

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. STIFKENS

## **Anamorphose linéaire de la courbe d'efficacité d'un plan d'échantillonnage simple, dans le contrôle par mesure**

*Revue de statistique appliquée*, tome 24, n° 4 (1976), p. 79-88

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1976\\_\\_24\\_4\\_79\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1976__24_4_79_0)

© Société française de statistique, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ANAMORPHOSE LINÉAIRE DE LA COURBE D'EFFICACITÉ D'UN PLAN D'ÉCHANTILLONNAGE SIMPLE, DANS LE CONTROLE PAR MESURE

J. STIFKENS

Ingénieur en Chef – Directeur des Ponts et Chaussées (Liège)

## 1 – INTRODUCTION

Le contrôle statistique de réception est suffisamment connu, de nos jours, pour qu'il ne soit nécessaire d'en réexposer les détails. Le lecteur intéressé pourra se référer, si besoin est, à l'excellent texte de la norme française AFNOR NF X06-021.

Dans la présente note, on se propose de montrer que l'on peut traduire facilement par une droite, une courbe d'efficacité d'un plan d'échantillonnage simple et de signaler ensuite les avantages de cette transformation.

Celle-ci fait appel à un diagramme dont les axes rectangulaires portent chacun une échelle fonctionnelle gaussienne (échelle fonctionnelle du papier gaussio-arithmétique utilisé pour le tracé d'une droite de Henry). Ce diagramme reproduit à la figure 3, sera appelé en abrégé, dans la suite "diagramme doublement gaussien". Il contient en plus, une horizontale d'ordonnée 50 % graduée en échelle métrique. Un transparent à faisceau de droites rayonnantes peut s'y superposer.

Dans le bulletin du Comité Européen du Béton n° 110 (mai 1975) était présenté semblable diagramme mais il restait limité à l'aspect qualitatif, aucune estimation du coefficient d'acceptation, ni de la taille de l'échantillon ne pouvait être déduite de la lecture du diagramme.

## 2 – THEORIE

### 2.1 – Courbe d'efficacité

Soit le cas où la variable mesurée  $X$  est distribuée en L.N de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$  connu.

On désignera par  $u_p$  le quantile de proportion  $p$ , autrement dit la valeur  $u_p$  de la variable réduite pour laquelle la fonction de répartition  $F(u_p)$  est égale à  $p$ .

A partir des 4 données :

$\alpha$  risque du fournisseur, associé à une proportion  $p_1$  de défectueux dans le lot ;  
 $\beta$  risque du client, associé à une proportion  $p_2$  de défectueux dans le lot ;

*Mots-clés* : Contrôle. Plan d'échantillonnage. Courbe d'efficacité.

On peut calculer :

1) la taille de l'échantillon à prélever

$$n = [(u_{1-\alpha} + u_{1-\beta}) / (u_{1-p_1} - u_{1-p_2})]^2 \quad (1)$$

2) Un coefficient  $k$ , correspondant à une condition de tolérance supérieure (ou inférieure) et défini par :

$$k = (u_{1-\beta} u_{1-p_1} + u_{1-\alpha} u_{1-p_2}) / (u_{1-\alpha} + u_{1-\beta}) \quad (2)$$

La probabilité  $P$  d'acceptation du lot, pour une proportion  $p$  vraie de défectueux s'écrit :

$$P_a = F [(u_{1-p} - k) \sqrt{n}] \quad (3)$$

expression où  $F$  est la fonction de répartition en L.N.

La relation (3) est l'équation de la courbe d'efficacité du plan d'échantillonnage correspondant aux 4 données. La courbe passe par les points

$$(p_1 ; 1 - \alpha) \text{ et } (p_2 ; \beta) \text{ (figure 1)}$$

Elle doit être tracée point par point sur un plan ( $p ; P_a$ )

## 2.2 – Anamorphose linéaire

En posant le 1<sup>er</sup> membre de (3) égal à une fonction de répartition  $F(Y)$  en L.N., on aura :

$$P = F(Y) = F [(u_{1-p} - k) \sqrt{n}] \quad (4)$$

et l'on en déduira

$$Y = -k \sqrt{n} + u_{1-p} \sqrt{n} \quad (5)$$

équation d'une droite dans un système d'axes ( $u_{1-p}$ ,  $Y$ ).

La figure 2 correspond à ces axes, l'axe des abscisses étant orienté positivement de la droite vers la gauche, pour les raisons pratiques qui suivront.

Les échelles des axes sont métriques.

La droite (5) y apparaît dans les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> quadrants ordinaires.

La pente est égale à  $\sqrt{n}$  et l'intercept sur l'axe horizontal est égal à  $k$ .

## 2.3 – Papier doublement gaussien

Aux échelles métriques du système d'axes ( $u_{1-p}$ ,  $Y$ ) on peut substituer des échelles fonctionnelles gaussiennes. Leur avantage est d'être graduées en %. Les 4 données précipitées se reportent sur ce nouveau système d'axes en 2 points A ( $p_1$ ,  $1 - \alpha$ ) et B ( $p_2$ ,  $\beta$ ). La droite AB est la droite d'efficacité.

La figure 3 correspond à ces résultats. Il s'agit de papier doublement gaussien avec les trois échelles suivantes :

1) échelle gaussienne horizontale inférieure en % où l'on reporte les pourcentages de défectueux.

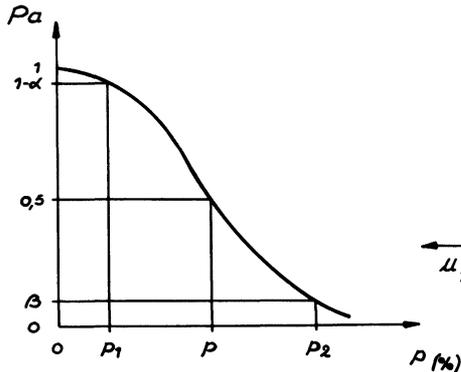


Fig. 1

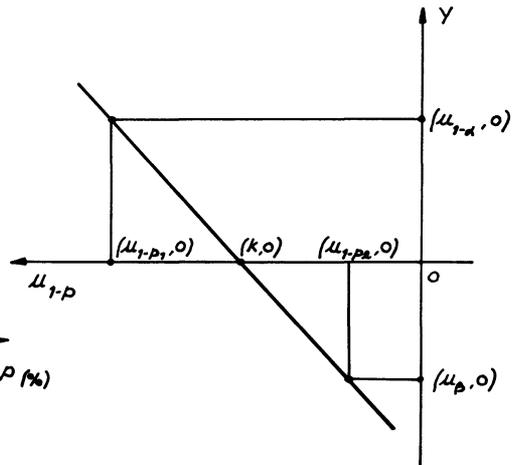


Fig. 2

2) échelle gaussienne verticale, à gauche en % des probabilités P d'acceptation que l'on utilise pour le report de  $(1 - \alpha)$  et  $\beta$

3) échelle métrique horizontale, d'ordonnée 50 %, où sont inscrites les valeurs de k positivement de la droite vers la gauche.

### 3 - APPLICATION

Soit les données de la page 32 de la norme AFNOR NF X 06-021.

$$p_1 = 0,5 \% ; \alpha = 0,05 \text{ soit } 1 - \alpha = 0,95$$

$$p_2 = 3 \% ; \beta = 0,10$$

On reporte sur le diagramme doublement gaussien (fig. 3) le point A (0,5 % ; 0,95) et le point B (3 % ; 0,10).

On joint AB. Cette droite est la droite d'efficacité.

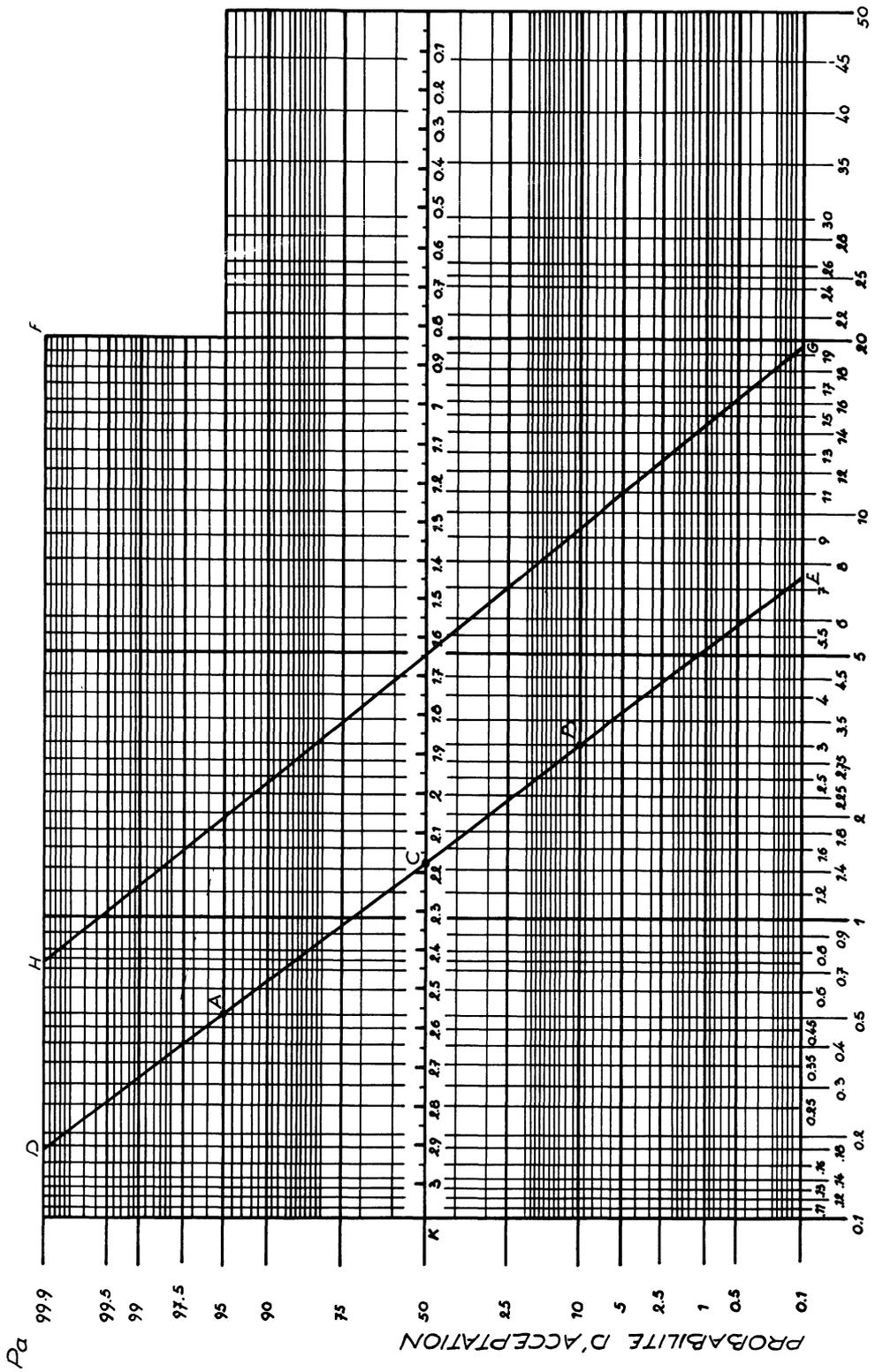
Elle coupe l'horizontale d'ordonnée 50 %, c'est-à-dire l'axe des k, en un point d'abscisse 2,185 d'où  $k = 2,185$ .

On peut également tracer un nomogramme de droites passant par la même origine et de pente  $\sqrt{n}$ , les unités des coordonnées X et Y de ce nomogramme étant, les mêmes que celles de la figure 3.

En utilisant ce nomogramme (fig. 4) comme transparent on peut obtenir par lecture directe la valeur de n (taille de l'échantillon) en procédant comme suit :

Sur la figure 3 on fait coïncider l'origine du transparent avec le point D et l'axe horizontal supérieur du transparent avec l'horizontale DF, on lit la valeur de n sur la droite du transparent qui coïncide le mieux avec la droite DE.

Dans l'exemple choisi on trouve  $n \approx 18$ .



DEFECTUEUX : p

Fig. 3

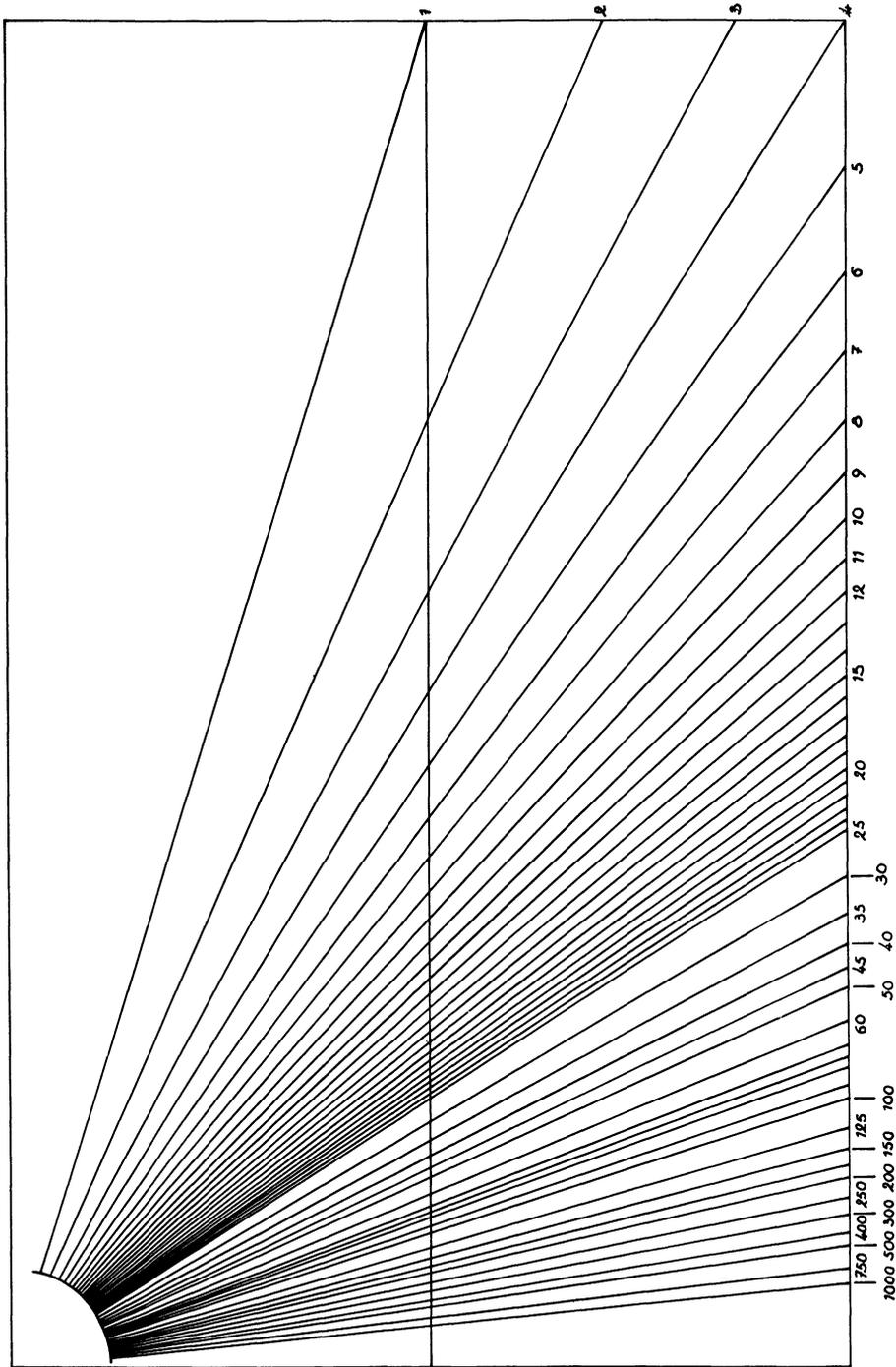


Fig. 4

D'autre part, si pour un échantillon de taille 18 on trouve que l'écart entre la moyenne de l'échantillon et la valeur garantie vaut 2,185 fois la valeur de l'écart type connu de la population, l'estimation du pourcentage de défectueux se déduit de la caractéristique de qualité : produit du coefficient  $k = (S - x)/\sigma$  par le facteur  $v = \sqrt{n/(n - 1)}$ . Cet indice de qualité est égal à  $u_p$  : quantile de proportion  $p$

$$u_p = 2,185 \times \sqrt{18/(18 - 1)} = 2,185 \times 1,029 = 2,25$$

$$\text{soit } p = 1,22 \%$$

à l'aplomb de cette valeur de  $p$  on lit sur la droite d'efficacité la probabilité d'acceptation du lot soit  $p_a \cong 62 \%$ .

*Remarque* : on peut envisager la multiplication graphique de  $k$  par le facteur  $v = \sqrt{n/(n - 1)}$  à l'aide d'un monogramme à droites rayonnantes cotées en "n" et dont l'origine coïncide avec l'origine de l'axe de  $k$  ; on élève à l'aplomb de  $k$  une verticale jusqu'à son intersection avec la droite "n" ; la verticale intercepte cette droite à la distance  $k \sqrt{n/(n - 1)}$  de l'origine, il suffit de rabattre cette longueur sur l'axe de  $k$  où l'on peut lire la valeur de  $p$ , estimation du pourcentage de défectueux, et en déduire la valeur de  $P_a$ .

#### 4 - CAS OU L'ECART TYPE $\sigma$ N'EST PAS CONNU (estimé par $s$ )

La procédure implique une série d'approximations successives. La première approximation introduite par JENNETT et WELCH, suppose que  $x + ks$  est normalement distribuée avec une moyenne

$$\mu + ks$$

et une variance :

$$\sigma^2 \{ 1/n + [k^2/2 (n - 1)] \}$$

En utilisant cette approximation, l'équation de la courbe d'efficacité devient

$$P_\alpha = (u_{1-p} - k) / \sqrt{1/n + k^2/2 (n - 1)} \quad (6)$$

La valeur de  $k$  est la même que celle fournie par la relation (2), mais la relation exprimant  $n$  est plus complexe.

$$[1/n + k^2/2 (n - 1)] = [(u_{1-p_1} - u_{1-p_2}) / (u_{1-\alpha} + u_{1-\beta})]^2 \quad (7)$$

En remplaçant  $(n - 1)$  par  $n$  et en résolvant par rapport à  $n$  on obtient :

$$n = (1 + k^2/2) [(u_{1-\alpha} + u_{1-\beta}) / (u_{1-p_1} - u_{1-p_2})]^2 \quad (8)$$

Cette simplification est exacte lorsque  $n$  est grand mais on constate qu'elle est assez bonne pour  $n = 5$  et qu'elle devient très bonne pour  $n \geq 15$ .

Pour tracer la droite d'efficacité, il suffira de tracer à partir du point ( $k$ , 50 %) une nouvelle droite, avec la pente corrigée.

Sur le diagramme tracé en considérant la variabilité de la population connue, on peut conserver les droites d'efficacité mais il faut modifier leur cotation de la taille d'échantillon en multipliant le nombre  $n$  par le coefficient  $(1 + k^2/2)$  ou  $k$  est la valeur propre à la droite d'efficacité considérée.

Lors d'un test de réception, on connaît la taille  $n$  de l'échantillon et l'on calcule la valeur de la caractéristique de qualité égale dans ce cas à la valeur de  $k$  ; il suffit d'entrer dans le tableau B5 de la NF X 06-023 avec cette valeur et de lire dans la colonne correspondant à la taille de l'échantillon l'estimation du pourcentage de défectueux.

#### 4.1 – Exemple

Les critères de réception des armatures pour béton armé selon la norme allemande DIN 488 fascicule 6 conduisent à la droite G H sur la figure 3

Cette droite exprime les conditions

$$X_{35} \geq x_0 + 1,65 s_{35}$$

$$\text{et } X_{15} \geq x_0 + 1,65 \sigma$$

qui sont statistiquement équivalentes, car

$$35 \cong 15 [1 + (1,65)^2 / 2]$$

## 5 – AVANTAGES

Cette méthode délivre du calcul des nombreux points de la courbe d'efficacité et assure une meilleure précision de lecture surtout pour les valeurs extrêmes de la probabilité d'acceptation, valeurs pour lesquelles dans le diagramme aux échelles métriques la courbe d'efficacité est asymptotique aux horizontales  $P_a = 0$  et  $P_a = 100$  rendant illusoire toute lecture précise.

La résolution des équations (1) et (2) se fait en traçant la droite d'efficacité.

Le tracé de la droite fait appel aux conditions imposées : les points tels que A et B (fig. 3).

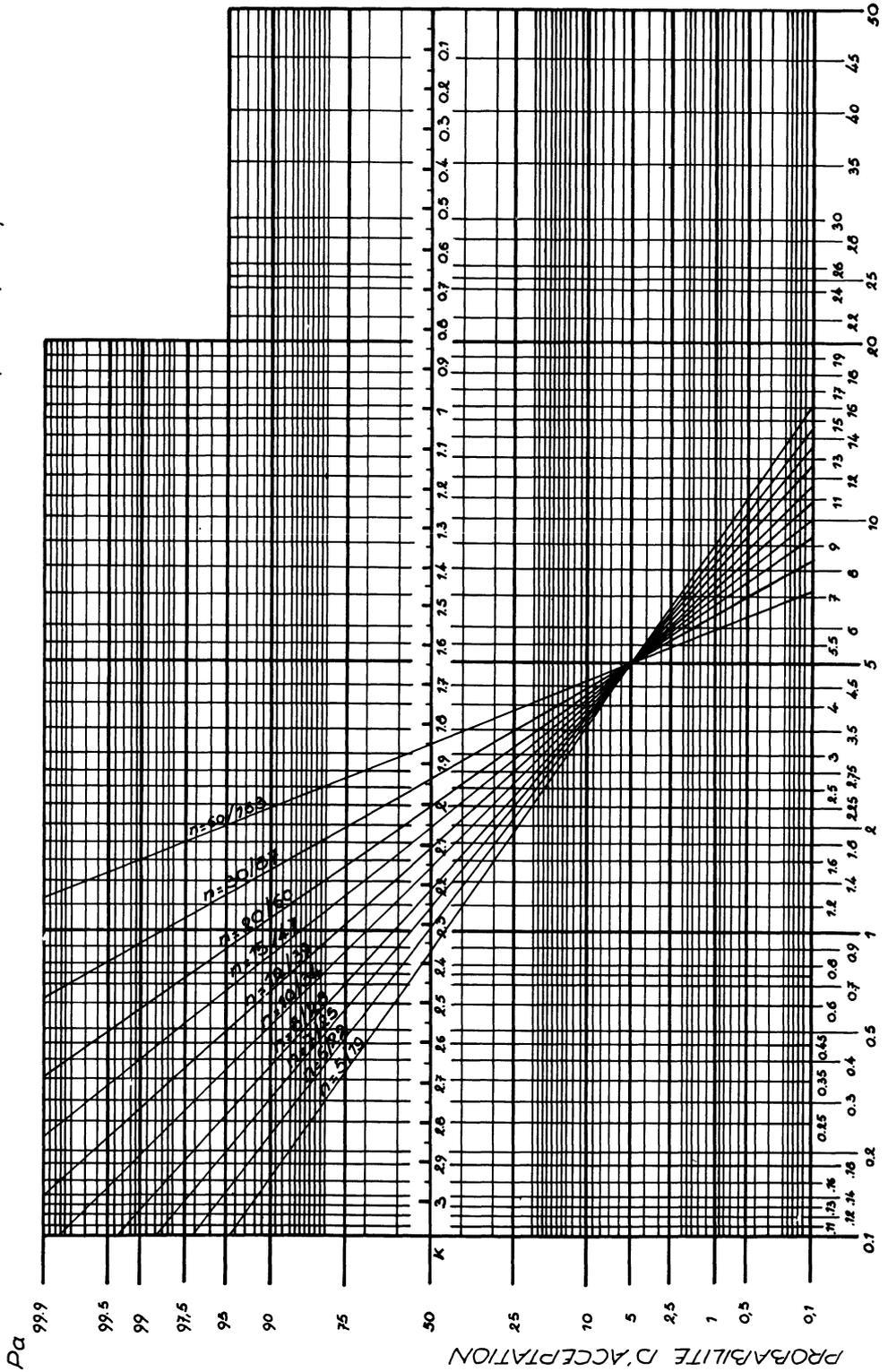
ou les points tels que A et C. ou B et C  
ou un des points A, C, B et la pente  $\sqrt{n}$ .

Les courbes d'efficacité des plans d'échantillonnage simples telles celles de la MIL STD 414 (dont la traduction fait l'objet de la NF X 06-023) ou de BOWKER et GOODE peuvent être tracées sans difficulté car elles sont caractérisées par  $k$  (point C) et  $n$  (taille de l'échantillon).

L'établissement de critère d'acceptation garantissant un risque imposé soit du client ou du fournisseur est aisé ; il suffit à l'aide du nomogramme de  $n$  de tracer à partir du point imposé un faisceau de droites, qui interceptent l'axe  $k$  aux valeurs correspondantes ; la précision du diagramme est suffisante pour assurer la lecture jusqu'à la deuxième décimale, précision habituellement utilisée pour ce coefficient.

DROITE D'EFFICACITÉ DES PLANS D'ÉCHANTILLONNAGE

où  $\beta = 5\%$  pour  $p = 5\%$



DEFECTUEUX : p

Fig. 5

Il faut ne pas oublier que la taille de l'échantillon est donnée sur le nomogramme de  $n$  (fig. 4) dans le cas où l'écart-type  $\sigma$  de la population est connu ; dans le cas où l'on doit se contenter de l'estimation  $s$  à partir de l'échantillon, il faut modifier la cotation des droites en multipliant le nombre  $n$  par le coefficient  $(1 + k^2/2)$  ; comme les droites ont chacune un coefficient  $k$  différent, il faut calculer la nouvelle taille d'échantillon propre à chaque droite.

### 5.1. Exemple

Droite d'efficacité des plans d'échantillonnage selon lesquels le client accepte un risque de 5 % pour une production contenant 5 % de défectueux (fig. 5). Les droites d'efficacité sont cotées en taille d'échantillon, le premier chiffre est celui dans le cas du  $\sigma$  connu déduit du nomogramme de la figure 4, le second lorsque l'écart type est estimé par  $s$ .

La justification de ce second nombre est reprise au tableau ci-dessous.

$n$	$k$	$n' = n (1 + k^2/2)$
5	2,38	19,17
6	2,32	22,10
7	2,27	24,98
8	2,23	27,83
10	2,17	33,44
12	2,12	38,96
15	2,07	47,12
20	2,01	60,51
30	1,95	86,76
60	1,86	163,48

### BIBLIOGRAPHIE

- (1) NF X 06-021 (juin 1967) – Contrôle statistique de réception.
- (2) NF X 06-022 (juin 1967) – Règles et tables d'échantillonnage pour les contrôles par attributs et par décompte du nombre de défauts (MIL STD 105D).
- (3) NF X 06-023 (juin 1967) – Règles et tables d'échantillonnage pour les contrôles par mesure des pourcentages de défectueux (MIL STD 414).
- (4) NF X 06-064 (mars 1971) – Estimation et tests statistiques – Tables statistiques et courbes d'efficacité.
- (5) ISO-DIS 3494 (Mars 1975) – Interprétation statistique des données – Efficacité des tests portant sur des moyennes et des variances.
- (6) JENNETT W.J. et WELCH B.L. – The control of Proportion Defective as Judged by a single Quality Characteristic Varying on a Continuous Scale" Supplement to the *Journal of the Royal Statistical Society* 1939, vol VI p. 80-88.

- (7) BOWKER A.H. et GOODE H.P. — “Sampling inspection by Variables”  
New-York — Mac Graw-Hill 1952.
- (8) VESSEREAU A. — Efficacité et Gestion des Cartes de Contrôle. *Revue de Statistique Appliquée* 1970 — Vol XVIII n°1 p.21 — 51.
- (9) STANGE K. — Détermination graphique de plans d’inspection par variable au moyen du papier à double échelle gaussienne. *Revue de Statistique Appliquée* 1962 — Vol X n°2 p.5-15.

*Addenda* — Au moment de corriger les épreuves, je prend connaissance de l’article de STANGE. Si la propriété mise en évidence est identique, la présente note se distingue essentiellement par la démonstration de cette propriété et par le mode de représentation. En effet l’échelle des  $k$  est placée au niveau de la probabilité d’acceptation de 50 % ce qui permet l’économie d’une ligne de rappel verticale, quant à l’estimation de la taille d’échantillon elle se réalise à l’aide d’un transparent portant un faisceau de droites rayonnantes, il dispense de la courbe auxiliaire  $1/2 \sqrt{1 + (k^2/2)}$ , du tracé de la représentation triangulaire pour  $n$  et d’une ligne de rappel horizontale. Le faisceau de droites rayonnantes est utilisable directement lorsque la variabilité est connue et moyennant un rapide calcul dans le cas de la variabilité estimée par  $s$ .

J.S.