Revue de statistique appliquée

Vladimir Klega

Optimisation de la disposition des réserves pour un système à fiabilité du type série

Revue de statistique appliquée, tome 19, nº 2 (1971), p. 67-75
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1971__19_2_67_0>

OPTIMISATION DE LA DISPOSITION DES RÉSERVES POUR UN SYSTÈME À FIABILITÉ DU TYPE SÉRIE

Vladimir KLEGA

Institut National de Recherches de Constructions Mécaniques Bechovice (Prague)

1 - INTRODUCTION

Considérons un système formé par des sous-systèmes d'éléments en série (système de base) et par des sous-systèmes de réserves de ces éléments (système de réserves) et un mode particulier de réparation pour ces éléments. L'introduction du système de réserves et du mode de réparation assure au système une fiabilité supérieure à celle du système de base. L'assurance d'une telle fiabilité pour le système de base est limitée par des impératifs techniques et économiques tels que poids, volume, prix du système entier, par les coûts du mode de réparation, etc... Ces notions conduisent à la construction d'une suite de modèles, à l'aide desquels le problème de l'optimisation de la réserve a été résolu.

Un groupe est représenté par les modèles décrits dans (L 1), (L 2), qui dépassent les limites imposées. On cherche alors un système de réserves qui, tenant compte de ces limites, rende maximale la fiabilité du système entier. L'autre groupe est représenté par les modèles décrits dans (L 3), (L 4), qui permettent de construire successivement l'ensemble des systèmes de réserves, dont chacun possède la propriété optimum suivante : un système de réserves quelconque, pour lequel la fiabilité du système entier est plus grande, répond moins bien aux impératifs techniques et économiques. Tout système de réserves ayant cette propriété s'appelle système substantiel de réserves. Il en résulte que la fiabilité du système entier atteint son maximum pour un système de réserves qui, avec les limites imposées, est un élément de l'ensemble des systèmes substantiels de réserves. Dans ce sens le modèle du second groupe est plus général, parce qu'il contient la solution associée au modèle du premier groupe.

Lors de la construction de l'ensemble des systèmes substantiels de réserves on peut poursuivre, au point de vue technique et économique, le développement de la situation d'après la puissance du système entier, réalisée successivement par l'addition d'autres réserves et compte tenu de l'augmentation de sa fiabilité. Un inconvénient de certaines méthodes, dont quelques-unes sont utilisées dans ce document, pour la construction de l'ensemble des systèmes substantiels de réserves, est que l'on n'obtient pas tous les éléments de l'ensemble, de sorte que l'on ne construit qu'un ensemble incomplet. Ainsi on obtient seulement un résultat approximatif, mais celui-ci est compensé par le fait que le procédé de calcul est plus simple. De plus, l'ensemble incomplet est généralement suffisant.

Dans cet article en généralise quelques résultats obtenus par Barlow (L 3) pour les modèles du second groupe, de sorte que l'optimisation des réserves peut être appliquée aussi à d'autres systèmes. De plus on peut considérer le mode de réparation.

2 - DISPOSITION DES RESERVES

Considérons un système, qui représente le système de base comprenant k éléments en série et un système de n_i réserves pour le $i^{\text{ème}}$ élément $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Le système est déterminé par le vecteur

$$n = (n_1, n_2, \ldots, n_k),$$

que nous allons appeler disposition des réserves. Le vecteur $n = (0, 0, \ldots, 0)$ correspond au système de base.

La fiabilité du système est désignée par $R(n)$. Si pour la réserve i on dépense c_{ij}, le nombre des coûts c_{ij} étant s, la somme :

$$c_j(n) = \sum_{i=1}^{k} c_{ij}\, n_i, \qquad j = (1, 2, \ldots, s)$$

donne les coûts du $j^{\text{ème}}$ type de réserves. Dans la notion de coûts nous allons inclure tous les paramètres techniques et économiques considérés. La disposition optimum des réserves est définie de la manière suivante.

Définition

La disposition des réserves n^* est dite substantielle dans le cas où

$$R(n) > R(n^*) \Longrightarrow c\ (n) > c\ (n^*) \text{ est vraie quel que soit } j,$$

ou

$$R(n) = R(n^*) \Longrightarrow c\ (n) = c\ (n^*) \text{ est vraie quel que soit } j.$$

En d'autres termes, la disposition des réserves est substantielle dans le cas où une disposition quelconque augmentant ou conservant la fiabilité du système augmente ou conserve les coûts de toutes les réserves.

Le but de ce document est de déterminer les éléments de l'ensemble des systèmes substantiels de réserves. En construisant cet ensemble, d'une part on réduit le nombre des systèmes de réserves, qu'il faut considérer pour prendre une décision, d'autre part on peut prendre une décision optimum de la façon suivante : la disposition de réserves au coût minimum peut être choisie à partir d'une fiabilité donnée (ou, ce qui est équivalent, une disposition à la fiabilité maximum du système peut être choisie à partir de coût de réserves donné). Par la suite, nous considérerons deux méthodes, à l'aide desquelles nous construirons l'ensemble qui peut être incomplet des dispositions substantielles de réserves, ces méthodes étant valables d'une manière générale.

3 - CONSTRUCTION DE L'ENSEMBLE DES DISPOSITIONS SUBSTANTIELLES DE RESERVES

3.1 - Première méthode

Supposons qu'il existe une fonction monotone de la fiabilité du système $R(n)$:

$$G[R(n)] = K_1 + K_2 \sum_{i=1}^{k} U_i(n_i) , \qquad (1)$$

où K_1, K_2 sont des constantes. La fonction U_i ne dépend que du nombre de réserves du $i^{\text{ème}}$ élément du système de base (et par exemple du mode de réparation). La disposition des réserves va être obtenue successivement à partir du système $(0 , 0 , \dots , 0)$ et chaque système suivant sera obtenu par addition d'un élément. Si l'on aboutit ainsi au système n, on ajoute au système une unité du $i_0^{\text{ème}}$ élément et on obtient la disposition

$$n_0 = (n_1 , n_2 , \dots , n_{i_0 - 1} , n_{i_0} + 1 , n_{i_0 + 1} , \dots , n_k)$$

Dans ce cas, l'expression

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{s} a_j c_{ij}} [U_i(n_i + 1) - U_i(n_i)] \operatorname{sgn} G^{(1)} \qquad (2)$$

atteint son maximum pour $i = i_0$. Si l'expression (2) atteint son maximum pour plusieurs indices i, on choisira pour système n' celui qui est le plus petit.

Ce procédé sera réalisé avec un vecteur $a = (a_1 , a_2 , \dots , a_s)$, puis avec un autre vecteur de façon à épuiser tous les vecteurs $a \in A$, où A représente l'ensemble des vecteurs qui satisfont aux conditions

$$\sum_{j=1}^{s} a_j = 1 , a_j > 0 \qquad (j = 1 , 2 , \dots , s)$$

(L'ensemble A est de toute évidence convexe, et pour cette raison a est appelé par Barlow (L 3) vecteur convexe).

Par répétition du procédé pour un vecteur de poids donné, vecteur qui ne diffère pas trop du vecteur déjà appliqué, on n'obtient généralement pas d'autres dispositions substantielles des réserves. Pour cette raison nous allons, dans le calcul pratique, choisir par exemple un incrément quelconque $0 < \Delta \leqslant 1$ de telle sorte que $\frac{1}{\Delta}$ représente un nombre entier et nous allons répéter le procédé pour les vecteurs

$$a = (r_1\Delta , r_2\Delta , \dots , r_s\Delta) ,$$

où

$$r = 0 , 1 , 2 , \dots , \frac{1}{\Delta} , \sum_{j=1}^{s} r_j = \frac{1}{\Delta}$$

Dans cette première méthode, l'idée est basée sur l'addition d'une réserve au système telle que l'incrément d'une certaine fonction de fiabilité du système sur les coûts des réserves est maximum (on ne considérera qu'un seul genre de coût). La fonction de fiabilité possède une propriété telle que du fait de la réserve, par exemple d'indice $i = i_0$, son incrément ne dépende que de l'incrément de la fonction $U_{i_0}(n_{i_0})$.

----

(1) sgn $G = 1$ ou -1, avec une fonction G croissante ou décroissante.

Théorème 1

Si la fonction G est croissante (décroissante), la fonction $U_i(n_i)$ croissante et concave (décroissante et convexe) pour tous les i, K_1, K_2, ($K_2 > 0$) constants, et si la relation (1) est vérifiée, après chaque disposition des réserves n, construite par la première méthode, le système de réserves est substantiel.

Démonstration

Soit le système de réserves n^* construit selon la première méthode et pour un certain vecteur a. Soit n_0^* la disposition, que l'on va obtenir dans le dernier cas par l'addition d'une unité à la réserve du $i^{ème}$ élément, de sorte que la disposition n_0^* soit la suivante :

$$n_0^* = (n_1^*, n_2^*, \ldots, n_{i_0-1}^*, n_{i_0}^* + 1, n_{i_0+1}^*, \ldots, n_k^*) .$$

Soit n un système tel que $R(n) > R(n^*)$.

Désignons par U_1 et U_2 l'ensemble des indices i, pour lesquels respectivement $n_i > n_i^*$ et $n_i < n_i^*$, et considérons par exemple le cas où G est une fonction décroissante. Il résulte successivement des relations (1) et (3) :

$$\sum_{i=1}^{k} U_i(n_i^*) - \sum_{i=1}^{k} U_i(n_i) > 0$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} U_i(n_i^*) - \sum_{i=1}^{k} U_i(n) &= \sum_{i \in \upsilon_1} [U_i(n_i^*) - U_i(n_i)] - \sum_{i \in \upsilon_2} [U_i(n_i) - U_i(n_i^*)] = \\
&= \sum_{i \in \upsilon_1} \sum_{r=1}^{n_i - n_i^*} [U_i(n_i^* + r - 1) - U_i(n_i^* + r)] - \\
&- \sum_{i \in \upsilon_2} \sum^{n_i - n_i^*} [U_i(n_i^* - r - 1) - U_i(n_i^* - r)] \leq \\
&\leq \sum_{i \in \upsilon_1} (n_i - n_i^*) [U_i(n_i^*) - U_i(n_i^* + 1)] - \\
&- \sum_{i \in \upsilon_2} (n_i^* - n_i) [U_i(n_i^* - 1) - U_i(n_i^*)] = N
\end{aligned} \tag{4}$$

où la dernière inégalité résulte du fait que $U_i(n_i^*)$ est une fonction décroissante et convexe. Dans le cas considéré l'expression (2) devient

$$V_i(n_i) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{s} a_j c_{ij}} [U_i(n_i) - U_i(n_i + 1)] \tag{5}$$

Pour assurer la suite du système n^* après la disposition n_0^* dans la première méthode, il faut satisfaire pour toutes les valeurs $i \neq i_0$ les inégalités

$$V_i(n_i^*) \leq V_{i_0}(n_{i_0}^* - 1) \tag{6}$$

et

$$V_i(n_i^* - 1) \geq V_{i_0}(n_{i_0}^* - 1) \tag{7}$$

Les relations (4) à (7) nous permettent d'écrire :

$$N \leq \sum_{i \in v_1} (n_i - n_i^*) V_{i_0}(n_{i_0}^* - 1) \sum_{j=1}^{s} a_j c_{ij} =$$

$$= V_{i_0}(n_{i_0}^* - 1) \left[\sum_{j=1}^{s} a_j \sum_{i=1}^{k} c_{ij} n_i - \sum_{j=1}^{s} a_j \sum_{i=1}^{k} c_{ij} n_i^* \right], \qquad (8)$$

Puisque $V_{i_0}(n_{i_0}^* - 1) > 0$, on obtient $N > 0$. L'expression (8) s'écrit alors :

$$\sum_{j=1}^{s} a_j c_j(n) - \sum_{j=1}^{s} a_j c_j(n^*) > 0$$

de sorte que, pour certaines valeurs de j, l'inégalité $c_j(n) > c_j(n^*)$ est vérifiée. La première implication dans la définition de la disposition substantielle est donc satisfaite.

Soit n une disposition, telle que l'inégalité $R(n) = R(n^*)$ soit vraie. En conséquence on obtient de la même manière l'inégalité :

$$\sum_{j=1}^{s} a_j c_j(n) - \sum_{j=1}^{s} a_j c_j(n^*) \geqslant 0 \qquad (9)$$

l'égalité peut exister seulement dans le cas, où $c_j(n) > c_j(n^*)$ pour quelques valeurs de j, dans le cas où $c_j(n) = c_j(n^*)$ pour toutes les valeurs de j, de sorte que la deuxième implication de la définition est aussi satisfaite. Le même résultat serait facilement obtenu dans le cas où G est une fonction croissante. Il en résulte que la disposition des réserves n^* est substantielle.

3.2 - Seconde méthode

L'idée de la seconde méthode est basée sur le fait que la disposition des réserves atteint son optimum dans le cas où les incréments d'une fonction de fiabilité du système par unité d'une combinaison linéaire des coûts des réserves sont identiques (avec une limitation sur le nombre discret des réserves) pour tous les éléments en série. D'une façon plus exacte, on considère un vecteur de composantes constantes $b = (b_1, b_2, \ldots, b_s)$, avec $b_j \geq 0$ (les b_j n'étant pas tous nuls) et on suppose l'existence de la relation (1). On détermine $n_i(b)$ pour tous les $i = 1, 2, \ldots, k$ comme le plus petit nombre entier m, qui satisfait l'inégalité

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{s} b_j c_{ij}} [U_i(n_i + 1) - U_i(n_i)] \operatorname{sgn} G^{(1)} < 1, \qquad (10)$$

Le vecteur n(b) obtenu est considéré comme disposition optimum des réserves.

Théorème 2

Si toutes les conditions du théorème 1 sont satisfaites, après chaque disposition des réserves n(b), construite à l'aide de la seconde méthode, le système de réserves est substantiel.

----

(1) sgn G = 1 ou −1 quand G est une fonction croissante ou décroissante.

Démonstration

Soit n^* la disposition des réserves construite à l'aide de la seconde méthode pour un vecteur de composantes constantes b. Soit n une telle disposition, qui satisfait à l'inégalité

$$R(n) \geq R(n^*) \tag{11}$$

En reprenant la démonstration utilisée pour le premier théorème à partir de l'inégalité (3), dans le cas où G est une fonction décroissante, nous obtenons de toute évidence :

$$0 \leq \sum_{i \in v_1} (n_i - n_i^*) \, [U_i(n_i^*) - U_i(n_i^* + 1)] - \sum_{i \in v_2} (n_i^* - n_i) \, [U_i(n_i^* - 1) - U_i(n_i^*)] \leq$$

$$\leqslant \sum_{i \in v_1} (n_i - n_i^*) \sum_{j=1}^{s} b_j \, c_{ij} - \sum_{i \in v_2} (n_i^* - n_i) \sum_{j=1}^{s} b_j \, c_{ij}$$

où la dernière inégalité résulte de l'expression (10) et de la définition des quantités $n_i^*(b)$. D'où on obtient l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{i=1}^{k} c_{ij} \, n_i - \sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{i=1}^{k} c_{ij} \, n_i^* > 0$$

de sorte que pour certaines valeurs de j, l'inégalité $c_j(n) > c_j(n^*)$ est vérifiée. Par rapport à l'inégalité (11) les deux implications de la définition de la disposition substantielle sont satisfaites. Le même résultat pourrait être facilement obtenu pour une fonction G croissante. La disposition des réserves n^* est donc substantielle.

On peut combiner convenablement les deux méthodes, surtout quand la disposition substantielle est cherchée en fonction de la fiabilité du système ou des coûts $(c_1, c_2, \ldots, c_s)$ dans un certain intervalle. On trouve tout d'abord à l'aide de la première méthode la disposition par tâtonnements, qui donne une valeur située à l'extrême gauche de l'intervalle ; ensuite on continue à l'aide de la seconde méthode jusqu'à ce que l'on obtienne la valeur située à l'extrême droite de l'intervalle.

4 - OPTIMISATION DES RESERVES D'UN SYSTEME A REDONDANCE DE SECOURS

Considérons un système, dont le système de base contient k[(1)] éléments, qui sont mis en série et dont le système de réserves est constitué de n éléments de secours pour chaque élément principal. Le régime de réparations des éléments est le suivant : le système est réparé par k dépanneurs, dont le

$i^{ème}$ effectue la réparation de tous les éléments du $i^{ème}$ genre. Lors d'une avarie du système, la réparation n'est effectuée que par le dépanneur de l'élément, dont l'avarie a causé la défaillance du système.

----

(1) $k > 1$.

On considère que le système fonctionne si les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Le temps de fonctionnement du $i^{ème}$ élément est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est :

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda_i t} \text{ pour } \lambda_i > 0 \text{ , } t \geq 0 \text{ ,}$$
$$= 0 \qquad \text{pour } t < 0 \text{ .}$$

(2) Le temps de réparation du $i^{ème}$ élément est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est :

$$F_2(t) = 1 - e^{-\mu_i t} \text{ pour } \mu_i > 0 \text{ , } t \geq 0 \text{ ,}$$
$$= 0 \qquad \text{pour } t < 0 \text{ .}$$

(3) Toutes les variables aléatoires sont indépendantes. Lorsque le système atteint un état d'équilibre, sa fiabilité est donnée d'après (L 5) par l'expression :

$$R(n) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i^{n_i+1}(1 - \rho_i)}{1 - \rho_i^{n_i+1}}} \tag{12}$$

où

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

On constate facilement que, pour le système considéré, l'ensemble des dispositions substantielles de réserves peut être réalisé. Posons :

$$G(x) = \frac{1}{x} \text{ , } x > 0 \text{ , } U_i(n_i) = \frac{\rho_i^{n+1}(1 - \rho_i)}{1 - \rho_i^{n_i+1}} \text{ , } K_1 = K_2 = 1. \tag{13}$$

Supposons que $\rho_i < 1$, ce qui est naturel puisque le taux de défaillance de l'élément est plus petit que le taux de réparation.

De plus supposons que :

$$\Delta \, U(n) < 0 \tag{14}$$

et que

$$\Delta^2 U(n) > 0 \tag{15}$$

A partir de la relation (14) on vérifie facilement que :

$$\rho - 1 < 0 \text{ ,}$$

----

(2) $i = 1, 2, \dots, k$.

et de la relation (15) que :

$$(1 - \rho)^2 (1 + \rho^{n+2}) > 0 ,$$

inégalités qui sont évidemment vérifiées pour $0 < \rho < 1$, de sorte que $U(n)$ est une fonction décroissante et convexe. Etant donné les relations (12) et (13), la fonction G est décroissante et la relation (1) est vérifiée, toutes les conditions des théorèmes 1 et 2 sont aussi satisfaites.

Si nous utilisons la seconde méthode, on peut simplifier la construction de $n_i(\lambda)$ à l'aide de l'inégalité (10) qui, dans le cas considéré, peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\rho^{n+1}(1 - \rho)}{1 - \rho^{n+1}} - \frac{\rho^{n+2}(1 - \rho)}{1 - \rho^{n+2}} < \sum_{j=1}^{s} b_j \, c_{ij} , \tag{16}$$

ou :

$$(1 - \rho)^2 \rho^{n+1} \frac{1}{(1 - \rho^{n+1})(1 - \rho^{n+2})} < \sum_{j=1}^{s} b_j \, c_{ij} .$$

Désignons par $g_1(n)$ la partie gauche de cette inégalité et posons $g_2(n) = (1 - \rho)^2 \rho^{n+1}$. Puisque pour $0 < \rho < 1, n \geq 0$, les inégalités $0 < (1 - \rho^{n+1}) < 1$ sont vérifiées, on obtient :

$$g_2(n) < g_1(n) \tag{17}$$

L'expression :

$$(1 - \rho)^2 \rho^{n+1} < \sum_{j=1}^{s} b_j \, c_{ij} \tag{18}$$

nous permet d'écrire :

$$n < d - 1 \tag{19}$$

avec :

$$d = \frac{\log \dfrac{\sum_{j=1}^{s} b_j \, c_{ij}}{(1 - \rho)^2}}{\log \rho} \tag{20}$$

Si $n_1 = n(\lambda)$, n_1 représente le plus petit nombre entier qui satisfait à l'inégalité (16). Soit n_2 le plus petit nombre entier qui satisfait à l'inégalité (18). Puisque la relation (17) est vraie et que les deux fonctions sont de toute évidence décroissantes, l'expression $n_1 \geq n_2$ est toujours vraie. De l'inégalité (19) il résulte que :

$$n_2 = [d] \tag{21}$$

n_2 peut être défini comme le nombre tel que $[d]$ soit le nombre entier le plus grand parmi les nombres D tels que $D \leq d$. Comme ρ est généralement proche de zéro, on obtient dans la plupart des cas $n_1 = n_2$.

A titre d'exemple, nous pouvons considérer un ordinateur comme un système formé d'un sous-ensemble de trois paires (i = 1 , 2 , 3) : l'entrée, l'unité centrale et la sortie, et par un sous-système de réserves de l'entrée et de la sortie. Le prix du système entier et le coût du régime des réparations sont des contraintes intéressantes. Si le régime des réparations est celui considéré au § 4, la fiabilité est donnée d'après (L 5) par

$$R(n) = \frac{1}{1 + \rho^2 + \sum\limits_{i=1,3} \dfrac{\rho_i^{n_i+1}(1-\rho_i)}{1-\rho_i^{n_i+1}}}$$

En utilisant les deux méthodes proposées nous trouverons facilement l'ensemble des dispositions substantielles des réserves compte tenu des deux contraintes ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

(L 1) KETTELLE - Least-cost allocation of reliability investment, Operation research, 10 (1962), 249-265.

(L 2) BELLMAN, DREYFUS - Dynamic programming and the reliability of multicomponent devices, Operation research, 6 (1958), 577-589.

(L 3) BARLOW, PROSCHAN - Mathematical theory of reliability, John Wiley, 1965.

(L 4) PROSCHAN - Optimal system supply, Naval research logistic quarterly, 7 (1960), 609-646.

(L 5) KLEGA - Sur un modèle stochastique de la fiabilité, (en tchèque : 0 jednom stochastickém modelu spolehlivosti) Aplikace matematiky, 11 (1966), 224-231.