\sqrt{n}\delta}\ (l - k).$$

Soit maintenant u_0 la solution de l'équation

$$1 - H_{h;\delta}(u) = p_0\ ,$$

où p_0 est défini par (2.10). La probabilité d'accepter le lot correspondant à p_0 devient

$$W(u_0\ ,\ n) = W(p_0\ ,\ n)$$

en utilisant une notation évidente. Parce que pour $p\ = p$ il est indifférent d'accepter ou de rejeter le lot, nous posons (d'après Stange (1964))

$$W(p_0,\ n) = \frac{1}{2}$$

pour chaque n, d'où il résulte

$$H_{h;\sqrt{n}\delta}\ (u_0 - k) = \frac{1}{2}\ .$$

Donc

$$k = u_0 - H^{-1}_{h;\sqrt{n}\delta}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (2.12)$$

ici $k = k(n)$ est une fonction de n, tandis que pour $h = 1$, k ne dépend pas de n (voir Stange (1964).

----

(1) Pour $\delta = 0$, c'est-à-dire pour les variables aléatoires χ^2 centrées, nous omettons dans les notations le paramètre δ.

En prenant pour k l'expression (2.12), nous pouvons utiliser la grandeur z^{Σ} comme variable de contrôle. Pour déterminer le plan d'échantillonnage optimal, nous devons minimiser le regret R(p,n). Nous allons premièrement maximiser R(p,n) par rapport à p, puis nous minimiserons par rapport à n. Au lieu de p nous utiliserons la variable u, liée à p par la relation

$$p = 1 - H_{h;\,\delta}(u).$$

Donc

$$W(p,n) = W(u,n) = H_{h\,;\sqrt{n}\delta}(u - k)$$

D'après (2.11), nous obtenons

$$\frac{R(u,n) - cn}{A - B} = [H_{h;\delta}(u) - H_{h;\delta}(u)]\,[1 - H_{h\,;\sqrt{n}\delta}(u - k)] \qquad \text{pour } u > u_0,$$

$$\frac{R(u,n) - cn}{A - B} = [H_{h;\delta}(u) - H_{h;\delta}(u)]\,H_{h;\sqrt{n}\delta}(u - k) \qquad \text{pour } u < u_0.$$

nimisation par rapport à n, nous avons obtenu dans notre travail (1965)

$$n_* = \left[\frac{h}{\delta^2}\,\frac{x_* - 1}{2 - x_*}\right]^{(1)},$$

où x_* est, sous certaines conditions, l'abscisse du minimum de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{K + x}\left(1 - \frac{Kx}{K + x}\right) + \gamma\,\frac{x - 1}{2 - x}\ , \quad 1 < K < x < K' < 2,$$

et

$$c_1 = K = \frac{h + 2\,\delta^2}{h + \delta^2}\ , \quad c_2 = K' = \frac{h + 2N\,\delta^2}{h + N\,\delta^2},$$

$$\gamma = \frac{4c}{A - B}\,\frac{h_{h_2}(\beta)}{h_{h_1}(\alpha)}\,\frac{h}{\delta^2},$$

$$\alpha = \frac{u_0}{c_1}\ , \quad \beta = \frac{u_0 - k}{c_2}$$

Les quantités c_1, h_1 et c_1, h_1 résultent de l'approximation des variables aléatoires $\chi^2(h\,;\,\delta)$ et $\chi'^2(h\,;\,\sqrt{n}\delta)$ par des variables aléatoires $c_1\chi^2(h_1)$ et $c_2\chi^2(h_2)$.

2.2.4 - Le plan ($\bar{x}$, S)

Si la matrice de convariance Σ n'est pas connue, nous considérons le domaine ellipsoïdal

$$(x - t)'S\,(x - t) \leqslant l.$$

Comme pour le plan (x, Σ), nous introduisons la grandeur

$$z^S = n(\bar{x} - t)'S^{-1}(x - t) + k.$$

Nous sommes ici conduits aux variables F'(h,n-h;δ) et procédant comme pour le plan ($\bar{x}$, Σ), nous pouvons déterminer un plan d'échantillonnage optimal.

REFERENCES

ANDERSEN T.W. (1957) - Introduction to multivariate analysis. New-York.

CAVÉ R. (1961) - Le contrôle statistique des fabrications. Paris.

COWDEN D. J. (1957) - Statistical methods in quality control. Englewood Clifs.

CRAMÉR H. (1948) - Mathematical methods of statistics. Princeton.

DUNIN-BARKOVSKI I.V., SMIRNOV N.V. (1955) - Théorie des probabilités et statistique mathématique (en russe). Moscou.

MĂRGĂRITESCU E., OBREJA G., URSIANU E. (1968) - Un modèle d'analyse statistique multidimensionnelle (en roumain). Studii şi cercetări de Calcul economic şi cibernetică economică (sous presse).

PENKOV B., THEODORESCU R. (1966) - Über die spieltheoretische Behandlung von Prüfplänen. Metrika, 11, 128-126.

RANCU N., TÖVISSI L. (1963) - Statistique mathématique avec applications à la fabrication (en roumain). Bucarest.

SCHINDOWSKI E., SCHÜRZ O. (1965) - Statistische Qualitätskontrolle. Berlin.

SCHEFFÉ H. (1958) - The analysis of variance. New-York.

SIOTANI M. (1959) - The extreme value of the generalized distances of the individual points in the multivariate normal sample. Ann. Inst. Statist. Math., 10, 185-599.

(1960) - The extreme value of generalized distences and its applications. Bull. Intern. Statist. Inst., 38, 4, 591-599.

(1964) - Tolerance regions for a multivariate normal population. Ann. Inst. Statist. Math., 16, 125-154.

STANGE K. (1964) - Die Berechnung wirtschaftilcher Prüfpläne für messende Prüfung. Metrika, 8, 48-82.

THEODORESCU R. (1968) - Remarques sur les plans d'échantillonage optimaux. Rev. Statist. Appl., 16, 35-40.

THEODORESCU R., VĂDUVA I. (1965) - On multivariate optimal sampling inspection plans. Bull. Math. Soc. Sci. R.S. Roumanie, 9 (57), 235-245.

(1966) - Statistische Qualitätskontrolle bei mehreren gleichzeitigen Merkmalen, ein Analogon zur Kalibermethode mit verengten Grenzen. Math. Wirtschaft, 3, 159-175.

(1967 a) - Le contrôle statistique de la qualité à plusieurs caractères simultanés, la méthode de la moyenne et de la variance généralisée. Bull. Inst. Math. Acad. Bulgare, 9, 201-217.

(1967 b) - Statistische Qualitätskontrolle bei mehreren gleichzeitigen Merkmalen, die Spannweitemethode. Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, Math. Natur. Reihe, 16, 1, 105-110.

(1967 c) - Multivariate statistical quality control. Rev. Roumaine. Math. Pures Appl., 12, 237-265.

VĂDUVA I. (1967) - Sur la vérification de l'hypothèse de normalité multidimensionnelle (en roumain). Lucrările celei de a V-a Consfătuire ştiinţifică de statistică a DCS, 277-282.

van der WAERDEN B.L. (1960) - Sampling inspection as a minimum loss problem. Ann. Math. Statist., 31, 269-284.