

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. PERDIJON

## **Tri et réception d'un lot quand les mesures sont infidèles**

*Revue de statistique appliquée*, tome 28, n° 2 (1980), p. 73-85

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1980\\_\\_28\\_2\\_73\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1980__28_2_73_0)

© Société française de statistique, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# TRI ET RÉCEPTION D'UN LOT QUAND LES MESURES SONT INFIDÈLES \*

J. PERDIJON

COGEMA – Centre d'études nucléaires, 85 X  
38041 GRENOBLE CEDEX

**RESUME.** – Les appareils de contrôle ne sont jamais parfaitement fidèles. Nous proposons un ensemble de procédures pour que le fournisseur puisse néanmoins obtenir en moyenne une qualité donnée par un contrôle unitaire, et que le client puisse éprouver cette qualité sur un échantillon sans créer de litiges.

## 1. – INTRODUCTION

Lorsqu'on veut étudier la distribution d'un caractère dans un lot, on connaît bien les deux cas extrêmes suivants :

- 1) l'appareil de mesure est parfaitement fidèle et le lot contient un grand nombre d'individus ; une inspection à 100 % du lot classe sans ambiguïté tous les individus et, quand l'inspection ne porte que sur un échantillon, il existe des tables qui permettent de décider de la réception (acceptation ou rejet) du lot complet,
- 2) l'appareil de mesure est infidèle et le lot se réduit à un seul individu; on répète la mesure jusqu'à ce qu'on obtienne une estimation assez précise du caractère de cet individu.

Dans le premier cas, la dispersion de la mesure est considérée comme négligeable devant la dispersion de la distribution ; dans le deuxième cas, c'est au contraire la dispersion de la distribution qui est nulle.

En pratique, on se trouve presque toujours dans une situation intermédiaire : l'infidélité de l'appareil de mesure n'est pas négligeable mais on voudrait néanmoins porter un jugement sur la qualité globale d'un lot important, sans devoir répéter la mesure pour chacun des individus qui le composent ; cette répétition serait en effet trop onéreuse.

Nous considérerons le schéma de réception suivant, qui est habituellement adopté lorsque le caractère est très important pour la qualité de l'individu (et de

---

(\*) Manuscrit reçu en Juin 1979 ; version définitive en Décembre 1979.

l'ensemble dans lequel celui-ci sera intégré), qu'il n'est que repérable et qu'il est contrôlable de façon non destructive :

- 1) le fournisseur contrôle le lot fabriqué à 100 % et le trie,
- 2) le client vérifie le lot livré sur un échantillon.

Le client doit indiquer dans le cahier des charges qu'il remet au fournisseur :

- 1) la méthode de contrôle à utiliser,
- 2) la ou les grandeurs de rejet, c'est-à-dire la ou les grandeurs extrémales du caractère qui rendent un individu défectueux,
- 3) la qualité livrée acceptable, c'est-à-dire la proportion maximale de défectueux qui sera en moyenne acceptable dans les lots livrés,
- 4) les procédures à suivre pour la surveillance de l'étalonnage (§2), pour le tri chez le fournisseur (§3) et pour la réception chez le client (§4).

Nous supposons par la suite qu'il n'y a qu'une seule grandeur de rejet  $G$  et qu'elle constitue une borne supérieure pour le caractère. Comme les mesures sont généralement relatives, cette grandeur doit être matérialisée sous forme d'une référence aussi proche que possible des individus à contrôler. Nous supposons qu'un étalonnage préalable permet d'exprimer la grandeur du caractère et sa mesure avec la même unité. Nous désignerons par  $D$  la qualité livrée acceptable.

## 2. – SURVEILLANCE DE L'ETALONNAGE

Pendant le contrôle des individus, chez le fournisseur comme chez le client, l'étalonnage de l'appareil de contrôle doit être périodiquement vérifié afin d'éviter une dérive. Dans ce but, nous proposons d'appliquer la technique des cartes de contrôle, bien que celle-ci ne soit normalement destinée qu'aux contrôles en cours de fabrication [1]. Pour établir ces cartes, nous utiliserons la référence fixant la grandeur de rejet (§1) et nous supposons que la distribution des mesures de cette référence est normale.

Nous proposons donc de suivre la procédure ci-dessous (fig. 1) :

### A. Chaque fois que les réglages de l'appareil ont été modifiés :

- 1) mesurer la référence un grand nombre de fois successives (par exemple 50),
- 2) estimer la moyenne  $m$  et l'écart-type  $\sigma$  de la population à laquelle appartiennent les mesures précédentes ; en déduire les limites de contrôle de la moyenne et de l'écart-type pour un échantillon de quelques mesures de la référence (par exemple 5) [1].

### B. Après chaque remise en route de l'appareillage :

- 3) obtenir un échantillon de mesures, calculer moyenne et écart-type et porter ces valeurs sur les cartes de contrôle,
- 4) si ces valeurs sont comprises entre les limites de contrôle, commencer le contrôle des individus,
- 5) sinon, modifier les réglages et refaire les cartes de contrôle.

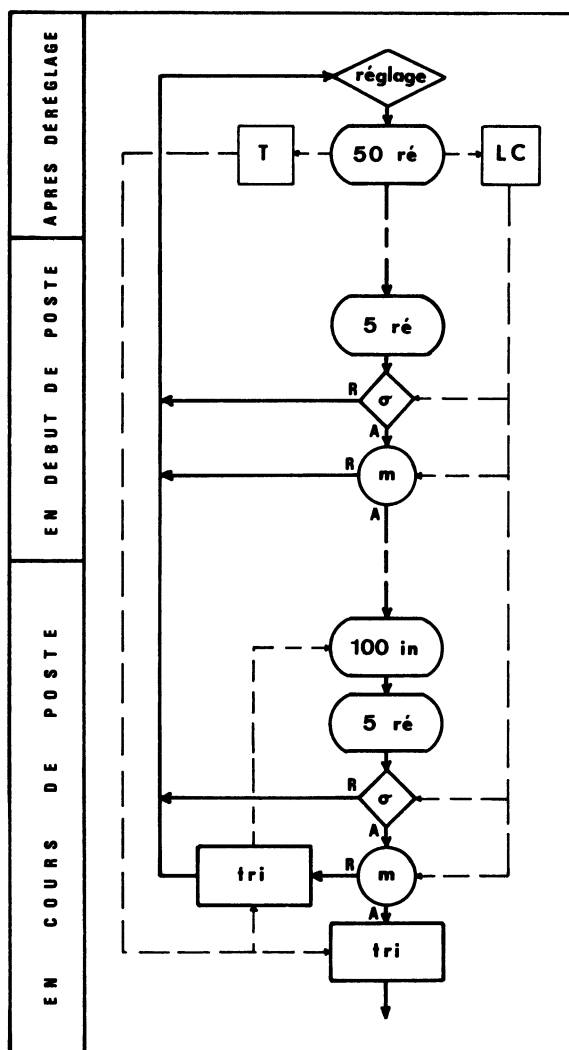


FIG. 1. — Organigramme de la surveillance de l'étalonnage  
 (A = acceptation, R = rejet, in = individu, ré = référence,  
 LC = limites de contrôle, T = mesure de tri).

C. Après le contrôle de  $N$  individus (par exemple 100) et au plus toutes les  $n$  heures (par exemple 4) :

- 6) obtenir un échantillon de mesures, calculer moyenne et écart-type et porter ces valeurs sur les cartes de contrôle,
- 7) si ces valeurs sont comprises entre les limites de contrôle, trier les  $N$  individus précédents, c'est-à-dire comparer leur mesure individuelle à la mesure de tri  $T$  (§ 3 ou 4) et les séparer en individus acceptés et individus rejetés ; contrôler les  $N$  individus suivants,

- 8) si l'écart-type est en dehors des limites de contrôle, modifier les réglages, refaire les cartes de contrôle et reconstrôler les N individus précédents,
- 9) si l'écart-type est compris entre les limites de contrôle et si la moyenne est supérieure à la limite supérieure de contrôle, trier les N individus précédents, modifier les réglages et refaire les cartes de contrôle ; reconstrôler les individus rejetés parmi les N individus précédents et commencer le contrôle des individus suivants,
- 10) si l'écart-type est compris entre les limites de contrôle et si la moyenne est inférieure à la limite inférieure de contrôle, trier les N individus précédents, modifier les réglages et refaire les cartes de contrôle ; reconstrôler les individus acceptés parmi les N individus précédents et commencer le contrôle des individus suivants.

### 3. TRI CHEZ LE FOURNISSEUR

Soit un lot de A individus sortant de fabrication et présumé homogène, c'est-à-dire que les individus qui le composent ne diffèrent ni par les caractères propres qui les définissent, ni par ceux qui ont contribué à leur production. Soit X la grandeur maximale du caractère pour un individu et soit a(X) la distribution de X dans ce lot (fig. 2). Le nombre d'individus dont la grandeur est comprise entre X et X + dX est :

$$da = a(X) dX$$

et la proportion de défectueux dans le lot fabriqué est :

$$D_a = (1/A) \int_G^{\infty} a(X) dX .$$

La distribution a(X) est bien sûr inconnue ; nous supposons qu'elle est normale, de moyenne  $m_a$  et d'écart-type  $\sigma_a$  (approximation qui est particulièrement valable au voisinage de G).

Nous avons déjà supposé (§2) que la distribution des mesures répétées de la référence était normale ; l'établissement des cartes de contrôle chez le fournisseur conduit à une moyenne  $m_f$  et à un écart-type  $\sigma_f$ . Puisqu'il s'agit d'un contrôle à 100 %, tous les individus du lot fabriqué sont contrôlés, mais seulement une fois ; nous supposons que l'écart-type de cette mesure est égal à  $\sigma_f$  (hypothèse d'autant plus justifiée que les individus douteux sont ceux dont le caractère est voisin de G).

La distribution du lot, telle que le fournisseur peut l'observer avec son appareil de mesure, est encore normale, de moyenne  $m_a$  (en l'absence d'erreur systématique) et d'écart-type  $(\sigma_a^2 + \sigma_f^2)^{1/2}$ . Si le caractère était mesurable, le fournisseur pourrait se contenter d'un contrôle par mesures sur échantillon ; en effet, connaissant  $\sigma_f$  (§2), il pourrait déduire  $\sigma_a$  de l'écart-type observé sur un échantillon et voir si le lot était effectivement acceptable (NF X 06-023). Puisque nous avons choisi un schéma de réception dans lequel le client demande au fournisseur de trier le lot (§1), il nous faut fixer la mesure de tri  $T_f$ , c'est-à-dire la mesure minimale en-

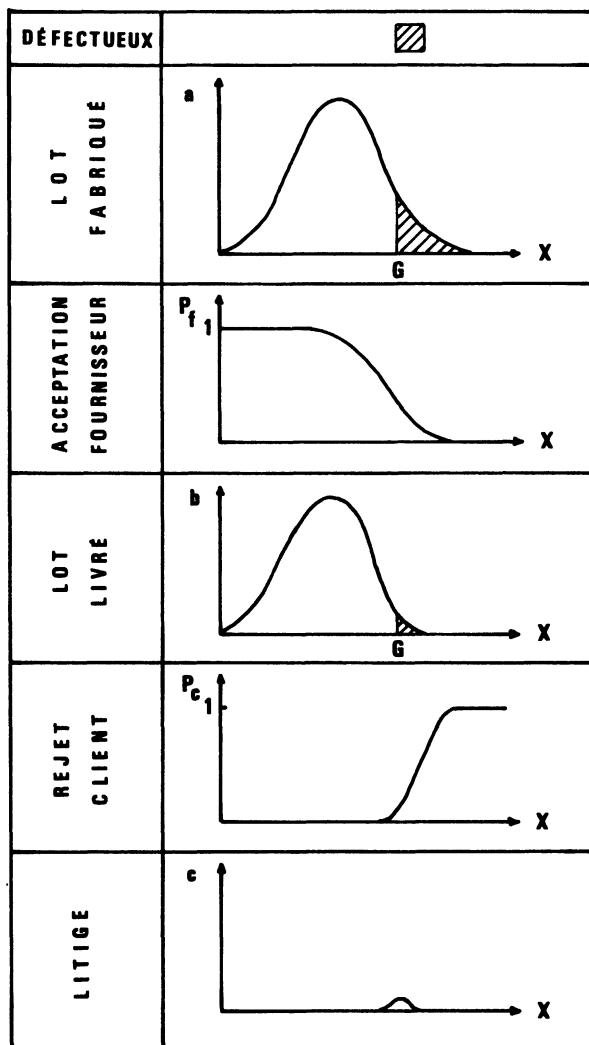


FIG. 2. — Tri chez le fournisseur et réception chez le client lorsque les mesures sont infidèles.

traînant le rejet d'un individu chez le fournisseur, de façon que, après ce tri, la proportion de défectueux  $D_b$  dans le lot tel qu'il sera livré au client soit en moyenne inférieure à la proportion maximale  $D$  fixée par le cahier des charges (§1). Nous poserons :

$$T_f = m_f + k_f \sigma_f$$

et nous déterminerons le niveau de tri  $k_f$  pour que  $D_b \leq D$ .

Pour une valeur donnée de  $k_f$ , la probabilité d'acceptation des individus par le fournisseur est :

$$P_f = 1 - F \left\{ (X - T_f) / \sigma_f \right\},$$

en désignant par  $F$  la fonction de répartition de la loi normale. Si le lot est livré après ce tri, la distribution de  $X$  dans ce lot sera (fig. 2) :

$$db = a(X) P_f dX ,$$

l'effectif moyen du lot livré sera :

$$B = \int_0^{\infty} a(X) P_f dX$$

et la proportion moyenne de défectueux dans ce lot sera :

$$D_b = (1/B) \int_G^{\infty} a(X) P_f dX .$$

Cette proportion est bien sûr inconnue. Le seul indicateur que possède le fournisseur est l'effectif  $B$  ; il peut en tirer le taux de rejet moyen lors du tri :

$$R_f = 1 - B/A .$$

$D_b$  et  $R_f$  dépendent des paramètres de la distribution observée et du niveau de tri ; ils ne dépendent donc que de trois paramètres, par exemple  $D_a$ ,  $\sigma_f/\sigma_a$  et  $k_f$ . Nous avons programmé les calculs précédents sur une petite calculatrice de bureau et nous avons simulé un grand nombre de lots et de types de contrôle en faisant varier les trois paramètres ( $-\infty < X < \infty$ ). Quelques-uns de ces résultats sont regroupés dans la table I ; pour  $\sigma_f = 0$ , on a  $D_b = 0$  et  $R_f = D_a$ .

Nous choisirons comme indicateur le taux de rejet et nous lui chercherons une borne inférieure qui soit :

- 1) indépendante de la qualité fabriquée et de la fidélité du contrôle,
- 2) susceptible de n'être dépassée (inférieurement) que si la proportion de défectueux après tri est inférieure à la proportion maximale acceptable  $D$ .

Si nous fixons  $D_b = D$ , nous pourrions établir le réseau des courbes donnant  $R_f$  en fonction de  $\sigma_f/\sigma_a$ , pour diverses valeurs de  $k_f$ . La figure 3 donne ce réseau pour  $D = 0,001$  ; on remarque que toutes ces courbes présentent un minimum (pour  $\sigma_f/\sigma_a$  voisin de 0,3) et il en est de même pour d'autres valeurs de  $D$ .

Réciproquement, si le taux de rejet est inférieur à la borne inférieure que nous venons de trouver, nous pourrions affirmer que la proportion de défectueux est en moyenne inférieure à  $D$ , donc acceptable. A un niveau de tri  $k_f$  et à une qualité livrée acceptable  $D$  correspond donc un taux maximal de rejet  $R$  qui ne sera en moyenne dépassé que si  $D_b > D$  ; par exemple, pour obtenir  $D = 0,001$  (fig. 3), on peut choisir  $k_f = 0$  et  $R = 0,006$  ou bien  $k_f = -2$  et  $R = 0,38$ . Le réseau de la figure 4 montre comment  $k_f$  varie en fonction de  $D$ , pour diverses valeurs de  $R$ .

Le choix de  $R$  dépend alors de la qualité de la fabrication. Calculons en effet le rejet à tort lors du tri à un niveau donné. Le nombre de défectueux dans  $A$  est  $AD_a$ , le nombre de défectueux dans  $B$  est  $BD_b$  et le nombre de rejets est  $AR_f$  ; on en tire la proportion d'individus bons qui sont rejetés à tort :

$$RAT = R_f - D_a + (B/A) D_b .$$

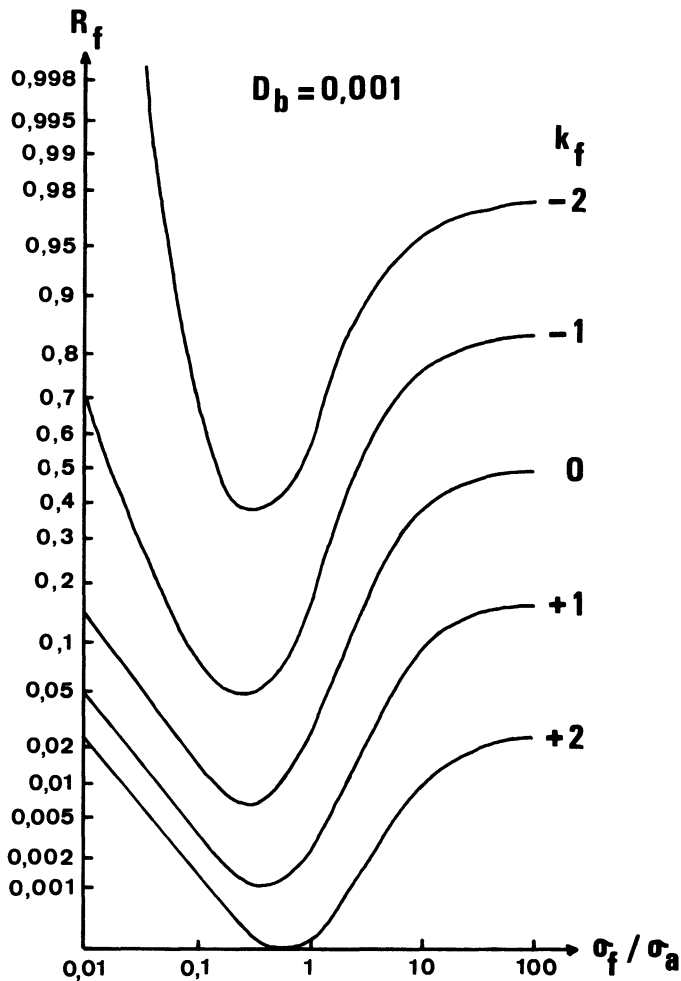


FIG. 3. – Taux de rejet chez le fournisseur pour une proportion de défectueux dans le lot livré égale à 0,001 et pour divers niveaux de tri.

Pour  $D_a$  et  $\sigma_f / \sigma_a$  donnés, RAT croît avec  $R_f$ , donc décroît avec  $k_f$  (table I) ; ainsi le fournisseur a intérêt à choisir la valeur de  $R$  la plus faible qui soit compatible avec la qualité de sa fabrication et la fidélité de son contrôle.

Nous proposons donc la procédure ci-dessous :

- 1) choisir un taux maximal de rejet  $R$  un peu supérieur à la proportion présumée de défectueux dans le lot fabriqué et déterminer le niveau  $k_f$  en fonction de  $D$  (fig. 4) ; en déduire la mesure de tri  $T_f = m_f + k_f \sigma_f$ ,
- 2) contrôler le lot unitairement ; soit  $x$  la mesure maximale d'un individu,
- 3) si  $x \leq T_f$ , l'individu sera accepté ; sinon, il sera rejeté,
- 4) compter le nombre de rejets et en déduire le taux de rejet  $R_f$  pour le lot ; si  $R_f \leq R$ , livrer les individus acceptés au client ; sinon, recommencer le tri en adoptant un taux maximal de rejet plus élevé.



TABLE I  
 $D_b$ ,  $R_f$  et RAT en fonction de  $D_a$ ,  $\sigma_f/\sigma_a$  et  $k_f$

$k_f$		-2			0			2		
		$D_a$	0,1587	0,8413	0,0013	0,1587	0,8413	0,0013	0,1587	0,8413
0,01	$D_b$	0	0,0001	0,0001	0	0,0012	0,0062	0,0001	0,0057	0,0307
	$R_f$	0,0018	0,1737	0,8489	0,0017	0,1687	0,8443	0,0016	0,1638	0,8395
	RAT	0	0,02	0,01	0	0,01	0	0	0,01	0
0,1	$D_b$	0	0,0003	0,0018	0,0001	0,0108	0,0636	0,0006	0,0486	0,2547
	$R_f$	0,0032	0,2200	0,8829	0,0018	0,1668	0,8389	0,0009	0,1227	0,7859
	RAT	0	0,06	0,04	0	0,02	0,01	0	0,01	0
1	$D_b$	0	0,0060	0,1524	0,0005	0,0665	0,5491	0,0013	0,1468	0,7935
	$R_f$	0,2397	0,7604	0,9831	0,0169	0,2397	0,7604	0,0003	0,0169	0,2397
	RAT	0,24	0,60	0,14	0,02	0,13	0,05	0	0	0
10	$D_b$	0,0006	0,1088	0,7760	0,0010	0,1408	0,8207	0,0013	0,1574	0,8400
	$R_f$	0,9546	0,9706	0,9817	0,3824	0,4603	0,5398	0,0110	0,0184	0,0294
	RAT	0,95	0,82	0,15	0,38	0,38	0,08	0,01	0,01	0

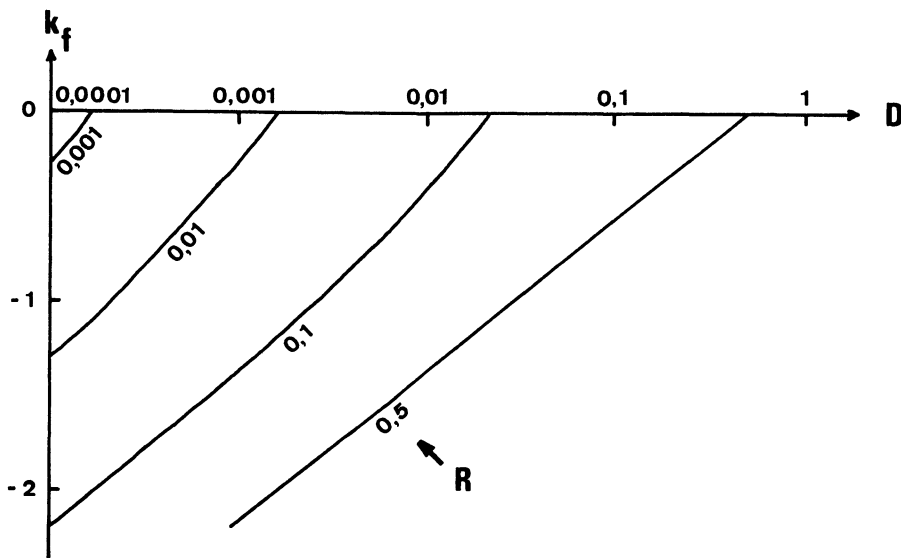


FIG. 4. — Niveau de tri chez le fournisseur en fonction de la qualité livrée acceptable, pour divers taux maximaux de rejet.

#### 4. RECEPTION CHEZ LE CLIENT

Le lot de  $B$  individus est donc livré au client. La distribution  $b(X)$  du caractère  $X$  dans ce lot est plus au moins franchement tronquée suivant la qualité du lot fabriqué et la fidélité du contrôle chez le fournisseur (fig. 2). Le client ne connaît ni  $\sigma_a$ , ni  $\sigma_f$ , ni  $R_f$ ; il possède néanmoins la même référence, pour laquelle ses cartes de contrôle (§2) indiquent une moyenne  $m_c$  et un écart-type  $\sigma_c$ . Il prononce la réception sur un échantillon (§1) et, comme la distribution  $b(X)$  n'est pas normale, il doit faire son contrôle par attributs [2].

Soit  $T_c$  la mesure de tri, c'est-à-dire la mesure minimale entraînant le rejet d'un individu chez le client; nous poserons :

$$T_c = m_c + k_c \sigma_c .$$

Pour une valeur donnée de  $k_c$ , la probabilité de rejet des individus par le client est :

$$P_c = F \{ (X - T_c) / \sigma_c \} ,$$

en désignant par  $F$  la fonction de répartition de la loi normale. Le nombre moyen de litigieux, c'est-à-dire le nombre moyen d'individus acceptés par le fournisseur mais rejetés par le client, est alors (fig. 2) :

$$C = \int_0^{\infty} a(X) P_f P_c dX$$

et la proportion de litigieux à laquelle on doit s'attendre en moyenne est :

$$R_c = C/B.$$

Nous avons continué les calculs précédents (§3) en simulant plusieurs types de contrôle chez le client, c'est-à-dire en faisant varier  $\sigma_c/\sigma_a$  et  $k_c$ . La proportion de litigieux dépend donc de cinq paramètres. Par un raisonnement analogue à celui utilisé au paragraphe précédent, nous lui chercherons une borne supérieure qui soit :

- 1) indépendante des opérations effectuées chez le fournisseur et de la fidélité du contrôle chez le client,
- 2) susceptible de n'être dépassée (supérieurement) que si la proportion de défectueux dans le lot livré est supérieure à la proportion maximale acceptable D.

Si nous fixons  $D_b = D$ , nous pourrons tracer les courbes donnant  $R_c$  en fonction de  $k_c$ , pour diverses valeurs des autres paramètres. La figure 5 donne quel-

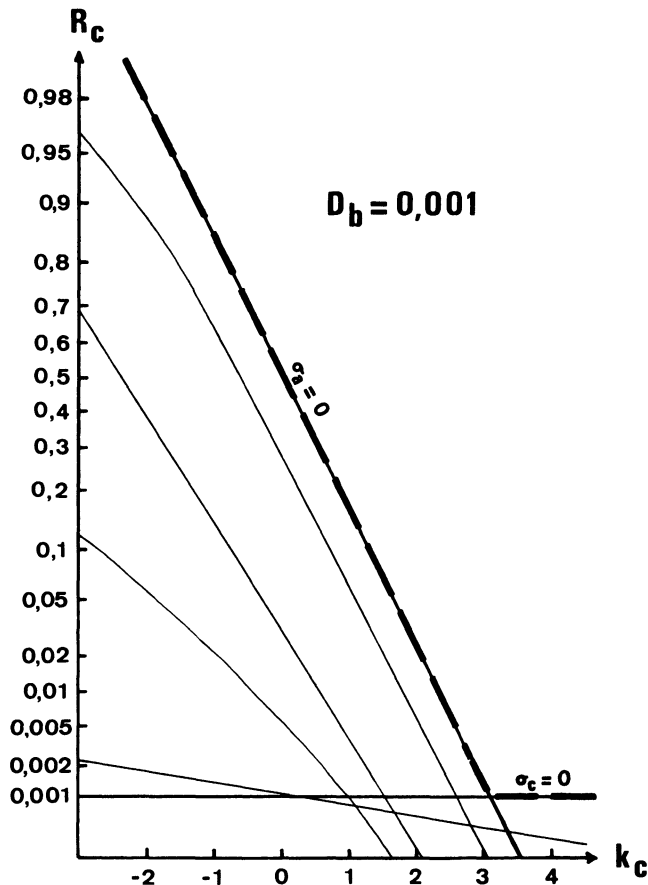


FIG. 5. — Proportion de litigieux en fonction du niveau de tri, pour une proportion de défectueux dans le lot livré égale à 0,001.

ques-unes de ces courbes pour  $D = 0,001$  ; on remarque que toutes ces courbes sont situées au-dessous de l'une des deux courbes suivantes :

- 1) la courbe  $R_c = D$  ; elle correspond à  $\sigma_c = 0$  et on a alors  $R_c = D_b$ , quel que soit  $k_c$ ,
- 2) la courbe  $R_c = 1 - F(k_c)$ , en désignant par  $F$  la fonction de répartition de la loi normale ; elle correspond à  $\sigma_a = 0$  et la distribution observée est alors normale, de moyenne  $m_a = m_c$  et d'écart-type  $\sigma_c$ .

Ces deux courbes se coupent pour :

$$D = 1 - F(k_c)$$

et il sera commode de choisir précisément comme borne supérieure de  $R_c$  la valeur  $D$ , à condition que le niveau de tri soit déterminé par cette relation (fig. 6).

Réciproquement, si la proportion de litigieux est supérieure à la borne supérieure que nous venons de trouver, nous pourrions affirmer que la proportion de défectueux est en moyenne supérieure à  $D$ , donc rejetale. A une qualité livrée acceptable  $D$  correspondent donc un niveau de tri  $k_c$  et une proportion maximale de litigieux  $D$  qui ne sera en moyenne dépassée que si  $D_b > D$  ; par exemple, si  $D = 0,001$  (fig. 5), on prendra  $k_c = 3,09$ . La figure 6 montre comment  $k_c$  varie en fonction de  $D$ .

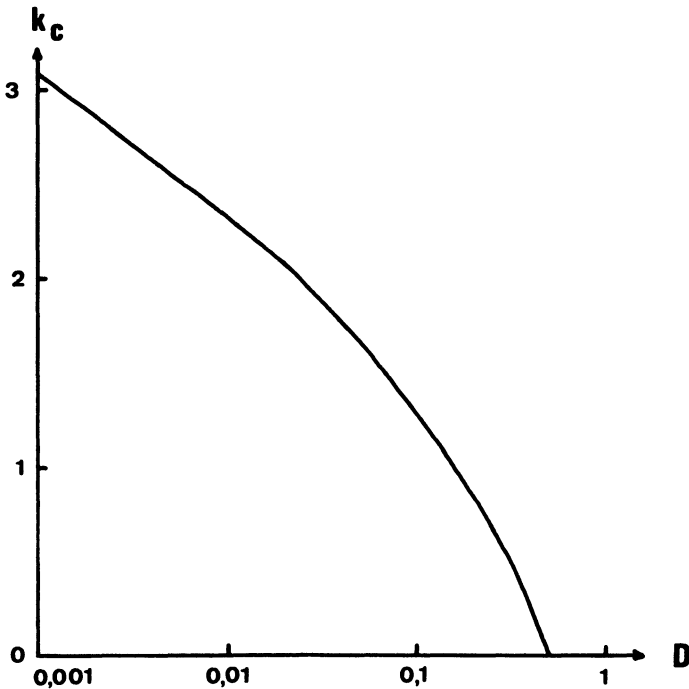


FIG. 6. – Niveau de tri chez le client en fonction de la qualité livrée acceptable.

Pour un échantillon, nous proposons donc la procédure ci-dessous :

- 1) déterminer la taille de l'échantillon et le critère A d'acceptation pour un niveau de qualité acceptable égal à D [2],
- 2) déterminer le niveau  $k_c$  en fonction de D (fig. 6) et en déduire la mesure de tri  $T_c = m_c + k_c \sigma_c$ ,
- 3) prélever l'échantillon au hasard et le contrôler unitairement ; soit x la mesure maximale d'un individu,
- 4) compter le nombre a d'individus pour lesquels  $x > T_c$  ; si  $a \leq A$ , le lot sera accepté ; sinon, il sera rejeté.

## 5. – CONCLUSION

Nous avons donc établi un ensemble de procédures qui permettent :

- 1) au fournisseur d'obtenir en moyenne une qualité donnée pour le lot livré, après un contrôle à 100 % du lot fabriqué,
- 2) au client d'éprouver cette qualité sur un échantillon du lot livré, sans créer de litiges,

quelles que soient la qualité du lot fabriqué et la fidélité des appareils de contrôle. Par l'adoption de mesures de tri liées à la fidélité des appareils, fournisseur et client ont intérêt à obtenir la meilleure fidélité, l'un pour qu'il rejette le moins possible d'individus bons et l'autre pour qu'il accepte le moins possible de lots non conformes ; mais, comme cette fidélité détermine l'intervalle entre les limites de contrôle, chacun a intérêt à adopter une fidélité qui soit compatible avec des réglages stables.

Il se peut qu'il existe des mesures de tri qui soient plus efficaces que celles que nous avons proposées. Leur recherche nécessiterait cependant de mieux connaître les lois de probabilité auxquelles obéissent le taux de rebut et la proportion de litigieux.

Cette étude a été faite dans le cadre de l'assurance de qualité pour la fourniture des gaines destinées au combustible du réacteur nucléaire Superphénix ; l'individu est alors un tube métallique, le caractère contrôlé est la dimension des défauts éventuels (fissures, incrustations, . . .), l'appareil de contrôle mesure l'amplitude des échos ultrasonores provoqués par ces défauts et la référence est un tube comportant des fentes calibrées [3].

## REMERCIEMENTS

Nous remercions Monsieur J. BOUDAILLE pour ses utiles remarques.

## REFERENCES

- [1] “Contrôle en cours de fabrication. Carte de contrôle”, norme française NF X 06-031 (1970).
- [2] “Règles et tables d'échantillonnage pour les contrôles par attributs et par décompte du nombre de défauts”, norme française NF X 06-022 (1967).
- [3] J. PERDIJON. – “Le contrôle des tubes par ultrasons”, *Pour la Science*, n° 2, 93 (1977).