MAX PINHAS

Deux études de théorie mathématique des assurances

Revue de statistique appliquée, tome 29, nº 2 (1981), p. 43-48
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1981__29_2_43_0>

DEUX ETUDES DE THEORIE MATHEMATIQUE DES ASSURANCES

Max PINHAS

COUTS DE GESTION ET NIVEAU DE FRANCHISE : UNE MESURE DE LEUR EFFET SUR CERTAINES OFFRES D'ASSURANCE

Le principe de l'indice de sécurité, dont à plusieurs reprises (voir par exemple [1] ou [2]) nous avons préconisé l'emploi en théorie mathématique des assurances, a pour attributs, non seulement de posséder une interprétation économique simple en termes de fonction d'utilité, mais aussi de permettre à l'assureur de garder la maîtrise de la probabilité de ruine, tout en lui laissant le loisir de considérer chaque contrat de façon isolée.

Rappelons succinctement les exigences de ce principe : la prime p relative à un risque Z (variable aléatoire) doit être évaluée selon la formule $p = \frac{1}{\tau} \operatorname{Log} E\, e^{\tau Z}$ (fonction croissante de τ), où l'indice de sécurité τ, positif, dépend du fonds de réserve initial r et du majorant ϵ de la probabilité de ruine conformément à l'équation $\epsilon = e^{-\tau r}$.

Dans cet article l'accent est mis sur un autre avantage de l'emploi de ce principe : la possibilité d'introduire aisément les coûts de gestion. Nous proposons en effet une mesure précise de l'impact des frais de gestion sur l'offre d'assurance, qui explique aussi comment une variation du niveau de franchise peut altérer la compétitivité de la compagnie.

1. Hypothèses et notations

Le contrat type d'assurance de répartition que nous étudions présente les caractéristiques suivantes :

- N nombre aléatoire de réclamations pendant la durée du contrat (durée courte, ce qui autorise de négliger l'actualisation, cf [3]) ; $p_n = P(N = n)$ et $\varphi(u) = E u^N$.
- les réclamations sont des v.a. indépendantes (entre elles, et par rapport à N) distribuées comme la variable X, absolument continue, de densité f, de fonction de répartition F et de support $[0, x_0]$,
- si a est le niveau de franchise retenu, $0 \leqslant a \leqslant x_0$, pour chaque réclamation, l'indemnisation sera nulle si l'événement $(X \leqslant a)$ est réalisé, égale à $X - a$ dans le cas contraire,

Mots clés : **Offre d'assurance. Niveau de franchise. Coûts de gestion. Probabilité de ruine. Inégalité de Royden.**

• $M(a)$ nombre aléatoire d'indemnisations,

• α coût fixe de gestion d'un contrat, β coût par réclamation, γ coût additionnel occasionné par chaque indemnisation,

• le risque couvert par l'assureur est donc représentable par

$$Z(a) = \alpha + N\beta + M\gamma + \sum_0^M X(a),$$

où $X_0(a) = 0 \ \forall a$, et pour $i \geqslant 1$ les $X_i(a)$ sont des variables indépendantes, de densité $\dfrac{f(x+a)}{1-F(a)}$, et de support $[0, x_0 - a]$;

• nous posons enfin

$$g_a(\tau) = E\, e^{\tau X_i(a)} = \frac{1}{1-F(a)} \int_a^{x_0} e^{\tau(x-a)} f(x)\, dx \quad (i \geqslant 1).$$

2. Evaluation de la prime en fonction des coûts et du niveau de franchise

Le calcul de la prime $p = \dfrac{1}{\tau} \operatorname{Log} E\, e^{\tau Z(a)}$ s'élabore en plusieurs étapes :

• $E(e^{\tau Z(a)} \mid N = n, M = m) = e^{\tau(\alpha + n\beta + m\gamma)} [g_a(\tau)]^m$.

• Par ailleurs il est clair que la distribution conjointe de (N, M) s'écrit :

$$P(N = n, M = m) = p_n \binom{n}{m} (F(a))^{n-m} (1 - F(a))^m$$

pour n et m entiers naturels tels que $n \geqslant m$ (la probabilité est nulle quand $n < m$).

• D'où l'espérance $E\, e^{\tau Z(a)} = e^{\tau\alpha} \varphi(e^{\tau\beta}[F(a) + (1 - F(a))\, e^{\tau\gamma} g_a(\tau)])$. Par conséquent

$$\boxed{p = \alpha + \frac{1}{\tau} \operatorname{Log} \varphi\left(e^{\tau\beta} \left[F(a) + \int_a^{x_0} e^{\tau(x+\gamma-a)} f(x)\, dx \right] \right)}\,.$$

Nous disposons ainsi d'une formule permettant d'apprécier la sensibilité de la prime aux coûts de gestion et au niveau de franchise.

3. Un cas particulier important (loi de Poisson)

Nous spécifions à présent la distribution de N : loi de Poisson de paramètre λ. Alors la fonction génératrice φ est : $\varphi(u) = e^{\lambda(u-1)}$ et donc la prime prend l'expression élémentaire :

$$\boxed{p = \alpha + \frac{\lambda}{\tau} \left(e^{\tau\beta} \left[F(a) + \int_a^{x_0} e^{\tau(x+\gamma-a)} f(x)\, dx \right] - 1 \right)}\,.$$

4. Un exemple d'offre concurrentielle d'assurance

Nous examinons dans ce paragraphe les offres p_1 et p_2 émanant de deux compagnies rivales qui ne se distinguent l'une de l'autre que par leurs coûts α et γ (N suit à nouveau une loi de Poisson). Nous supposons que les paramètres vérifient les inégalités : $\alpha_1 > \alpha_2$, $\gamma_1 < \gamma_2$ et

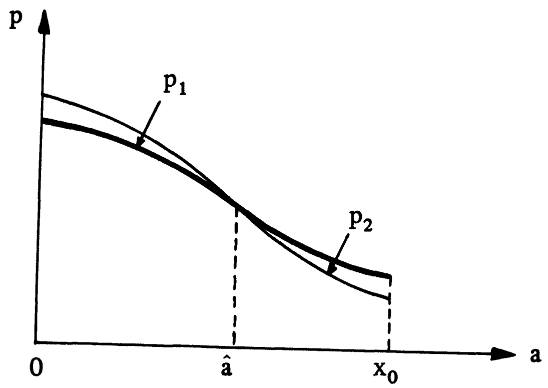
$$\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{\lambda}{\tau} e^{\tau\beta}(e^{\tau\gamma_1} - e^{\tau\gamma_2}) \int_0^{x_0} e^{\tau x} f(x)\, dx < 0 .$$

Il en résulte que la différence des primes $p_1 - p_2$ évolue ainsi en fonction de a :

$$p_1(0) - p_2(0) < 0, \; p_1(x_0) - p_2(x_0) > 0, \; \frac{d}{da}(p_1 - p_2) \geqslant 0 .$$

D'où l'offre concurrentielle :

$$a \mapsto p(a) = \min(p_1(a), p_2(a)).$$



Nous constatons finalement que la première compagnie est plus compétitive pour $a \in [0, \hat{a}[$, tandis que la seconde l'emporte sur l'intervalle $]\hat{a}, x_0]$.

[1] PINHAS. – "Une solution d'entente en matière de coassurance". *Publications Econométriques*, volume XII, Fascicule 2, 1979.

[2] PINHAS. – "Assurance à la carte et prévention". *Actes du Colloque d'Econométrie,* Lyon 1980.

[3] PINHAS. – "Evolution des primes d'assurance en période d'inflation". *Bulletin de l'Association des actuaires diplômés IFSA,* n° 37, septembre 1978.

PROBABILITE DE RUINE ET INEGALITE DE ROYDEN

Parmi les nombreuses généralisations existant à ce jour de l'inégalité de Markov celle obtenue par Royden [1] offre le double avantage d'une mise en œuvre simple et d'un champ d'application vaste.

Son emploi en théorie mathématique des assurances permet par exemple d'obtenir [2] un majorant fort commode pour la prime liée aux contrats avec franchise ("stop-loss"), quand bien même ne seraient disponibles que les premiers moments de la distribution du risque.

C'est également au calcul actuariel qu'est consacrée la présente utilisation de l'inégalité de Royden : notre approximation par excès de la probabilité de ruine pourra dans certains cas concurrencer l'évaluation évidente qu'engendre l'inégalité de Markov

I. Le modèle classique de risque actuariel positif

Dans ce modèle le risque total concernant la période $[0, t]$ est décrit par un processus de Poisson composé :

$$X(t) = \sum_{0}^{N(t)} Y_j$$

$Y_0 = 0$. Les Y_j, pour $j \geqslant 1$ (dédommagement relatif à la j-ème réclamation) sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées comme la v.a. $Y \geqslant 0$, de caractéristiques :

$$EY = m_1 \qquad EY^2 = m_2 \qquad EY^3 = m_3 .$$

Quant à $N(t)$ – processus de Poisson uniforme de paramètre λ – il indique le nombre de réclamations formulées entre les instants 0 et t.

On suppose d'autre part que l'assureur perçoit globalement à titre de prime la quantité monétaire $\lambda(m_1 + a)$ par unité de temps ($\lambda a > 0$, chargement de sécurité unitaire). L'évolution du fonds de réserve se formule donc, pour $t \geqslant 0$: $r + \lambda(m_1 + a)\, t - X(t)$, $r > 0$ valeur initiale.

Il est alors utile d'introduire la v.a. non négative :

$$Z = \sup_{0 \leqslant t < \infty} [X(t) - \lambda(m_1 + a)\, t]$$

de fonction de répartition $F(z) = P(Z < z)$, afin de pouvoir désigner commodément la ruine de l'assureur par l'événement $(Z > r)$. Sur cette v.a. on dispose de quelques résultats importants, tels que [3] :

$$P(Z = 0) = \frac{a}{a + m_1} \qquad EZ = \frac{m_2}{2a} \qquad EZ^2 = \frac{m_3}{3a} + \frac{m_2^2}{2a^2} .$$

II. L'inégalité de Royden

Si U est une v.a. unimodable, de mode 0, et de moments absolus $E\,|U| = \nu_1$, $EU^2 = \nu_2$, alors la probabilité $P(|U| \geqslant r)$ est majorée par :

(i) $1 - \dfrac{r}{2\nu_1}$ si $0 \leqslant r \leqslant \nu_1$

(ii) $\dfrac{\nu_1}{2r^T}$ si $\nu_1 \leqslant r \leqslant \dfrac{3\nu_2}{4\nu_1}$

(iii) $\dfrac{4\nu_1^2}{3\nu_2} - \dfrac{8\nu_1^3 r}{9\nu_2^2}$ si $\dfrac{3\nu_2}{4\nu_1} \leqslant r \leqslant \dfrac{\nu_2}{\nu_1}$

(iv) $\dfrac{3\nu_2 - 4\nu_1^2}{3\eta^2 - 8\nu_1\eta + 3\nu_2}$ si $\dfrac{\nu_2}{\nu_1} \leqslant r.$

Nous complétons cet énoncé en indiquant que :

1) η désigne la plus grande racine de l'équation

$$2\eta^3 - (3r + 4\nu_1)\eta^2 + 8\nu_1 r\eta - 3\nu_2 r = 0.$$

2) la distribution de U, qui par hypothèse admet une densité non décroissante pour $u < 0$ et non croissante pour $u > 0$, peut comporter une masse positive à l'origine.

III. Majoration de la probabilité de ruine

Nous considérons à présent une v.a. U de fonction de répartition G construite à partir de F par le procédé suivant :

$$G(u) = \frac{1}{2}(1 - F(|u|+)) \quad \text{pour} \quad u \leqslant 0$$

$$G(u) = \frac{1}{2}(1 + F(u)) \quad \text{pour} \quad u > 0.$$

Il est clair qu'entre les v.a. U et Z existent les relations :

$$P(U = 0) = P(Z = 0) \ ; \ P(|U| \geqslant r) = P(Z \geqslant r).$$

$$E|U| = EZ \ ; \ EU^2 = EZ^2.$$

Nous constatons enfin que la v.a. U remplit les conditions de l'inégalité de Royden dès lors que la distribution de Z possède une densité non croissante pour $z > 0$. *Nous supposerons donc cette dernière hypothèse vérifiée* (1). En résulte alors une majoration évidente de la probabilité de ruine. Toutefois avant de conclure cette étude il nous faut prouver qu'il existe bien des valeurs des paramètres pour lesquelles la présente approximation par excès est meilleure que les majorants markoviens construits avec *la même information* (a, m_1, m_2, m_3) à savoir $\dfrac{\nu_1}{r}$ et $\dfrac{\nu_2}{r^2}$, et que le majorant naturel $\dfrac{m_1}{m_1 + a}$.

Examinons par exemple le cas (ii) :

$$\frac{m_2}{2a} = \nu_1 \leqslant r \leqslant \frac{3\nu_2}{4\nu_1} = \frac{m_3}{2m_2} + \frac{3m_2}{4a}$$

(1) Cette hypothèse n'est pas incompatible avec la nature propre de Z. Voir par exemple le cas où les risques Y_j sont exponentiels $(j \geqslant 1)$ [3].

L'inégalité (ii) sera meilleure que celle fournie par les majorants markoviens ou par $\dfrac{m_1}{m_1 + a}$ si est vérifiée (A) : $\dfrac{\nu_1}{2r} < \min\left\{\dfrac{m_1}{a + m_1}, \dfrac{\nu_1}{r}, \dfrac{\nu_2}{r^2}\right\}$ (A). Décomposons cette condition :

- $\dfrac{\nu_1}{2r} < \dfrac{\nu_2}{r^2} \iff r < \dfrac{2\nu_2}{\nu_1}$

- $\dfrac{\nu_1}{2r} < \dfrac{m_1}{a + m_1} \iff r > \dfrac{\nu_1}{2}\left(1 + \dfrac{a}{m_1}\right).$

Montrons que les conditions sur r sont compatibles, c'est-à-dire que $\dfrac{\nu_1}{2}\left(1 + \dfrac{a}{m_1}\right) < \dfrac{3\nu_2}{4\nu_1}$. Or un calcul immédiat fait apparaître cette inégalité comme une conséquence évidente de l'inégalité $m_1 m_3 \geqslant m_2^2$, qui n'est autre que l'inégalité de Schwarz appliquée aux v.a. $Y^{1/2}$ et $Y^{3/2}$.

Finalement nous observons que (A) est vérifiée pour les valeurs de r appartenant à l'intervalle

$$\left]\max\left\{\nu_1, \frac{\nu_1}{2}\left(1 + \frac{a}{m_1}\right)\right\}, \frac{3\nu_2}{4\nu_1}\right].$$

[1] KARLIN, STUDDEN. – Tchebycheff system, with applications in analysis and statistics. Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers 1966.

[2] De GROOT, GOOVAERTS. – On generalized Tchebycheff inequalities for stop-loss premiums. *Bulletin des Actuaires diplômés ISFA*, n° 39, septembre 1979.

[3] TAKACS. – Combinatorial methods in the theory of stochastic processes (John Wiley).