

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. FAUCHON

G. HERBIN

Étude des puissances d'une variable aléatoire normale approximation des moments

Revue de statistique appliquée, tome 26, n° 1 (1978), p. 59-72

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1978__26_1_59_0

© Société française de statistique, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE DES PUISSANCES D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE NORMALE APPROXIMATION DES MOMENTS

J. FAUCHON et G. HERBIN

INSA, Centre de Mathématique, 69621 Villeurbanne cédex

RESUME

On montre que la loi suivie par la variable aléatoire $X = |Z|^q$ où $L(Z) = N(m, \sigma)$, peut s'exprimer selon une fonction de Bessel modifiée de seconde espèce et qu'elle peut-être approchée par une distribution Normale. Il en résulte une approximation des moments lorsque q est entier. Des graphes et des tableaux numériques sont présentés pour différentes valeurs de

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{\sigma} \right)^2$$

1. INTRODUCTION

On a montré [1], [2] que si n variables aléatoires indépendantes Z_α suivent des lois normales $N(m_\alpha, \sigma)$, la variable aléatoire définie par :

$$X = \left\{ \sum_{\alpha=1}^n Z_\alpha^2 \right\}^{1/\beta} + d \quad (1)$$

suit une loi notée $W(\beta, \eta, p, \lambda, d)$ dont la fonction densité de probabilité s'exprime $\forall x \geq d$, par :

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x-d}{\eta} \right)^{\beta p - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{x-d}{\eta} \right)^\beta \right\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k! \Gamma(p+k)} \left(\frac{x-d}{\eta} \right)^{\beta k} \quad (2)$$

où

$$\begin{aligned} \eta &= (2\sigma^2)^{1/\beta} \\ p &= n/2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{v_\alpha^2}$$

β est le paramètre de puissance, η celui de l'échelle, p celui de nombre, λ celui de décentrage et d celui de décalage.

$v_\alpha = \frac{\sigma}{m_\alpha}$ est le coefficient de variation de la variable aléatoire Z_α et

$\gamma(p) = \int_0^\infty e^{-u} u^{p-1} du$ est la fonction gamma

Ultérieurement, seront utilisées les fonctions gamma incomplètes :

$$\gamma_x(p) = \int_0^x e^{-u} u^{p-1} du \quad \text{et} \quad \gamma_{\underline{x}}(p) = \int_x^\infty e^{-u} u^{p-1} du$$

Par ailleurs, les moments non centrés m_r de la variable aléatoire $X' = X - d$, de loi $W(\beta, \eta, p, \lambda, 0)$ sont obtenus par :

$$m_r = e^{-\lambda} \eta^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \gamma(p+r/\beta+k)}{k! \gamma(p+k)} \quad (4)$$

Cette loi de probabilité susceptible de générer de nombreuses classes de variables aléatoires, est une double généralisation de la loi de Weibull usuelle $W(\beta, \eta, d) = W(\beta, \eta, 1, 0, d)$. Elle inclut également la loi gamma décentrée $\Gamma(a, p, \lambda)$.

$$\text{En effet } W\left(1, \eta = \frac{1}{a}, p, \lambda, 0\right) = \Gamma(a, p, \lambda).$$

Cette distribution est aussi une extension de la loi gamma généralisée présentée par Stacy et Mirham [3], [4].

Son intérêt, et partant, le sens des applications qui en découlent, apparaît lors de l'interprétation de la variable aléatoire X .

La relation de définition (1) montre que, $\forall p = n/2$, $X-d$ est l'élevation à la puissance $1/\beta$ de la somme des carrés de $2p$ variables aléatoires indépendantes normales de lois $N(m_\alpha, \sigma)$.

$$\text{Par exemple } W\left(4; \eta; \frac{3}{2}; \lambda; 0\right) \quad \text{induit } X = \sqrt[2]{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}$$

$$W\left(\frac{2}{3}, \eta, \frac{1}{2}, \lambda; 0\right) \quad \text{induit } X = |Z|^3$$

Il convient également de noter que pour m/σ grand, $\text{Prob}(Z < 0) \simeq 0$ et qu'alors $|Z|^q \simeq Z^q$. Cette situation se retrouve dans la plupart des problèmes concrets.

L'objet de la présente étude est de montrer que la fonction densité de probabilité de la variable aléatoire $X = |Z|^q$ avec $q = 2/\beta$, issue de $W(\beta, \eta, 1/2, \lambda, 0)$ peut s'exprimer selon une fonction de Bessel modifiée de seconde espèce.

L'intérêt de cette transformation réside en ce que la nouvelle formule ne contient plus de série. L'expression des moments non centrés m_r est établie lorsque q est entier.

On montre ensuite qu'une approximation peut-être retenue, cette approximation étant acceptable, même pour de faibles valeurs de λ . Ce dernier résultat est alors utilisé pour déterminer, selon une procédure simple, une formule approchée des moments de $X = |Z|^q$, toujours sous l'hypothèse $q \in \mathbb{N}$.

2. LOI DE $X = |Z|^q$ EN TERMES D'UNE FONCTION DE BESSEL

La variable aléatoire $X = |Z|^q = |Z^2|^{1/\beta}$ est générée par $W\left(\beta, \eta, \frac{1}{2}, \lambda, 0\right)$.

En identifiant, il vient depuis (1) :

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta/2-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta\right\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k! \gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta k} \quad (5)$$

Cette relation peut également s'écrire, compte tenu de (3), en fonction des caractéristiques m et σ de Z sous la forme :

$$f(x) = \frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}} x^{\beta/2-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^\beta + m^2)\right\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\left\{\frac{m}{2\sigma^2} x^{\beta/2}\right\}^2\right]^k}{k! \gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)} \quad (5')$$

Or on sait [5] que la seconde fonction de Bessel modifiée $I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}$ chz s'exprime par le développement en série ci-dessous :

$$I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{2} z^2\right]^k}{k! \prod_{j=1}^k (2j-1)} \right] \quad (6)$$

Comme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta k}}{k! \gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)} = \frac{1}{\gamma(1/2)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2)^k \lambda^k \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta k}}{k! \prod_{j=1}^k (2j-1)} \right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[1/2 \left\{2\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta/2}\right\}^2\right]^k}{k! \prod_{j=1}^k (2j-1)} \right]$$

nous obtenons, compte tenu de (6) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta k}}{k! \gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)} = \sqrt{\frac{z}{2}} I_{-1/2} \left[2\sqrt{\lambda} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta/2} \right]$$

Reportant dans (5), il en résulte la nouvelle forme de la densité de probabilité de la variable aléatoire X :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta/2-1} \cdot \exp\left\{-\left[\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta + \lambda\right]\right\} \text{ch} \left(2\sqrt{\lambda} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta/2}\right) \quad (7)$$

relation qui, selon m et σ devient :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} x^{\beta/2-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x^\beta + m^2) \right\} \operatorname{ch} \left(\frac{m}{\sigma^2} x^{\beta/2} \right) \quad (7')$$

soit encore :

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma^2} \beta \sqrt{m} x^{3/4\beta-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x^\beta + m^2) \right\} I_{-1/2} \left(\frac{m}{\sigma^2} x^{\beta/2} \right)$$

3. ETUDE DES MOMENTS NON CENTRES m_r

Etude théorique

Partant de la relation de définition $m_r = \int_{\delta} x^r f(x) dx$ nous obtenons, depuis (7) :

$$m_r = \frac{\beta}{\eta} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^r \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta/2-1} \exp \left\{ - \left[\left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta} + \lambda \right] \right\} \operatorname{ch} \left(2 \sqrt{\lambda \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta}} \right) dx$$

Etant donné que $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, m_r peut se développer en :

$$m_r = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot [I_{+1} + I_{-1}]$$

avec

$$I_{\pm 1} = \frac{\beta}{\eta} \int_0^{\infty} x^r \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta/2-1} \exp \left\{ - \left[\left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta/2} \pm \sqrt{\lambda} \right]^2 \right\} dx$$

Le changement de variable $u = \left[\left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta/2} + \sqrt{\lambda} \right]^2$ transforme I_{+1} en :

$$I_{+1} = \eta^r \int_{\lambda}^{\infty} e^{-u} \frac{[\sqrt{u} - \sqrt{\lambda}]^{2r/\beta}}{\sqrt{u}} du$$

Pour ce qui est de la seconde intégrale, le changement de variable $u = \left[\left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta/2} - \sqrt{\lambda} \right]^2$ conduit à

$$\left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta/2} = \sqrt{\lambda} \pm \sqrt{u}, \text{ soit plus précisément, avec } x_0 = \eta \lambda^{1/\beta}$$

$$\begin{aligned} x &= \eta (\sqrt{\lambda} - \sqrt{u})^{2/\beta} & \forall x < x_0 \\ x &= \eta (\sqrt{\lambda} + \sqrt{u})^{2/\beta} & \forall x \geq x_0 \end{aligned}$$

$$I_{-1} = \int_0^{x_0} g(x) dx + \int_{x_0}^{\infty} g(x) dx \text{ devient alors :}$$

$$I_{-1} = \eta^r \left[-\int_{\lambda}^0 e^{-u} \frac{[\sqrt{\lambda} - \sqrt{u}]^{2r/\beta}}{\sqrt{u}} du + \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{[\sqrt{\lambda} + \sqrt{u}]^{2r/\beta}}{\sqrt{u}} du \right]$$

Il résulte :

$$m_r = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \eta^r \left[\int_0^{\lambda} e^{-u} \frac{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{u})^{2r/\beta}}{\sqrt{u}} du + \int_{\lambda}^{\infty} e^{-u} \frac{(\sqrt{u} - \sqrt{\lambda})^{2r/\beta}}{\sqrt{u}} du + \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{(\sqrt{u} + \sqrt{\lambda})^{2r/\beta}}{\sqrt{u}} du \right] \quad (8)$$

Cas d'une puissance entière ($q = 2/\beta$ entier)

Dans chacune des intégrales figurant dans (8) il est alors possible d'appliquer le développement binomial.

Après avoir posé $\ell = 2r/\beta$, nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda} e^{-u} \frac{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{u})^{\ell}}{\sqrt{u}} du &= \int_0^{\lambda} e^{-u} \frac{1}{\sqrt{u}} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell+j} C_{\ell}^j \lambda^{j/2} u^{(\ell-j)/2} du \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell+j} C_{\ell}^j \lambda^{j/2} \int_0^{\lambda} e^{-u} u^{(\ell-j-1)/2} du \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell+j} C_{\ell}^j \lambda^{j/2} \gamma_{\lambda} \left(\frac{\ell-j+1}{2} \right) \\ \int_{\lambda}^{\infty} e^{-u} \frac{(\sqrt{u} - \sqrt{\lambda})^{\ell}}{\sqrt{u}} du &= \int_0^{\lambda} e^{-u} \frac{1}{\sqrt{u}} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j C_{\ell}^j \lambda^{j/2} u^{(\ell-j)/2} du \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j C_{\ell}^j \lambda^{j/2} \gamma_{\lambda} \left(\frac{\ell-j+1}{2} \right) \\ \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{(\sqrt{u} + \sqrt{\lambda})^{\ell}}{\sqrt{u}} du &= \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{1}{\sqrt{u}} \sum_{j=0}^{\ell} C_{\ell}^j \lambda^{j/2} u^{(\ell-j)/2} du \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} C_{\ell}^j \lambda^{j/2} \gamma \left(\frac{\ell-j+1}{2} \right) \end{aligned}$$

Finalement, posant $s = \frac{\ell-j+1}{2}$, m_r s'exprime par :

$$m_r = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \eta^r \sum_{j=0}^{\ell} C_{\ell}^j \lambda^{j/2} [(-1)^{\ell+j} \gamma_{\lambda}(s) + (-1)^j \gamma_{\lambda}(s) + \gamma(s)] \quad (9)$$

Cette formulation, relativement lourde d'emploi, se simplifie notablement dans le cas où $\ell + j$ et j sont de même parité, c'est-à-dire quand $\ell = 2r/\beta = qr$ est pair. Ceci se produit :

- $\forall r$ si q est pair,
- pour les moments d'ordre pair si q est impair.

Remarquant que :

$$(-1)^{\ell+j} \gamma_{\lambda}(s) + (-1)^j \gamma_{\underline{\lambda}}(s) = (-1)^j \gamma(s)$$

(9) devient ainsi :

$$m_r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta^r \sum_{j=0,2,\dots}^{\ell} C_{\ell}^j \lambda^{j/2} \gamma\left(\frac{\ell-j+1}{2}\right) \quad (10)$$

Exemples d'application

- Envisageons, en premier, le cas où $\beta = 1$.

Alors $\ell = 2r$, $(\ell - j + 1)/2 = (2r - j + 1)/2$ et $W\left(1, \eta, \frac{1}{2}, \lambda, 0\right)$ est la loi de la variable aléatoire $X = Z^2$

La relation (10) fournit :

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta \left[C_2^0 \gamma\left(\frac{3}{2}\right) + C_2^2 \lambda \gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right] = E\{X\} \\ &= \eta(0,5 + \lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta^2 \left[C_4^0 \gamma\left(\frac{5}{2}\right) + C_4^2 \lambda \gamma\left(\frac{3}{2}\right) + C_4^4 \lambda^2 \gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\eta^2}{4} (3 + 12\lambda + 4\lambda^2) \end{aligned}$$

d'où $\mu_2 = m_2 - m_1^2 = \eta^2(0,5 + 2\lambda) = V\{X\}$.

Or la loi $W\left(1, \eta, \frac{1}{2}, \lambda, 0\right)$ est également celle d'un $\chi_{1,\lambda}^2$ (KHI 2 décentré, à 1 d.d.l.).

On sait que $E\{\chi_{1,\lambda}^2\} = m_1 = \frac{p + \lambda}{a}$

$$V\{\chi_{1,\lambda}^2\} = \mu_2 = \frac{p + 2\lambda}{a^2}$$

Ici $p = 1/2$ et $a = 1/\eta$. Les deux caractéristiques rappelées s'identifient bien aux expressions précédentes de m_1 et μ_2 .

- Soit à présent le cas où $\beta = 2$. Alors $\ell = r$ et $W\left(2, \eta, \frac{1}{2}, \lambda, 0\right)$ est la loi de la variable aléatoire $X = |Z|$.

La relation (9) se développe de la manière qui suit :

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta [C_1^0 \{(-1)^1 \gamma_\lambda(1) + (-1)^0 \gamma_{\underline{\lambda}}(1) + \gamma(1)\} \\ &\quad + C_1^1 \lambda^{1/2} \left\{ (-1)^2 \gamma_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)^1 \gamma_{\underline{\lambda}}\left(\frac{1}{2}\right) + \gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta [\gamma(1) - \gamma_\lambda(1) + \sqrt{\lambda} \gamma_\lambda(1/2)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta [\sqrt{\lambda} \gamma_\lambda(1/2) + e^{-\lambda}] \end{aligned}$$

Pour λ grand, $e^{-\lambda} \simeq 0$, $\gamma_\lambda(1/2) \simeq \sqrt{\pi}$ et $m_1 \simeq \eta \sqrt{\lambda} = m$.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} m_2 &\simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2\sigma^2) \cdot [\gamma(3/2 + \lambda \gamma(1/2))] \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2\sigma^2) \left[\frac{1}{2} + \lambda \right] \gamma(1/2) = \sigma^2 (1 + 2\lambda) \\ V\{X\} &= m_2 - m_1^2 \simeq \sigma^2 + 2\sigma^2 \lambda - m^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

4. ETUDE D'UNE APPROXIMATION DE $f(x)$

La relation (7) se met sous la forme :

$$f(x) = g(x) \left[1 + \exp \left\{ -4 \sqrt{\lambda} \left(\frac{x}{\eta} \right)^\beta \right\} \right]$$

avec :

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta/2-1} \left\{ \exp \left[- \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta/2} - \sqrt{\lambda} \right]^2 \right\} \quad (11)$$

Le changement de variable $\ln y = \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta/2}$ introduit une variable aléatoire Y définie sur $[1, \infty[$ et l'identité $g(y) dy = g(x) dx$ transforme (11) en :

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{y} \exp \left\{ - [\ln y - \sqrt{\lambda}]^2 \right\}$$

soit encore :

$$g(y) = \frac{1}{1/\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{y} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \left[\frac{\ln y - \sqrt{\lambda}}{1/\sqrt{2}} \right]^2 \right\} \quad (12)$$

Si y était défini sur $[0, \infty[$, $g(y)$ s'identifierait à la fonction densité de probabilité log normale $LN(m, \sigma)$ avec $m = \sqrt{\lambda}$ et $\sigma = 1/\sqrt{2}$

d'où :

$$\int_{y=0}^{y=\infty} g(y) dy = 1$$

Par ailleurs on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) dx &= \int_0^{\infty} g(x) dx + \int_0^{\infty} g(x) \exp \left[-4 \sqrt{\lambda} \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta} \right] dx \\ &= \int_{y=1}^{y=\infty} g(y) dy + \int_0^{\infty} g(x) \exp \left[-4 \sqrt{\lambda} \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta} \right] dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{y=1} g(y) dy &= \int_0^{\infty} g(x) \exp \left[-4 \sqrt{\lambda} \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta} \right] dx \\ &= \int_0^{\infty} [f(x) - g(x)] dx \\ &= \epsilon(\lambda) \end{aligned}$$

$\epsilon(\lambda)$ est donc représentée par l'aire sous-tendue par la loi log-normale entre $y = 0$ et $y = 1$. Elle devient très petite lorsque $m = \sqrt{\lambda}$ croît, l'écart-type $\sigma = 1/\sqrt{2}$ étant constant. Cette quantité peut ailleurs être majorée comme indiqué ci-après :

$$\begin{aligned} \epsilon(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda} \int_0^1 \frac{1}{y} \exp \{2\sqrt{\lambda} \ln y - (\ln y)^2\} dy \\ &< \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda} \int_0^1 \frac{1}{y} \exp \{2\sqrt{\lambda} \ln y\} dy \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{y} \exp \{2\sqrt{\lambda} \ln y\} = y^{2\sqrt{\lambda}-1}$$

Il en résulte que, $\forall \lambda > \frac{1}{4}$,

$$\epsilon(\lambda) < E(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$$

Le tableau qui suit traduit l'évolution numérique, en fonction de λ (ou du coefficient de variation v) lorsque $\beta = 4$, de la borne supérieure de l'erreur $E(\lambda)$ et de l'erreur elle-même $\epsilon(\lambda)$. Cette dernière correspond graphiquement à l'aire comprise entre les deux courbes ; elle est obtenue par différence entre les valeurs numériques des deux intégrales :

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} g(x) dx$$

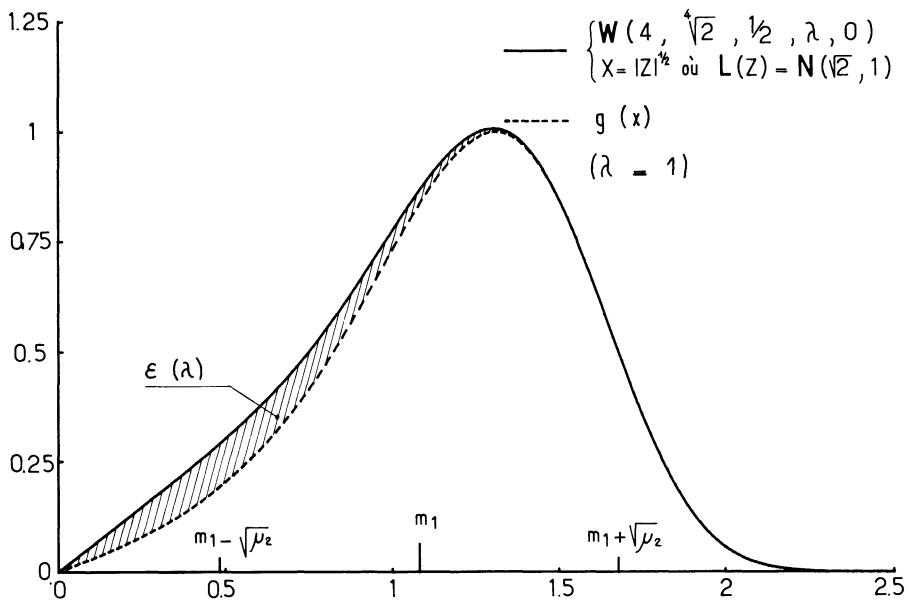


Figure 1

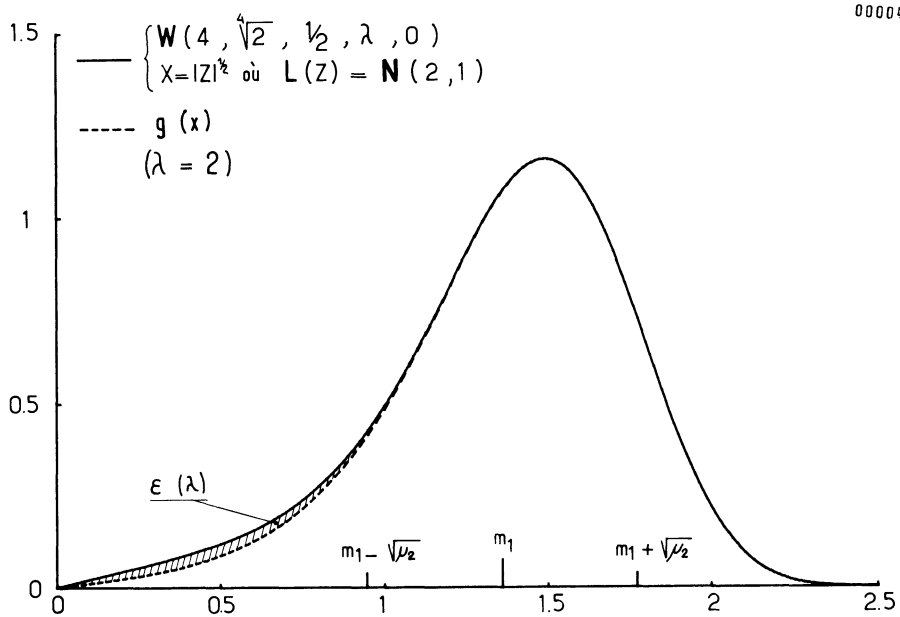


Figure 2

000045

TABLEAU 1

λ	0,5	1	2	5	10
v	1	0,707	0,5	0,316	0,224
$E(\lambda)$	$2,42 \times 10^{-1}$	$1,04 \times 10^{-1}$	$2,70 \times 10^{-2}$	$8,50 \times 10^{-4}$	$4,05 \times 10^{-6}$
$\epsilon(\lambda)$	$1,56 \times 10^{-1}$	$0,79 \times 10^{-1}$	$2,28 \times 10^{-2}$	$7,83 \times 10^{-4}$	$3,87 \times 10^{-6}$

Graphiquement $\epsilon(\lambda)$ est l'aire comprise entre les graphes des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in [0, \infty[$. Les figures 1 et 2 montrent la différence existante quand $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$ dans le cas $\beta = 4$.

En résumé cette étude montre que pour les valeurs de λ suffisamment grandes:

- on peut approximer $f(x)$ par $g(x)$;
- on peut considérer que Y est une variable aléatoire Log-Normale $L(Y) \rightarrow LN(\sqrt{\lambda}, 1/\sqrt{2})$ ou ce qui revient au même, que $\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta/2}$ suit une loi normale de moyenne $m = \sqrt{\lambda}$ d'écart-type $\sigma = 1/\sqrt{2}$.

5. EXPRESSION APPROCHÉE DES MOMENTS DE X

5.1 Nouvelle formulation approchée des moments de $|Z|^q$

Partant de l'approximation (12) précédemment étudiée pour $f(x)$, il est facile de déterminer des expressions approchées pour les moments non centrés de X :

$$E\{X^r\} = \eta^r E\left\{\left[\left(\frac{X}{\eta}\right)^{\beta/2}\right]^{2r/\beta}\right\} = \eta^r m_{2r/\beta}$$

où $m_{2r/\beta}$ est le moment non centré d'ordre $2r/\beta$ de la variable aléatoire $\ln(Y)$ de loi $N(\sqrt{\lambda}, 1/\sqrt{2})$.

Si r/β est entier, l'utilisation des relations bien connues pour une variable aléatoire normale :

$$m_r = \sum_{j=0}^r C_r^j \mu_{r-j} m^j$$

avec
$$\begin{cases} \mu_{2k} = (2k)^k \sigma^{2k} \\ \mu_{2k+1} = 0 \end{cases}$$

moments centrés d'une variable aléatoire normale, permet d'obtenir la forme approchée du moment d'ordre r de $X = |Z|^{2/\beta}$, soit :

$$m_r^v = \eta^r \sum_{j=0,2,\dots}^{\ell} C_{\ell}^j \frac{(\ell-j)!}{2^{(\ell-j)/2} \left(\frac{\ell-j}{2}\right)!} \lambda^{j/2} \quad (13)$$

Remarquant que :
$$\frac{(\ell - j)!}{2^{(\ell - j)/2} \left(\frac{\ell - j}{2}\right)!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{\ell - j + 1}{2}\right),$$

$$m'_r = \frac{\eta^r}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0,2,\dots}^{\ell} C_{\ell}^j \lambda^{j/2} \gamma\left(\frac{\ell - j + 1}{2}\right)$$

et comparant à (10), on déduit $m'_r = m_r$.

Ainsi, pour tout r/β entier, la formule (13) permet la détermination exacte du moment d'ordre r de la variable aléatoire X .

Cette dernière procédure étant d'un emploi plus aisé que (10) sera préférée lors des applications.

5.2 Exemple d'application – Tableau de résultats

Les tableaux II et III résultent de l'exploitation, sur calculateur, des différentes formules précédemment établies. Le choix des puissances 3 et 10 envisagées s'explique par le fait qu'elles concernent certains problèmes de granulométrie et porosité pour la première, la théorie mécanique de la rupture de verres et autres matériaux similaires pour la seconde.

Pour une valeur de paramètre de décentrage $\lambda = \frac{1}{2} \frac{m^2}{\sigma^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{v^2}$, on lit successivement : les moyennes, écarts-type et coefficients de Fisher obtenus :

- en colonne 1 par les formules exactes [relations (9) et (10)] ;
- en colonne 2 par la formulation approchée [relation (13)] ;
- en colonne 3 par l'approximation usuelle.

Il convient de préciser que la fonction gamma est calculée par approximation polynomiale et que, dans la formule (9), lorsque λ est faible, on calcule $\gamma_{\lambda}(s)$ par intégration tandis que, pour λ grand, c'est $\gamma_{\underline{\lambda}}(s)$ qui est obtenue par développement en fraction continue. Dans l'un et l'autre cas, la relation $\gamma(s) = \gamma_{\lambda}(s) + \gamma_{\underline{\lambda}}(s)$ permet de déduire la fonction complémentaire.

De ces tableaux il ressort que la formulation approchée conduit – et ce d'autant plus rapidement que q est élevé – à un résultat égal à celui obtenu par la formulation exacte. Par contre, l'approximation usuelle est relativement imprécise.

Les valeurs de G_1 et G_2 dont le calcul est rendu possible par la connaissance des moments d'ordre 3 et d'ordre 4 montrent que, pour q élevé, la tendance vers la normalité est très lente. Ainsi, pour $\lambda = 100$ ($v \# 0,07$), si $q = 10$, $G_1 > 2$. Rappelons que l'hypothèse de normalité peut être raisonnablement envisagée lorsque $G_1 < 0,2$.

Précisons que par la méthode usuelle des moments, pour cette valeur de q , l'hypothèse de normalité ne semble admissible lorsque $\lambda > 10\ 000$ ($v < 0,007$), celle de loi gamma lorsque $\lambda > 200$ ($v < 0,05$), celle de loi log-normale lorsque $\lambda > 100$ ($v < 0,07$).

Caracteristiques ce λ												
Lambda	mCylene			Lcart-ryoe			G1			G2		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
0.5	4.1626	4.0000	1.0000	7.6489	7.7460	3.0000	4.07	3.95	27.15	3.33	3.30	17.50
1.0	7.1329	7.0711	2.6284	11.0509	11.0905	6.0000	3.33	3.30	17.50	2.90	2.89	13.47
1.5	10.4172	10.3923	5.1902	14.2647	14.2829	9.0000	2.60	2.60	10.83	2.60	2.60	10.83
2.0	14.0109	14.0000	8.0000	17.3961	17.4069	12.0000	2.39	2.38	9.06	2.39	2.38	9.06
2.5	17.8936	17.8885	11.1603	20.4895	20.4939	15.0000	2.22	2.22	7.80	2.22	2.22	7.80
3.0	22.0478	22.0454	14.6969	23.5562	23.5584	18.0000	2.08	2.08	6.84	2.08	2.08	6.84
3.5	26.4587	26.4575	18.5203	26.6071	26.6083	21.0000	1.96	1.96	6.10	1.96	1.96	6.10
4.0	31.1133	31.1127	22.6274	29.6473	29.6479	24.0000	1.87	1.87	5.50	1.87	1.87	5.50
4.5	36.0003	36.0000	27.0000	32.6799	32.6803	27.0000	1.78	1.78	5.01	1.78	1.78	5.01
5.0	41.1098	41.1096	31.6228	35.7070	35.7071	30.0000	1.71	1.71	4.60	1.71	1.71	4.60
5.5	46.4328	46.4327	36.4829	38.7297	38.7298	33.0000	1.64	1.64	4.25	1.64	1.64	4.25
6.0	51.9616	51.9615	41.5692	41.7492	41.7493	36.0000	1.58	1.58	3.95	1.58	1.58	3.95
6.5	57.6888	57.6888	46.8722	44.7660	44.7661	39.0000	1.53	1.53	3.69	1.53	1.53	3.69
7.0	63.6082	63.6082	52.3832	47.7807	47.7807	42.0000	1.48	1.48	3.46	1.48	1.48	3.46
7.5	69.7137	69.7137	58.0948	50.7937	50.7937	45.0000	1.44	1.44	3.26	1.44	1.44	3.26
8.0	76.0000	76.0000	64.0000	53.8052	53.8052	48.0000	1.40	1.40	3.08	1.40	1.40	3.08
8.5	82.4621	82.4621	70.0928	56.8155	56.8155	51.0000	1.36	1.36	2.92	1.36	1.36	2.92
9.0	89.0955	89.0955	76.3675	59.8247	59.8247	54.0000	1.33	1.33	2.78	1.33	1.33	2.78
9.5	95.8958	95.8958	82.8191	62.8331	62.8331	57.0000	1.30	1.30	2.65	1.30	1.30	2.65
10.0	102.8591	102.8591	89.4427	65.8407	65.8407	60.0000	1.27	1.27	2.54	1.27	1.27	2.54
15.0	180.7485	180.7484	164.3168	95.8906	95.8906	90.0000	1.07	1.07	1.80	1.07	1.07	1.80
20.0	271.9559	271.9559	252.9822	125.9166	125.9166	120.0000	0.93	0.93	1.36	0.93	0.93	1.36
25.0	374.7666	374.7666	353.5534	155.9326	155.9327	150.0000	0.84	0.84	1.09	0.84	0.84	1.09
30.0	487.9959	487.9959	464.7580	185.9435	185.9435	180.0000	0.77	0.77	0.92	0.77	0.77	0.92
35.0	610.7619	610.7618	585.6620	215.9513	215.9514	210.0000	0.71	0.71	0.79	0.71	0.71	0.79
40.0	742.3746	742.3746	715.5418	245.9572	245.9573	240.0000	0.67	0.67	0.69	0.67	0.67	0.69
45.0	882.2755	882.2755	853.8150	275.9619	275.9620	270.0000	0.63	0.63	0.61	0.63	0.63	0.61
50.0	1030.0001	1030.0000	1000.0000	305.9656	305.9657	300.0000	0.60	0.60	0.55	0.60	0.60	0.55
55.0	1185.1541	1185.1540	1153.6897	335.9686	335.9687	330.0000	0.57	0.57	0.50	0.57	0.57	0.50
60.0	1347.3976	1347.3975	1314.5341	365.9711	365.9713	360.0000	0.54	0.54	0.46	0.54	0.54	0.46
65.0	1516.4334	1516.4333	1482.2281	395.9733	395.9735	390.0000	0.52	0.52	0.43	0.52	0.52	0.43
70.0	1691.9990	1691.9988	1656.5023	425.9751	425.9754	420.0000	0.50	0.50	0.40	0.50	0.50	0.40
75.0	1873.8598	1873.8597	1837.1173	455.9767	455.9770	450.0000	0.49	0.49	0.37	0.49	0.49	0.37
80.0	2061.8052	2061.8050	2023.8577	485.9781	485.9784	480.0000	0.47	0.47	0.35	0.47	0.47	0.35
85.0	2255.6442	2255.6440	2216.5288	515.9793	515.9797	510.0000	0.46	0.46	0.33	0.46	0.46	0.33
90.0	2455.2028	2455.2026	2414.9534	545.9804	545.9808	540.0000	0.45	0.45	0.31	0.45	0.45	0.31
95.0	2660.3216	2660.3214	2618.9693	575.9813	575.9818	570.0000	0.43	0.43	0.29	0.43	0.43	0.29
100.0	2870.8538	2870.8535	2828.4271	605.9822	605.9827	600.0000	0.42	0.42	0.28	0.42	0.42	0.28

Caracteristiques de z ₁₀									
Lambda	Moyenne		Ecart-Type		G1		G2		
	1 ou 2	3	1 ou 2	3	1	2	3	1	2
0.5	9496		153845.67		10.00		166.49		1.30E+05
1.0	28787	32	348669.09		226.27		110.91		53983.77
1.5	64368	243	636764.38		1402.96		83.24		28955.05
2.0	123109	1024	1040555.89		5120.00		66.39		17683.76
2.5	213320	3125	1584394.88		13975.42		55.03		11123.25
3.0	344871	7776	2294969.96		31745.39		46.85		8232.53
3.5	529312	16807	3201438.59		65524.49		40.70		6035.98
4.0	779993	32768	4335511.53		118552.38		35.91		4577.34
4.5	1112184	59049	5731524.50		196830.00		32.10		3567.02
5.0	1543195	100000	7426505.00		316227.77		28.98		2842.99
5.5	2092496	161051	9460236.43		485587.04		26.40		2309.30
6.0	2781837	248832	11875320.32		718316.11		24.23		1906.47
6.5	3635368	371293	14717237.22		1029781.50		22.38		1596.15
7.0	4679759	537824	18034406.12		1437395.10		20.79		1352.86
7.5	5944320	759375	21878242.82		1960697.82		19.40		1159.14
8.0	7461121	1048576	26303217.10		2621440.00		18.19		1002.78
8.5	9265112	1419857	31366908.96		3443659.05		17.12		875.02
9.0	11394243	1889568	37130063.75		4453754.49		16.17		769.49
9.5	13889584	2476099	43656646.50		5680560.69		15.33		681.46
10.0	16795445	3200000	51013895.27		7155417.53		14.56		607.36
15.0	80737695	24300000	187508540.23		44365527.16		9.80		247.99
20.0	263149945	102400000	507264659.56		161908616.19		7.50		135.13
25.0	680612195	312500000	1139123890.45		441941738.28		6.15		86.39
30.0	1508504445	777600000	225471141.67		1003877283.37		5.27		61.00
35.0	2993006695	1680700000	4072335664.48		2008820723.74		4.64		46.04
40.0	5463098945	3276800000	6860589812.55		3663573774.45		4.18		36.43
45.0	9342561195	5904900000	10941706586.20		622431118.77		3.82		29.85
50.0	15161973445	10000000000	16694718864.30		1000000000.00		3.53		25.12
55.0	23570715695	16105100000	24558451818.00		15355610345.70		3.29		21.59
60.0	35348867944	24883200000	35034372464.10		22715149904.90		3.10		18.86
65.0	51419710195	37129300000	48689315044.60		32564550322.80		2.93		16.71
70.0	72860722445	53782400000	66158097208.80		45454424193.30		2.78		14.97
75.0	100916584695	75937500000	88146039136.10		62002709119.30		2.66		13.53
80.0	137010676943	104857600000	1.15E+11		82897211501.90		2.54		12.34
85.0	182757179194	141985700000	1.49E+11		1.09E+11		2.44		11.33
90.0	239973071444	188956800000	1.89E+11		1.41E+11		2.36		10.47
95.0	310690133692	247609900000	2.38E+11		1.80E+11		2.27		9.72
100.0	397166945945	320000000000	2.96E+11		2.26E+11		2.20		9.07

6. CONCLUSION

On a précédemment établi que si Z est une variable aléatoire normale de loi $N(m, \sigma)$, la variable aléatoire $X = |Z|^q (\approx Z^q \text{ pour } m/\sigma > 3)$, suit une loi $W\left(\beta, \eta, \frac{1}{2}, \lambda, 0\right) = W\left(\frac{2}{q}; (2\sigma^2)^{q/2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m}{\sigma}\right)^2; 0\right)$ dont la densité de probabilité s'exprime par une série (5). On donne ici une autre forme analytique de cette loi utilisation d'une fonction de Bessel modifiée de seconde espèce [(7), (7')]. L'étude d'une approximation est ensuite faite. Elle conduit au résultat suivant : $\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta/2}$ peut-être considérée comme une variable aléatoire normale de moyenne $\sqrt{\lambda}$ d'écart type $1/\sqrt{2}$ si $\sqrt{\lambda}$ est suffisamment grand (la valeur inférieure d'utilisation de cette approximation est relativement faible pour les valeurs de β supérieures à 2, et croit fortement lorsque β décroît à partir de 2).

Ce résultat est enfin utilisé pour établir une formule approchée des moments non centrés de la variable aléatoire $|Z|^q$ lorsque q est entier.

La connaissance de ceux-ci permet alors la détermination de coefficients de Fisher et l'utilisation de tests d'adéquation.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FAUCHON J. — Sur une loi de probabilité à 5 paramètres, permettant en fiabilité mécanique notamment, de nombreuses applications. *C.R.A.S.*, 283, série A (1976), p. 329.
- [2] MARTINEAU G. — Introduction de l'approximation Gamma dans la conception par la fiabilité, d'un élément de machine. Thèse Docteur-Ingénieur (1976), Lyon.
- [3] STACY E.W. — A generalization of the Gamma distribution. *Annals of mathematical statistics* (1962), 33, p. 1187-1192.
- [4] STACY E.W. and MIHRAM G.A. — Parameter estimation for a generalised Gamma distribution. *Technometrics* (1965), 7, p. 349-358.
- [5] ABRAMOWITZ M. and STEGUN A. — Handbook of mathematical functions. Dover Publications Inc. (1965), New York, p. 443.