R. LAFOSSE

# Analyse de concordance de deux tableaux : monogamies, simultanéités et découpages

*Revue de statistique appliquée*, tome 45, nº 3 (1997), p. 45-72
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1997__45_3_45_0>

*Rev. Statistique Appliquée*, 1997, **XLV** (3), 45-72

# ANALYSE DE CONCORDANCE DE DEUX TABLEAUX : MONOGAMIES, SIMULTANÉITÉS ET DÉCOUPAGES

R. Lafosse

*Lab. de Statistique et Probabilités, UMR C55830*
*Université Paul Sabatier, 118 rte de Narbonne,*
*31062 Toulouse Cedex*

## RÉSUMÉ

Sans se fonder sur la résolution de problèmes d'optimisation numérique, on définit les composantes des analyses factorielles les plus usuelles d'une ou de deux matrices à partir d'une propriété de non corrélation, apportant ainsi pour deux tableaux de nouveaux arguments en faveur de la régression simple simultanée.

Sans référence à la notion de rotation, l'inertie du tableau analysé pour sa concordance avec l'autre est découpée en trois sous-ensembles de contributions : une concordance imbriquée à une discordance et complétée par une notion de bruit. Ainsi le potentiel de prédiction linéaire d'un tableau est-il découpée en trois parts; ainsi dans l'étude de l'analogie de deux distributions multivariées, la discordance peut-elle correspondre à une notion d'effet stéréo. Pour chaque sous-ensemble, on ajoute à la notion de contribution des individus une notion de participations partielles des variables du tableau analysé, permettant de préciser l'importance prise par chacune dans chaque sous-espace, et menant à une possibilité de biplots.

***Mots-clés :*** *Corrélation linéaire, analyses factorielles, concordance de deux matrices, régression simple simultanée, découpages, biplots.*

## ABSTRACT

The components of factor analyses of one or two matrices are defined using a zero-correlation property rather than through an optimization problem. For two matrices this yields new arguments for simultaneous simple regression.

The variation in a table analysed with respect to its concordance with another is partitioned into three parts indicating concordance, discordance, and noise. A such partition relative to the prediction potential of a matrix gives the concordance for the explicative part. If applied to the comparison of two multivariate distributions, the discordance can be viewed as a sort of stereo effect. For each part, measures of the importance of the contributions of the individuals and partial participations of the variables are developed and a biplotting technique described.

***Keywords :*** *Linear correlation, Factor analyses, Agreements between two matrices, Simultaneous simple regression, Splittings, Biplots.*

## 1. Introduction

Les couples de composantes définis par Tucker (1958) dans le but de comparer deux jeux de corrélations internes apparaissent dans ce papier d'une certaine manière comme les seuls couples isolables définissables.

La définition des couples de Tucker ainsi introduite n'est donc pas ici fondée sur l'optimisation d'un critère de covariance qui donne les valeurs singulières successives de la matrice des inter covariances, mais plutôt fondée sur une notion de découpage. Elle n'implique pas un classement de ces couples, ce qui autorise tout classement en association avec un objectif particulier. Le calcul s'introduit cependant naturellement avec cette définition depuis l'obtention des vecteurs appariés de la décomposition en valeurs singulières de la matrice des inter covariances.

En fait la définition donnée des couples de Tucker est élargie en introduisant des métriques quelconques dans les deux espaces d'individus relatifs aux deux tableaux, et les deux composantes d'un même couple sont dites concordantes dans cette approche plus générale. La concordance dont ces couples sont porteurs est fondée sur les corrélations au carré entre composantes de chaque paire. Les composantes d'un même couple apparaissent alors comme composantes monogames, une composante ne pouvant avoir de corrélation non nulle qu'avec son propre partenaire.

La famille des composantes de l'ACP apparaît ainsi comme la seule définissable en termes de famille de composantes endogames.

L'ensemble des scores d'un tableau est ici partagée en trois ensembles de scores, chacune des variables et chacun des individus de ce tableau participant plus ou moins à chacun de ces trois ensembles.

L'un des ensembles correspond à une notion de bruit dans le tableau comparé à l'autre fondée sur l'absence de corrélations que ce bruit possède avec tout ce qui lui est extérieur, aussi bien dans l'un que dans l'autre tableau. C'est l'anti-image de Guttman (1953) qui décompose un tableau analysé par rapport à un autre, en deux tableaux appelés image et anti-image, désignant ainsi les contributions des individus à l'explication linéaire et à la non explication.

Les deux autres ensembles définis partagent l'image de Guttman en deux images.

Le fait de pouvoir définir tous les couples précités en terme de couples isolables justifie pleinement une notion de régression simple simultanée permettant d'estimer une image dite concordante. Cette régression particulière ne fait intervenir que les corrélations entre les deux composantes des couples monogames tout en conduisant à un découpage du tableau analysé en deux sous-ensembles de contributions. Pour définir cette image, il n'est donc plus fait référence à une rotation particulière comme précédemment en communauté (Lafosse, 1985) ou en redondance (Israëls, 1986).

La dernière image complète la décomposition de l'inertie totale du tableau comparé à l'autre et est appelée image discordante. Contrairement au bruit, elle apparaît comme celle qui est vraiment conceptuellement complémentaire de l'image concordante. Concordance et discordance constituent deux images corrélées et donc étroitement imbriquées.

A un découpage en sous-espaces de l'espace des individus engendré par chacune des images, on ajoute dans cet article une notion de participations des variables du tableau comparé à l'autre. En définisant des participations partielles relatives aux trois images, on précise l'importance du rôle joué par chaque variable dans une représentation des individus, ce qui n'était pas obtenu dans les graphiques de variables réalisés par projection (Lafosse, 1991).

Les biplots de Gabriel (1971), devenus usuels en analyse des correspondances ou en analyse discriminante, sont alors conçus d'une manière plus générale si on se réfère au fait que les métriques sont quelconques.

Quand les deux tableaux analysés sont univariés, le même coefficient de corrélation linéaire au carré des deux variables en présence peut servir aussi bien à mesurer la dépendance, une similarité des deux distributions, un pouvoir de prédiction. Quand l'analyse est relative à deux ensembles multivariés toutes ces notions se séparent et sont ici abordées depuis des analyses de concordance particulières. Quelques particularités induites par cette approche d'analyses usuelles ou moins usuelles sont alors relevées.

Quand cela est possible et selon un usage fréquent pour nombre de revues, les formules sont écrites dans cet article dans un langage matriciel compact directement portable dans des langages de programmation tels que fortran90, Matlab, ou autre.

## 2. Analyse de concordance

Soient $X$ $n \times p_1$ et $Y$ $n \times p_2$ deux matrices. Les ensembles respectifs de $p_1$ et $p_2$ colonnes définissent deux ensembles de variables centrées mesurées sur un même ensemble de n individus. La matrice diagonale des poids des individus est notée $D$.

Les matrices $M$ et $N$ étant celles de deux métriques euclidiennes, on veut comparer la distribution multivariée des individus de $(\Re^{p_1}, M)$ à celle de $(\Re^{p_2}, N)$.

Pour atteindre cet objectif, on ramène la comparaison multivariée à des comparaisons univariées entre composantes de couples, ces couples étant construits de façon à pouvoir les considérer isolément.

### *2.1 Définition des couples de composantes concordantes*

Soit $s$ un nombre entier fixé entre 1 et $\min(p_1, p_2)$. L'inertie totale de $(X, M)$ est décomposée à partir de $s$ vecteurs $M$-orthonormés $a_i$ de $(\Re^{p_1}, M)$ en au plus $(s+1)$ parts distinctes, associées aux $s$ projections des individus du tableau $X$ sur chacun des axes $a_i$ et à la projection sur un sous-espace supplémentaire orthogonal éventuel.

Un découpage de l'inertie totale de $Y$ s'effectue à partir de vecteurs $N$-orthonormés $b_i$ de $(\Re^{p_2}, N)$.

Les corrélations linéaires non nulles que les composantes $XMa_i, i = 1, \ldots, s$, possèdent avec des composantes $YNb_j, j = 1, \ldots, s$, associent les parts d'inertie distinctes de $X$ aux parts d'inertie distinctes de $Y$.

Parmi toutes les composantes précédentes envisageables, on recherche maintenant celles formant des couples $(XMa_i, YNb_i)$, se constituant parce que la composante $XMa_i$ s'associe tout particulièrement à la composante $YNb_i$. En effet, on voudrait que la participation aux liens de corrélation entre $XMa_i$ et les variables de $Y$ et celle entre $YNb_i$ et les variables de $X$ s'expriment au moyen d'une seule corrélation non nulle : celle entre $XMa_i$ et $YNb_i$.

Un couple sera dit formé de *composantes concordantes* quand la corrélation de la composante $YNb_i$ avec toute composante $XMa_j$ autre que $XMa_i$ est nulle, et quand la corrélation de la composante $XMa_i$ avec toute composante de $YNb_j$ autre que $YNb_i$ est nulle également. La corrélation non nulle des deux composantes concordantes d'un couple $(XMa_i, YNb_i)$ associe ainsi de façon biunivoque les deux parts d'inertie respectives relatives aux axes $a_i$ et $b_i$.

On note $P_1$ la matrice constituée des $s$ colonnes $a_i$ et $Q_1$ celle constituée des $s$ colonnes $b_i$.

On note $P$ la matrice $P_1$ complétée de $p_1$ - $s$ vecteurs colonnes supplémentaires, l'ensemble des vecteurs colonnes formant une base $M$-orthonormée $\{a_i\}$ de $\Re^{p_1}$.

On note $Q$ la matrice $Q_1$ complétée de $p_2$ - $s$ vecteurs colonnes supplémentaires, l'ensemble des vecteurs colonnes formant une base $N$- orthonormée $\{b_i\}$ de $\Re^{p_2}$.

On note $\Delta$ une matrice $s \times s$ diagonale définie positive.

Les corrélations $\rho_i^2 = \rho^2(XMa_i, YNb_i), i = 1, \ldots, s$, étant supposées non nulles, pour définir des couples de composantes concordantes on veut en plus :

$$\rho^2(XMa_i, YNb_j) = 0, \;\; i \neq j, \;\; i = 1, \ldots, s, \;\text{ et }\; j = 1, \ldots, p_2,$$

et

$$\rho^2(XMa_i, YNb_j) = 0, \;\; i \neq j, \;\; i = 1, \ldots, p_1, \;\text{ et }\; j = 1, \ldots, s.$$

D'où les égalités nécessaires et suffisantes entre matrices :

$$Q'NY'DXMP_1 = \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P'MX'DYNQ_1 = \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque $P$ et $Q$ sont matrices respectivement M et N orthogonales, on a :

$$PP'M = I_{p_1} \quad \text{et} \quad QQ'N = I_{p_2}.$$

D'où : $$Y'DXMP_1 = Q \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X'DYNQ_1 = P \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Finalement, on veut que $P_1$ et $Q_1$ satisfassent aux deux égalités :

$$Y'DXMP_1 = Q_1\Delta \quad \text{et} \quad X'DYNQ_1 = P_1\Delta. \tag{1}$$

Soit $r$ le rang de $X'DY$.

Soit une décomposition en valeurs singulières de la matrice $X'DY$, cette matrice étant ici considérée comme celle d'une application linéaire entre espaces métriques $(\Re^{p_2}, N)$ et $(\Re^{p_1}, M)$ :

$$X'DY = A\Delta B', \tag{2}$$

avec :
$$A'MA = B'NB = I_r. \tag{3}$$

On a donc les relations :

$$X'DYNB = A\Delta \quad \text{et} \quad Y'DXMA = B\Delta, \tag{4}$$

$$Y'DXMX'DYNB = B\Delta^2 \quad \text{et} \quad X'DYNY'DXMA = A\Delta^2,$$

$$B'NY'DXMA = \Delta. \tag{5}$$

La matrice diagonale $r \times r\Delta$ contient ici (et pour la suite de l'exposé) les valeurs singulières de $X'DY$.

Les égalités (1) et (4) indiquent que, pour une valeur de s fixée entre 1 et $r$, les colonnes de $P_1$ peuvent être constituées d'un sous-ensemble de $s$ colonnes prises parmi l'ensemble des $r$ colonnes de $A$, celles de $Q_1$ étant alors le sous-ensemble correspondant des colonnes de $B$.

Aux ordres de multiplicité près des valeurs singulières et aux signes près des couples appariés, un couple $(a_i,\ b_i)$ pouvant être remplacé par un couple $(-a_i,\ -b_i)$, tous les vecteurs solutions sont donc issus de cette décomposition.

Le calcul se réalise en recherchant les vecteurs appariés de la décomposition en valeurs singulières usuelle de la matrice :

$$M^{1/2}X'DYN^{1/2} = P\Delta Q',$$

où $P'P = Q'Q = I_r$.

La solution est alors donnée par :

$$A = M^{-1/2}P \quad \text{et} \quad B = N^{-1/2}Q.$$

Les mêmes couples de composantes auraient pu être définis comme solutions successives du problème d'optimisation relatif au critère :

$$f(a,\ b) = \text{cov}\,(XMa,\ YNb),$$

puisque sous les contraintes $A'MA = B'NB = I_r$, les optima successifs constituent les valeurs singulières.

La définition des couples en temps que couples de composantes concordantes est quant à elle fondée sur un concept de monogamie, une composante n'ayant qu'une seule composante pour partenaire dans l'autre tableau. Par suite, un couple monogame apparaît comme isolable des autres couples monogames.

Cependant le système $\{XMa_i\}$ est en général formé de composantes corrélées, comme l'est aussi le système $\{YNb_i\}$). C'est dire seulement que chacun des deux systèmes de composantes permettent de synthétiser l'information interne à $X$ mise en concordance avec l'information interne à $Y$, comme les composantes principales de l'ACP le permettent pour un tableau (de façon plus simplifiée cependant). Quand, par exemple, $r = p_1$, il s'agit de toute l'information interne à $X$, dans la mesure où on a :

$$\sum_1^{p_1} XMa_ia_i' = X.$$

De plus cette définition qui n'est pas attachée à l'optimisation d'un critère numérique, n'implique pas pour le moment un ordre dans le rangement des couples solutions.

**Remarques :**

On vérifie aisément que la notion de couples de composantes concordantes est indépendante de toute isométrie réalisée dans $(\Re^{p_1}, M)$ ou dans $(\Re^{p_2}, N)$.

Les composantes principales d'un triplet statistique $(X, M, D)$ sont définissables comme composantes endogames, étant les seules qui ne soient corrélées qu'avec elles-mêmes tout en décomposant l'inertie totale de $X$ en parts distinctes. Cela apparaît avec $(Y, N, D) = (X, M, D)$, les deux composantes d'un couple monogame étant alors identiques à une composante principale de l'ACP de $(X, M, D)$.

### *2.2. Image de X concordante avec Y*

On veut connaître le rôle joué par chaque ligne et par chaque colonne de la matrice $X$ dans cette concordance pour le moment relevée sur les r couples de composantes concordantes.

Guttman (1953) décompose une matrice $Xn \times p_1$ en somme de deux matrices de dimension $n \times p_1$ appelées image et anti-image. La matrice $P_Y = Y(Y'DY)^{-1}Y'D$ désignant le projecteur $D$- orthogonal sur le sous-espace de $\Re^n$ engendré par les colonnes de $Y$, l'image est la matrice $P_YX$ qui permet d'analyser la part de $X$ expliquée par $Y$. Comme l'inertie de $X$ est égale à la somme de l'inertie de l'image et de l'anti-image, les contributions des lignes de $X$ à l'intensité de l'explication obtenue sont définissables à partir des lignes de la matrice $P_YX$.

Par analogie, on veut ici définir une matrice $n \times p_1$ correspondant à la notion d'image concordante telle que la décomposition de $X$ en une image concordante et une image non concordante corresponde à un découpage de l'inertie totale de $X$ en deux parts distinctes.

Pour construire l'image concordante on se propose de procéder par régression simple simultanée. La simultanéité est une notion précédemment introduite par Fortier (1966) qui fait référence à $r$ équations simultanées pour définir dans une matrice ce qui est linéairement explicable par une autre matrice, c'est à dire pour définir l'image de Guttman (Ten Berge (1985) remarque l'équivalence entre l'approche de Fortier et de Wollenberg (1977)).

Israëls (1984, 1987) considère cette régression simultanée en analyse de la redondance sur variables qualitatives, ou nomme régression canonique (CRA) la régression simultanée composée des régressions partielles d'Hotelling (1935). Ces simultanéités, considérées une fois un problème de régression posé, concernent des couples expliqués-explicatifs de l'analyse de la redondance ou les couples canoniques de l'analyse canonique classique de deux tableaux.

La justification donnée ici à la simultanéité provient de ce que par construction les couples de composantes concordantes peuvent être considérés isolément. Cette justification peut aussi servir pour les couples expliqués-explicatifs ou canoniques (*cf.* section 3).

On note $\operatorname{diag}(C)$ la matrice diagonale ayant pour diagonale la diagonale d'une matrice carrée $C$.

On pose maintenant : $C = (YNB)'D(YNB)$.

Gérant séparément chacun des couples de composantes concordantes de sorte que les seules corrélations impliquées soient les r corrélations entre les deux composantes de chaque couple, on effectue r régressions simples séparées obtenues en régressant les composantes $XMa_i$ sur leurs composantes respectives $YNb_i$. Cela revient à estimer la matrice $XMA$ à partir de $YNB$ d'une façon particulière, en usant de la matrice de régression :

$$YNB[\operatorname{diag}(C)]^{-1}(YNB)'D$$

et non en usant de la matrice de régression :

$$YNB(C)^{-1}(YNB)'D.$$

On note $D_a$ la matrice diagonale des coefficients des r régressions séparées. Les valeurs $\rho_i$ dénotant les corrélations entre $XMa_i$ et $YNb_i$, $D_a$ contient donc les valeurs :

$$\left(\frac{\operatorname{cov}(XMa_i, YNb_i}{\operatorname{var}(YNb_i)}\right) = \rho_i \left(\frac{\operatorname{var}(XMa_i)}{\operatorname{var}(YNb_i)}\right)^{1/2}$$

Comme $B'NY'DXMA = \Delta$ contient les covariances entre composantes concordantes,

$$D_a = [\operatorname{diag}(C)]^{-1}\Delta, \tag{6}$$

on obtient donc la matrice estimée :

$$YNB[\operatorname{diag}(C)]^{-1}(YNB)'DXMA = YNBD_a. \tag{7}$$

La matrice $MAA'$ est la matrice identité quand $r = p_1$ et, sinon, est une identité partielle englobant toutes les dimensions de $\Re^{p_1}$ concernées par la concordance avec $Y$.

A partir de l'estimation précédente de $XMA$, faite d'une certaine manière à partir de $Y$, on se propose alors d'estimer $X$ (ou $XMAA'$) par la matrice $n \times p_1$ :

$$X_A = YNBD_aA'. \tag{8}$$

Standardisant les composantes $YNb_i$ en ramenant à 1 leurs variances, et rangeant les $r$ composantes standardisées en colonnes dans une matrice notée $K$, cette estimée de $X$ apparaît bien comme une image de $X$, puisqu'on vérifie que :

$$X_A = KK'DX. \tag{9}$$

On nommera désormais la matrice $X_A$ *image de* $X$ *concordante avec* $Y$.

(Cette estimation est donc celle proposée dans Lafosse (1985) dans un contexte de communauté, en faisant référence à la rotation Procruste. Le calcul y était en effet présentée comme une «rotated solution», si on se réfère au langage utilisé dans le contexte de l'analyse de la redondance par Israëls (1986)).

La matrice $X_T$, $n \times p_1$, définie par :

$$X_T = X - X_A = (I_n - KK'D)X, \tag{10}$$

représente alors l'image de $X$ totalement non concordante de $Y$.

**Propriété 2.2**

La variance totale de l'image concordante et celle de l'image totalement non concordante décomposent la variance totale de $X$. La variance totale expliquée dans la régression simple simultanée est égale à l'inertie totale de l'image concordante.

On a bien la deuxième proposition, puisque, à partir de la définition (8) :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(X_AMX_{A'}D) &= \operatorname{tr}(YNBD_aA'MAD_aB'NY'D) \\ &= \operatorname{tr}[(YNB)D_a^2(YNB)'D] \\ &= \operatorname{tr}[D_a^2(YNB)'D(YNB)] \\ &= \operatorname{tr}[D_a^2C] = \operatorname{tr}[D_a^2\operatorname{diag}(C)] \\ &= \operatorname{tr}[D_a\Delta] \end{aligned} \tag{11}$$

Comme $$X'DX_A = X'DYNBD_aA' = A\Delta D_aA', \tag{12}$$

on a :

$$\operatorname{tr}(X'DX_AM) = \operatorname{tr}(A\Delta D_aA'M) = \operatorname{tr}(\Delta D_a) = \operatorname{tr}(X_AMX_A'D). \tag{13}$$

La décomposition : $$X = X_A + X_T,$$
conduit à l'égalité entre matrices :

$$X'DX_A = X_A'DX_A + X_T'DX_A. \tag{14}$$

D'après (12), la matrice $X'DX_A$ est symétrique. Comme $X'_ADX_A$ l'est aussi, $X'_TDX_A$ est symétrique et l'égalité (14) est une égalité entre matrices symétriques.

Sachant que $\mathrm{tr}\,(X'DX_AM) = \mathrm{tr}\,(X_AMX'_AD) = \mathrm{tr}\,(X'_ADX_AM)$, on a :

$$\mathrm{tr}\,(X'_TDX_AM) = 0 = \mathrm{tr}\,(X'_ADX_TM). \tag{15}$$

On a donc bien finalement :

$$\mathrm{tr}\,(X'DXM) = \mathrm{tr}\,(X'_ADX_AM) + \mathrm{tr}\,(X'_TDX_TM). \tag{16}$$

Cela étant, il devient naturel de mesurer l'intensité globale de la concordance du triplet ($X$, $M$, $D$) avec le triplet ($Y$, $N$, $D$) par l'indice :

$$\mathrm{LAI}_{[(X,M,D),(Y,N,D)]} = \mathrm{tr}\,(X'_ADX_AM)/\mathrm{tr}\,(X'DXM), \tag{17}$$

le numérateur étant somme des variances expliquées de la régression simple simultanée, d'après les égalités (13) :

$$\mathrm{tr}\,(X'_ADX_AM) = \mathrm{tr}\,(D_a\Delta) = \Sigma\rho_i^2\mathrm{var}\,(XMa_i).$$

L'intensité de toute la non concordance de $X$ avec $Y$ est alors mesurée par l'indice :

$$1 - \mathrm{LAI}_{[(X,M,D),(Y,N,D)]} = \mathrm{tr}\,(X'_TDX_TM)/\mathrm{tr}\,(X'DXM). \tag{18}$$

(LAI, comme «linear agreement index»).

L'opérateur trace définissant un produit scalaire entre deux matrices permet de concevoir l'indice global comme un cosinus au carré qui mesure la proximité entre $X$ et l'image concordante. En effet, d'après les égalités (13), on a :

$$\begin{aligned}\cos^2_{(D,M)}(X, X_A) &= \mathrm{tr}^2(X'DX_AM)/\mathrm{tr}\,(X'DXM)\mathrm{tr}\,(X'_ADX_AM)\\ &= \mathrm{LAI}_{[(X,M,D),(Y,N,D)]}.\end{aligned} \tag{19}$$

L'image concordante de ($X$, $M$, $D$) avec ($X_A$, $M$, $D$) est $X_A$ et l'image concordante de ($X$, $M$, $D$) avec ($X$, $M$, $D$) est bien sûr $X$.

### 2.3. Concordance, discordance et bruit

Guttman (1953), Kaiser (1976) décomposent les scores d'un tableau linéairement analysé par rapport à un autre en deux sous-ensembles de scores, nommés image et anti-image. Nous définissons ici ce que représente les images concordantes et totalement non concordantes par rapport aux sous-ensembles de Guttman.

La variance totale de $P_Y X$ englobe celle de $X_A$ qui aussi est linéairement dépendante de $Y$ via les coefficients partiels de concordance $\rho_i^2 = \rho^2(XMa_i, YNb_i)$, $i = 1, \ldots, r$. Pour établir cela, on calcule ci-après l'image de $P_Y X$ concordante avec $Y$.

La même décomposition en valeurs singulières étant encore celle alors à considérer puisque $Y'DP_Y X = Y'DX$, les composantes concordantes sont cette fois les colonnes des matrices $P_Y XMA$ et $YNB$.

Puisque pour tout $i = 1, \ldots, r$, $[(X - P_Y X)Ma_i]'DYNb_i = 0$, on a :

$$\frac{\text{cov}\,(P_Y XMa_i,\ YNb_i)}{\text{var}\,(YNb_i)} = \frac{\text{cov}\,(XMa_i,\ YNb_i)}{\text{var}\,(YNb_i)},$$

et les coefficients de régressions sont inchangés, tout comme restent invariantes les nouvelles variances expliquées de régression simultanée. Ainsi la même image concordante $X_A$ est obtenue. Donc l'égalité $P_Y X = X_A + (P_Y X - X_A)$ correspond à un découpage de la variance totale de $P_Y X$, tout comme l'égalité $X = P_Y X + (X - P_Y X)$ découpe la variance de $X$. Finalement l'égalité suivante :

$$X = X_A + (P_Y X - X_A) + (X - P_Y X),$$

permet de découper la variance totale de X en trois parts associées aux trois images.

On pose maintenant :

$$X_D = (P_Y X - X_A) \quad \text{et} \quad X_N = (X - P_Y X).$$

En usant de la définition de $X_A$ et de l'idempotence de $P_Y$, on vérifie que les matrices suivantes sont nulles, ce qui traduit un grand nombre de corrélations nulles :

$$X_N'DY = 0; \quad X_N'DX_A = 0; \quad X_N'DX_D = 0. \tag{20}$$

On en déduit que l'anti-image $X_N$ de Guttman est indépendante de tout ce qui dans notre approche n'est pas elle-même et cette anti-image est ici nommée : *bruit de $X$ par rapport à $Y$*.

On comprend mieux ainsi pourquoi l'analyse sans le bruit n'a pas modifié l'image concordante.

L'image $X_D$, expression d'une non concordance partielle de $X$ avec $Y$, établit une notion de discordance dans la comparaison avec $Y$ plus pertinente que le bruit qui, en dehors de ce constat d'être indépendant parce que totalement non corrélé, ne peut plus faire l'objet d'aucune mise en relation. On nomme l'image $X_D$ *image discordante*.

L'image de Guttman, égale à $X_A + X_D$, imbrique donc une notion de concordance avec une notion de discordance, les deux images étant corrélées puisque la matrice $X'_A DX_D$ n'est pas nulle même si $\mathrm{tr}\,(X'_A DX_D M)$ est nulle. L'imbrication des deux notions est relative au même sous-espace de $\Re^{p_1}$. On vérifie en effet que :

$$P_Y XMAA' = P_Y X, \qquad X_A = X_A MAA'$$

alors que $$P_Y XMAA' = X_A MAA' + X_D MAA'.$$

On a donc :

$$X_D MAA' = X_D, \tag{21}$$

ce qui signifie que le système $\{a_i\}$ qui englobe toute l'image concordante englobe aussi toute l'image discordante.

Finalement, la décomposition obtenue :

$$X = X_A + X_D + X_N,$$

associée à la décomposition d'inertie

$$\mathrm{tr}\,(X'DXM) = \mathrm{tr}\,(X'_A DX_A M) + \mathrm{tr}\,(X'_D DX_D M) + \mathrm{tr}\,(X'_N DX_N M),$$

conduit à considérer trois indices globaux respectifs, celui de la concordance de $X$ avec $Y$ (indice LAI), de la discordance et du bruit, la somme de ces indices valant 1 :

$$1 = \frac{\mathrm{tr}\,(X'_A DX_A M)}{\mathrm{tr}\,(X'DXM)} + \frac{\mathrm{tr}\,(X'_D DX_D M)}{\mathrm{tr}\,(X'DXM)} + \frac{\mathrm{tr}\,(X'_N DX_N M)}{\mathrm{tr}(X'DXM)}$$

L'indice de concordance étant étroitement associable à l'indice de discordance, l'intérêt pour l'indice de totale non concordance (18) se trouve fortement affaibli, cet indice mélangeant deux notions fort disparates.

**Propriété 2.3.1**

L'imbrication de la concordance et de la discordance est nulle en moyenne relativement à chacun des axes $a_i$, sachant que pour tout $i = 1, \ldots, r$, on a l'égalité : $a'_i MX'_A DX_D Ma_i = 0$.

D'après les égalités (12), avec $\rho_i = \rho(XMa_i, YNb_i)$, on a :

$$X'DX_A Ma_i = \rho_i^2 \mathrm{var}\,(XMa_i) a_i,$$

et donc on obtient :

$$a'_i MX'DX_A Ma_i = \rho_i^2 \mathrm{var}\,(XMa_i) = \mathrm{var}\,(X_A Ma_i).$$

Comme $X = X_A + X_D + X_N$, on a :

$$a_i'MX'DX_AMa_i = a_i'MX_A'DX_AMa_i + a_i'MX_D'DX_AMa_i,$$

et ainsi :

$$a_i'MX_A'DX_DMa_i = 0. \tag{22}$$

**Propriété 2.3.2**

L'indice global LAI et les indices partiels $\rho_i^2$ sont des indices de concordance d'autant plus faibles que le bruit et l'image discordante sont importantes.

Quand $P_YX$ est comparé à $Y$ à la place de $X$, c'est à dire quand on supprime le bruit, les indices partiels de concordance s'accroissent.

Les indices de concordance partiels $\rho^2(P_YXMa_i,\ YNb_i)$ prennent des valeurs plus élevées que les indices $\rho_i^2 = \rho^2(XMa_i,\ YNb_i)$, de sorte que les différences suivantes

$$\rho^2(P_YXMa_i,\ YNb_i) - \rho_i^2,$$

évaluent pour chaque axe $a_i$ l'influence du bruit $X_N$ sur la concordance mesurée par $\rho_i^2$. C'est donc aussi que les valeurs

$$1 - \rho^2(P_YXMa_i,\ YNb_i)$$

évaluent pour chaque axe $a_i$ l'influence de l'image discordante $X_D$.

Les propriétés 2.3.1 et 2.3.2 peuvent être utilisées pour associer des graphiques en les juxtaposant (remarque de la section 2.4.3). Elles ne sont à considérer qu'axe par axe. C'est une façon de décrire localement, c'est à dire pour l'axe $a_i$ considéré isolément, pourquoi l'intensité de la concordance mesurée par $\rho_i^2$ est si faible. Précisément, la mesure $\rho_i^2$ est ici celle de la valeur de l'indice LAI restreint à la dimension $i$, soit $\rho_i^2\mathrm{var}(XMa_i)/\mathrm{var}(XMa_i)$ , et ne participe pas directement à la décomposition de l'indice global LAI sur laquelle l'analyse peut être fondée.

Dans le même temps, quand on enlève le bruit, puisque le numérateur de l'indice LAI reste inchangé alors que le dénominateur décroît, allant de $\mathrm{tr}\,(X'DXM)$ à $\mathrm{tr}\,(X'DP_YXM)$, cet indice s'accroît, et la mesure de l'écart suivant indique l'influence du bruit dans l'évaluation de la concordance globale de $X$ avec $Y$ :

$$\mathrm{LAI}_{[(P_YX,M,D),(Y,N,D)]} - \mathrm{LAI}_{[(X,M,D),(Y,N,D)]},$$

tandis que l'influence de l'image discordante $X_D$ est évaluable par :

$$1 - \mathrm{LAI}_{[(P_YX,M,D),(Y,N,D)]}.$$

**Théorème 2.3**

Quelle que soit la métrique $M$, l'image concordante de $[X,\ M,\ D]$ avec $[Y,\ (Y'DY)^{-1}, D]$ est égale à l'image de Guttman $P_YX$, et on a la décomposition de $X$ en seulement deux parts :

$$X = P_YX + X_N.$$

Ayant introduit la (semi-)métrique de Mahalanobis $(Y'DY)^{-1}$ dans $\Re^{p_2}$, et détruisant ainsi dans la matrice $Y$ toute l'information relative à ses covariations internes, la seule concordance pouvant alors s'établir avec cette matrice Y est donc l'expression de sa dépendance linéaire.

On a en effet ici :

$$\begin{aligned} X_A &= YNBD_aA' = Y(Y'DY)^{-1}BD_aA' \\ &= Y(Y'DY)^{-1}[Y'DXMA\Delta^{-1}]D_aA' = P_YXMAA', \end{aligned}$$

car $\Delta = D_a$, puisque ici les composantes non corrélées colonnes de $Y(Y'DY)^{-1}B$ ont leurs variances égales à 1.

Quand $r = p_1$, la matrice $MAA'$ est la matrice identité, et, sinon, l'identité partielle $MAA'$ agit sur la droite de la matrice $Y'DX$ comme l'identité. Finalement $X_A = P_YX$. Prenant le problème autrement, on aurait pu aussi constater que, bien que la matrice $KK'D$ (qui ici est celle d'un projecteur D-orthogonal) ne soit identifiable à $P_Y$ que lorsque $r = \text{rang}\,(Y)$, on a cependant : $KK'DX = P_YX$.

**Propriété 2.3.3**

L'image concordante peut être obtenue en recherchant d'abord l'image dépendante par rapport à $Y$, soit $P_YX$, puis la concordance de $Y$ avec cette image dépendante obtenue, le bruit $X_N$ ne pouvant faire l'objet d'aucune mise en concordance.

Le fait que l'image concordante $X_A$ puisse être obtenue aussi comme l'image concordante de $P_YX$ avec Y, se traduit par la décomposition suivante de l'indice LAI :

$$\text{LAI}_{[(X,M,D),(Y,N,D)]} = \text{LAI}_{[(P_YX,M,D),(Y,N,D)]}\text{LAI}_{[(X,M,D),\{Y,(Y'DY)^{-1}),D\}]}.$$

Pour une métrique $M$ fixée, différents choix de métriques $N$ peuvent conduire à une prise en compte plus ou moins grande des covariations internes de $Y$.

Par exemple l'image ressemblante de $X$ avec $Y$ (*cf.* section 3.4), est une image concordante qui s'obtient en prenant en compte toutes les covariances internes à $Y$, $N$ étant la métrique identité. Quand au contraire cette contrainte est totalement supprimée, c'est à dire quand la semi-métrique de Mahalanobis $(Y'DY)^{-1}$ vient à la place de la métrique identité, alors l'indice LAI est maximal, puisque $\text{LAI}_{[(P_YX,M,D),(Y,N,D)]} = 1$ et la concordance s'accroît donnant à la place de l'image concordante toute l'explication linéaire par $Y$ possible.

**Remarque**

Le calcul de $P_Y$ peut poser problème quand les variables de $Y$ sont très corrélées. On peut en effet retenir des dimensions en nombre trop grand par rapport à celui qu'il serait plus réaliste de conserver. Ce problème peut aussi se poser en analyse de la redondance et en analyse canonique.

En fait la matrice $P_Y$ apparaît dans les calculs non comme isolée mais associée à $X$ dans le produit $P_YX$. Le nombre de dimensions à retenir peut donc être contourné une fois résolu celui du nombre de dimensions à retenir lors du calcul de la décomposition en valeurs singulières de $X'DY$ : si trop de dimensions avaient été retenues lors du calcul de $P_Y$, l'effet des dimensions en excès peut être éliminé en remplaçant $P_YX$ par $P_YXMAA'$.

### *2.4. Classement d'axes et graphiques*

*2.4.1 Introduction*

Introduire la famille des composantes de l'ACP comme celle des seules composantes endogames définissables (remarque de section 2.1) implique qu'il n'est pas forcément fondamental de classer ces composantes par le critère d'inertie maximale.

L'explorateur de données qui use de l'ACP a très souvent un intérêt particulier pour une variable, ou pour un sous-groupe d'individus, supplémentaires ou non, et souhaite ainsi que ses graphiques soient informatifs localement, autour de ses préoccupations.

Les composantes de l'ACP sont les seules qui permettent de préciser, pour n'importe quel sous- espace engendré par des axes principaux, dans quelle mesure chaque variable du tableau a contribué à la représentation des individus du sous-espace. La famille d'axes et de composantes de l'ACP est ainsi une famille très privilégiée et il est souhaitable qu'un logiciel puisse classer automatiquement ces axes et composantes d'après des critères correspondants aux désirs les plus usuels des utilisateurs, le critère d'inertie maximum n'étant que celui proposé *à priori*.

Pour de mêmes raisons de découpage, l'utilisateur est en droit de modifier en fonction de ses propres préoccupations les classements d'axes indiqués en section 2.4.2 comme classements *à priori*. L'égalité :

$$X = X_A + X_D + X_N,$$

décompose les scores de $X$ en trois sous-ensembles de scores complémentaires, partageant en trois parts distinctes l'inertie totale de $X$. Cependant l'imbrication de l'image concordante et de l'image discordante ne permet pas la décomposition de la matrice de covariances de $X$ en somme des trois matrices de covariances respectives. Par suite, les trois ACP relatives aux trois images n'auraient pas vraiment de sens.

Dans la section suivante, on s'intéresse bien à la représentation de chacun des trois nuages définissant les contributions des lignes de $X$ à la concordance avec $Y$, à la discordance et au bruit, mais on s'intéresse aussi dans le même temps à définir les relations entretenues par les variables de X avec chacune des trois images. De là provient notre intérêt pour l'égalité matricielle :

$$X'DX = X'DX_A + X'DX_D + X'DX_N.$$

Comme les matrices $X'DX_A(= X'DKK'DX)$ et $X'DX_N(= X'_NDX_N)$ sont symétriques, cette égalité est donc une égalité entre quatre matrices symétriques.

*2.4.2. Classements d'axes*

On note de façon générique par $X_G$ l'image $X_A$, $X_D$ ou $X_N$.

On mesure les contributions respectives des lignes de $X_G$ par les termes de diag $(X_G M X'_G D)$, le k$^{\text{ème}}$ terme désignant l'inertie de l'individu k (i.e. sa masse multipliée par le carré de sa distance à l'origine). Selon l'image considérée, ces contributions définissent les contributions des individus de $X$ à la concordance avec $Y$, à la discordance ou au bruit. Leur somme étendue aux trois images et à tous les individus reconstitue l'inertie totale de $(X,\ M,\ D)$.

Le calcul des vecteurs propres M-orthogonaux des matrices $M$-symétriques $X'DX_GM$ permet de se proposer trois systèmes d'axes de représentation relatifs aux trois nuages $(X_G,\ M)$ dans des repères $M$-orthonormés respectifs, notés de façon générique $\{g_i\}$. Notant $G$ la matrice contenant en colonnes ces vecteurs, on a donc :

$$X'DX_GMG = G\Lambda_g,$$

la matrice diagonale $\Lambda_g$ contenant les valeurs propres $\lambda_{gi}$.

Le classement de ces axes peut donc se faire pour chaque image selon le critère d'inertie maximum, c'est à dire selon les valeurs $g'_iMX'_GDX_GMg_i$. Ce sont les trois classements proposés *à priori*. La suite et la section 2.4.3 apportent des arguments en faveur d'un tel choix.

Dans le cas de l'image concordante, les vecteurs propres ne sont pas à calculer puisqu'il s'agit des vecteurs $a_i$. Les valeurs propres, égales aux variances expliquées de la régression simultanée, sont donc égales, d'après la section 3.2, aux inerties proposées pour classer les axes.

Dans le cas du bruit, $X'DX_NM = X'_NDX_NM$, et les axes correspondants sont donc aussi classés selon les valeurs propres de la matrice diagonalisée.

Ce n'est que dans le cas de l'image discordante que le classement des axes proposé ne coïncide pas avec celui par les valeurs propres de la matrice diagonalisée.

Les contributions partielles des individus de $X$ relativement à un axe $g_i$ sont par suite définies pour l'image $X_G$ par les valeurs de diag $(X_GMg_ig'_iMX'_GD)$, le k$^{\text{ème}}$ terme étant donc le carré de l'abscisse de la projection du k$^{\text{ème}}$ individu sur l'axe $g_i$, pondéré par son poids. Les graphiques des individus représentés avec un système $\{g_i\}$ peuvent donc être accompagnés de diagrammes en bâtons descriptifs des contributions partielles, superposés aux diagrammes des contributions globales.

*2.4.3. Participations des variables et biplots*

On veut maintenant décrire les rapports qu'entretiennent avec les variables de $X$ avec les individus représentés par projection sur les sous-espaces.

En ACP de $(X,\ M,\ D)$ des directions définies par leurs cosinus directeurs et associées aux variables de $X$ sont ajoutées aux représentations des individus. Ces directions ne constituent pas des représentations de variables dans un sous-espace, mais elles permettent de connaître les variables qui sont intervenues dans le fait qu'un individu donné apparaisse comme excentré. On use ainsi d'un biplot de type Gabriel (1971), en projetant orthogonalement sur ces directions les individus représentés du sous-espace considéré (n'importe lequel).

Ces projections se font au sens de la métrique identité, les produits scalaires qui interviennent étant issus de la décomposition de $X$ en produit de matrices :

$$X = (XMU)U' = \sum_{1}^{r} (XMu_i)u_i',$$

$\{u_i\}$ désignant le système des $r$ axes principaux.

Alors, un projeté sur une direction $V$ qui apparaît éloigné de l'origine traduit un individu à forte contribution quant au sous-espace considéré; cet individu doit (au moins en partie) cette contribution aux variables ayant la direction $V$ ou une direction voisine de $V$, pourvu qu'elles aient joué un rôle important dans la constitution du sous-espace considéré.

Cette importance des variables de $X$ quant à leurs participations à un axe $i$ est souvent utile à connaître, et pas seulement pour les biplots.

La valeur $\lambda_i$ désignant l'inertie de l'axe $i$, cette importance est définie par les contributions partielles, termes de :

$$\lambda_i \text{ diag } (u_i u_i').$$

Ces valeurs sont souvent définies comme les variances des variables $D$-projetées sur la i$^{\text{ème}}$ composante principale duale de l'axe $i$.

Ci-après elles seront considérées comme des valeurs synthétisant les rapports de covariations entretenus par les variables de $X$ avec le nuage projeté sur l'axe $i$, c'est à dire comme les termes de diag $[X'D(XMu_iu_i')]$.

La racine carrée positive du cumul de ces valeurs étendu aux axes d'un biplot permet le calcul des longueurs de flèches portées par les directions associées aux cosinus directeurs définis par les colonnes de $U$.

Quand $M$ est la métrique identité, le total des participations des variables relatif à un axe i est égal à l'inertie de cet axe. Quelque soit $M$, les participations globales des variables sont définies par diag $(X'DX)$. Donc pour une métrique quelconque, le partage de l'inertie ne coïncide pas avec le partage de la variance totale de $X$.

On veut maintenant définir une notion générale de participations partielles des variables de $X$ aux différentes images, en procédant par analogie avec ce qui précède.

Pour une image donnée $X_G$, les coordonnées des individus sur l'axe $i$ sont les termes de $X_G M g_i$.

Les coordonnées des variables de $X$ dans le repère $XGMg_i$ dual du repère unidimensionnel $g_i$ constituent la colonne $i$ de la matrice $X'D(X_G MG) = G\Lambda_g$. Les individus étant représentés dans le repère orthonormé $\{g_i\}$, les cosinus directeurs des variables de $X$ sont ainsi donnés par les colonnes de $G$.

Des valeurs propres négatives peuvent exister pour l'image discordante, la matrice $X'DX_D$ étant non positive en général.

Notons $H$ la matrice formée à partir de $G$, les colonnes associées aux valeurs propres négatives étant respectivement prises égales aux colonnes opposées, les autres étant inchangées. La matrice $H$ est donc la matrice $G$ ayant subi une modification de signe sur quelques colonnes quand il s'agit de l'image discordante, et est égale à $G$ pour les deux autres images.

La matrice $MGH'$ est ici la matrice de l'isométrie Procruste de $(X_G, M)$ vers $(X, M)$ (Green, 1952). Cette rotation orthogonale particulière du nuage $(X_G, M)$ n'affecte pas la dualité des repères ni la nature du nuage (ainsi l'ACP de $(X_G MGH', M, D)$ est-elle identique à l'ACP de $(X_G, M, D)$).

Quelle que soit l'image, on propose alors de définir les participations totales des variables de $X$ à l'image $X_G$ par les valeurs positives constituant les termes de :

$$\operatorname{diag}[X'D(X_G MGH')] = \operatorname{diag}(G\Lambda_g H'),$$

et les participations partielles par les termes de :

$$\begin{aligned}\operatorname{diag}[X'D(X_G MGH'Mh_i h_i')] &= \operatorname{diag}[X'D(X_G Mg_i h_i')] \\ &= \lambda_{gi} \operatorname{diag}(g_i h_i') = |\lambda_{gi}| \operatorname{diag}(g_i g_i').\end{aligned}$$

Représenter les individus de $X_G MGH'$ dans le repère $H$ revient à représenter les individus de $X_G$ dans le repère $G$, comme l'indique l'égalité suivante, $H'MH$ étant matrice identité.

Les biplots associables aux participations des variables de $X$ précédentes sont finalement associés aux décompositions suivantes en produits de matrices :

$$(X_G MGH'MH)G' = X_G MGG' = \sum (X_G M g_i) g_i'.$$

Dans le cas particulier de l'image concordante, puisque $X_A MAA' = YNBD_a A'$, cette décomposition peut s'écrire :

$$X_A = \sum_1^r \{[\rho_i^2 \operatorname{var}(XMa_i)]^{1/2} (YNb_i/||YNb_i||)\} a_i'.$$

Par construction, le total de toutes les participations est supérieur à la variance totale de $X$ (sauf si toutes les valeurs propres de $X'DX_D M$ sont non négatives, auquel cas le total de ces participations est égal à cette variance totale). En fait l'imbrication des notions de concordance et de discordance existe en concordance dans la définition des participations partielles ($X'DX_A = X_A'DX_A + X_D'DX_A$), mais les égalités (15) et (22) font qu'elle ne s'exprime pas dans les mesures globales et partielles. La redondance provient donc uniquement d'une prise en compte de l'imbrication en discordance. L'importance de cette redondance évalue donc l'importance de l'imbrication des variables de $X$ quant aux deux notions. Quand $N$ est métrique de Mahalanobis (1936), la discordance n'existe pas et le total est égal à la variance de $X$.

**Remarque**

Il peut être intéressant de juxtaposer les trois nuages de points individus relatifs aux trois images, en représentant chacun d'eux dans des sous-espaces communs engendrés par des axes extraits du système $\{a_i\}$. En effet, d'après les égalités (20) et (22), on a :

$$a_i'MX'DXMa_i = a_i'MX_A'DX_AMa_i + a_i'MX_D'DX_DMa_i + a_i'MX_N'DX_NMa_i.$$

Cela permet de comparer à l'intérieur d'un sous-espace les diverses contributions des individus de $X$ aux trois images. On peut adjoindre alors les indices de ressemblance pour chaque axe considéré en ressemblance et les indices complémentaires mesurant l'influence de la différence et du bruit (propriété 2.3.2). On peut adjoindre les diagrammes des inerties respectives représentées.

Toute l'image $X_A$ et toute l'image $X_D$ peuvent être ainsi appréhendées (égalité (21)), mais non toute l'image $X_N$. Seule l'image $X_A$ peut ici faire l'objet de biplots, car on ne voit plus alors comment définir les participations partielles pour l'image discordante et le bruit.

## 3. Analyse de concordance et analyses usuelles de deux tableaux

L'analyse canonique, l'analyse de ce qui explique, l'analyse de ce qui est expliquée (de la redondance), l'analyse de ce qui est commun, sont des analyses ici abordées comme des analyses concordantes particulières. Quelques spécificités induites par cette approche sont alors mises en évidence.

### *3.1. Analyse canonique de X par rapport à Y*

L'analyse canonique est ici considérée comme une analyse de la communauté de deux espaces vectoriels engendrés par deux systèmes de variables. Elle est réalisée par l'analyse de la concordance du triplé ($X$, $(X'DX)^{-1}$, $D$) avec le triplé ($Y$, $(Y'DY)^{-1}$, $D$). Les axes et couples concordants sont alors en effet les axes et couples de composantes canoniques de l'analyse canonique usuelle. La façon non symétrique d'aborder l'analyse canonique classique par cette analyse de concordance rejoint ainsi la première définition de l'analyse canonique donnée par Hotelling en 1935, et coïncide en partie avec la régression canonique (Keller et Wansbeek, 1983). Hotelling prit un point de vue plus symétrique en 1936 pour considérer une approche simultanée des variables de $X$ et de $Y$.

L'information analysée, tr $(X'DXM)$, est ici égale au rang de $X$, exprimant le potentiel de dépendance linéaire que $X$ peut présenter *à priori* avec $Y$. L'image concordante $P_YX$ peut se nommer ici image dépendante.

Notant $R_i$ les corrélations entre composantes d'un même couple $i$, c'est à dire la valeur du $i^{\text{ème}}$ coefficient de corrélation canonique (ici terme de la diagonale de $D_a = \Delta$), la valeur de l'indice LAI exprime l'intensité de la dépendance de $X$

avec $Y$ :

$$\begin{aligned}\mathrm{LAI}_{[(X,\,(X'DX)^{-1},D),\;(Y,(Y'DY)^{-1},D)]} &= \mathrm{tr}\,[(P_Y X)' D P_Y X]/\mathrm{rang}\,(X)\\ &= \sum_{i=1}^{r} R_i^2/\mathrm{rang}\,(X).\end{aligned}$$

Les coordonnées des individus de $X$ contribuant à la dépendance avec $Y$ sont les colonnes de la matrice $X_A MA$ et donc valent ici pour l'axe $i$ :

$$R_i Y(Y'DY)^{-1} b_i.$$

Remarquons que ces coordonnées données pour analyser les contributions de $X$ à la dépendance avec $Y$ décomposées avec le système des axes canoniques $\{a_i\}$ n'ont rien de comparables avec les coordonnées de $X$ exprimées selon ce même système.

Les contributions des individus à la dépendance sont les valeurs de diag $(X_A M X'_A D)$ soit ici de diag $(P_Y P_X P_Y)$. Les contributions à l'indépendance, qui sont les valeurs de diag $(P_X - P_X P_Y - P_Y P_X + P_Y P_X P_Y)$, sont associables à l'indice global de l'indépendance de $X$ avec $Y$ :

$$1 - \mathrm{LAI}_{\{[X,(X'DX)^{-1},D],[Y,(Y'DY)^{-1},D]\}} = [\mathrm{rang}\,(X) - r + \sum_{i=1}^{r}(1 - R_i^2)]/\mathrm{rang}\,(X).$$

Les participations globales des variables de $X$ à la dépendance avec $Y$ sont définies par $\mathrm{diag}(X'DP_Y X)$ et les partielles par $R_i^2$ diag $(a_i a'_i)$.

Les biplots de Gabriel en dépendance et en indépendance permettent de préciser pour quelles variables de $X$ un individu contribue à la dépendance ou à l'indépendance avec $Y$.

Les biplots de dépendance sont associables à la décomposition suivante de l'image concordante :

$$P_Y X = \sum_1^r \{[P_Y X(X'DX)^{-1} a_i]\} a'_i = \sum_1^r \{R_i Y(Y'DY)^{-1} b_i\} a'_i.$$

### 3.2. Analyse du potentiel de prédiction de X

Le rang de $X$ étant cette fois interprété comme le potentiel de prédiction de $X$ (Cailliez et Pagès, 1976), prédire $Y$ à partir de $X$ consiste ici à reconstituer au mieux linéairement à partir de $X$ les covariations internes à $Y$. L'analyse de concordance qui doit alors être considérée est une analyse du rang de $X$ et donc $M$ est la semi-métrique $(X'DX)^{-1}$, où les covariations internes de $Y$ doivent être préservées et donc $N = I$.

On note maintenant $E$ et $F$ les matrices des vecteurs solutions $e_i$ et $f_i$, anciennement notées $A$ et $B$. Cela permet de souligner que les termes utilisés dans cette analyse se retrouvent aussi dans l'analyse de la section 3.3.

Les composantes explicatives colonnes de $X(X'DX)^{-1}E$ sont ici les composantes explicatives de Rao (1964) définies dans son ACPVI. Elles sont associées en concordance pour former des couples monogames, avec les composantes expliquées YF de Johansson (1981) dans une analyse nommée «restandardized solution», développant ainsi l'analyse de la redondance de Wollenberg (1977).

Notant $r_i^2 = \rho^2[X(X'DX)^{-1}e_i, \; Yf_i]$, les corrélations entre composantes concordantes, l'indice LAI mesure le pouvoir explicatif que $X$ possède pour $Y$ :

$$\mathrm{LAI}_{[(X,(X'DX)^{-1},D),(Y,I,D)]} = \sum_{i=1}^{r} r_i^2/\mathrm{rang}\,(X).$$

Le classement des termes explicatifs se fait donc ici selon les pouvoirs explicatifs partiels $r_i^2$.

La décomposition en trois tableaux, le tableau explicatif, un tableau non explicatif bien que dépendant, et le bruit :

$$X = X_A + X_D + X_N,$$

est ici respectivement associée à trois termes décomposant le potentiel prédictif de $X$ :

$$\mathrm{rang}\,(X) = \sum_{i=1}^{r} r_i^2 + \left[\sum_{i=1}^{r} R_i^2 - \sum_{i=1}^{r} r_i^2\right] + [\mathrm{rang}\,(X) - r + \sum_{i=1}^{r}(1 - R_i^2)].$$

Si on suppose que l'amélioration du pouvoir prédictif d'un tableau ne peut être obtenue en modifiant la partie explicative ou la partie indépendante, c'est l'analyse de la troisième partie $X_D$ imbriquée avec $X_A$ qui sera la plus précieuse.

Les biplots permettent de désigner les variables et les individus les plus impliqués dans le pouvoir explicatif ou dans le manque d'explication produit par le bruit $X_N$.

Les vecteurs contenant les coordonnées des individus impliqués dans le pouvoir explicatif sont les composantes de Johansson, leurs variances étant ici ramenées aux valeurs $r_i^2$.

Les participations des variables de X à l'explication de $Y$ sont définies par $\sum_{i=1}^{r} r_i^2 \,\mathrm{diag}\,(e_i e_i')$.

La partie explicative $X_A$ participe à une reconstitution partielle des covariances entre variables de $Y$ faite à partir de $X$, alors que la partie non explicative $X_D$ ne le permet pas, bien que ce soit aussi une partie dépendante de $Y$. Il ne suffit pas d'être dépendant pour être explicatif, sinon on aurait plutôt obtenu $P_Y X$ au lieu d'obtenir $X_A$.

La propriété 2.3.2 permet d'analyser axe par axe l'influence du bruit et de l'image $X_D$ dans le manque d'explication fournie.

### 3.3. *Analyse de la part de Y expliquée par X*

Pour la première fois c'est le tableau $Y$ qui est maintenant analysé, ce qui permet de conserver les notations de la section précédente. Pour analyser comment les covariations de Y peuvent être expliquées par $X$, on prend la métrique $N = I$. Pour faire intervenir le pouvoir prédictif de $X$, on choisit la métrique $M = (X'DX)^{-1}$.

On fait donc cette fois l'analyse de la concordance de ($Y$, $I$, $D$) avec ($X$, $(X'DX)^{-1}$, $D$).

Il s'agit de savoir quelles variables de Y sont les mieux expliquées par $X$ et cela grâce à quels individus, et aussi lesquelles seront le moins. L'indice global de concordance est :

$$\begin{aligned}\mathrm{LAI}_{\{[Y,I,D],[X,(X'DX)^{-1},D]\}} &= \sum_{i=1}^{r} r_i^2 \mathrm{var}(Yf_i)/\mathrm{tr}\,(Y'DY) \\ &= \mathrm{tr}\,(Y'DP_XY)/\mathrm{tr}\,(Y'DY).\end{aligned}$$

C'est l'indice de la redondance de Stewart et Love (1968), ou encore la version gaussienne du carré de l'indice de corrélation multiple de Sampson (1984), exprimant l'intensité de l'explication obtenue pour $Y$ à partir de $X$. Les variances expliquées sont les variances expliquées usuelles obtenues dans le problème d'optimisation posé par Rao et conduisent donc à classer les termes de l'analyse dans un ordre différent de celui considéré en analyse du tableau explicatif $X$.

Les coordonnées indiquant quels individus de $Y$ sont expliquées par $X$ sont données par les composantes de Rao, colonnes de $P_XYF$, les inerties correspondantes par axe étant égales aux variances expliquées de l'analyse.

Les participations des variables de $Y$ à l'intensité d'explication fournie par $X$ sont définies par

$$\sum_{i=1}^{r} r_i^2 \ \mathrm{var}(Yf_i)\ \mathrm{diag}\,(f_i f_i').$$

Dans le contexte de l'analyse de la redondance, Israëls (1986) propose une interprétation de cette analyse en terme d'ACP, diagonalisant la matrice $X'DP_YX$ (celle diagonalisée par Rao C.R. (1964) dans sa définition de l'analyse en composantes principales de variables instrumentales ou ACPVI). Il considère que ce sont les variables de $X$ elles mêmes qui sont interprétables dans cette (pseudo) ACP de la «rotated matrix» $P_YX$, la matrice diagonalisée pouvant aussi s'écrire $(P_YX)'D(P_YX)$ à cause de l'idempotence et de la $D$-symétrie du projecteur.

Notre approche s'accorde donc à son point de vue, si ce n'est que la notion d'ACP est ici remplacée par une notion de concordance.

### *3.4. Analyse de la communauté de X avec Y*

Cette analyse de la concordance d'un triplé statistique ($X$, $I_{p_1}$, $D$) avec un triplé ($Y$, $I_{p_2}$, $D$), était nommée analyse de «communité» (Lafosse, 1985, 1989, 1991), pour comparer la distribution d'un ensemble de variables $X$ à la distribution d'un ensemble $Y$. Si la notion de structure interne à un tableau est constituée de l'information traitée lors de l'ACP de ce tableau, cette comparaison est celle de deux structures internes, invariante par rotation.

Le terme de vieux français communité paraît adapté pour désigner ce que deux ensembles peuvent avoir en commun. La notion de «communauté» pourrait désigner les membres d'un ensemble ayant des points communs entre eux. Cependant en analyse de concordance un seul tableau à la fois est analysé, de sorte que cette distinction peut paraître inintéressante, et on a adopté ici l'expression d'analyse de communauté.

Les couples de composantes concordantes sont ici les couples de composantes définis par Tucker (1958). Pour analyser la communauté de deux systèmes de corrélations internes associés à deux batteries de tests effectués sur de mêmes individus, Tucker définit des couples de composantes corrélées seulement deux à deux.

Les couples de Tucker sont à la base des régressions PLS aujourd'hui bien appréciées de nombreux praticiens de différentes disciplines et initialisées par Wold en 1975, et sont aussi utilisés pour réaliser des cartes factorielles de représentations simultanées de l'information sur les deux tableaux (analyse de co-inertie de Chessel et Mercier, 1993). Une intéressante généralisation à $K$-tableaux se trouve dans Chessel et Hanafi (1996).

Les trois images ici définies dans cette concordance particulière pourraient être nommées image ressemblante, image différente et bruit.

En supposant que la notion d'effet stéréo peut se définir comme ce qui ne peut être ni le bruit ni la part ressemblante, la différence (l'image discordante) est alors une proposition de définition d'un tel effet.

L'explication linéaire possible de $X$ par $Y, P_Y X$, pourrait être vue comme constituée d'une partie reproductible (la ressemblance) et d'une partie vraiment novatrice (la différence).

L'analyse de la communauté d'un tableau avec un autre est l'analyse considérée dans l'exemple d'école qui suit.

## 4. Exemple

C'est le tableau $X$ qui sera analysé dans cette étude de concordance faite pour déterminer les individus et variables de $X$ contribuant le plus à la ressemblance avec $Y$, à la différence et au bruit. Les deux tableaux $X$ et $Y$ seront centrés et réduits séparément, ce qui n'induit pas de modification fondamentale ici par rapport aux tableaux de départ.

$X$ (données brutes)

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| *1* | 1 | 0 | 0 |
| *2* | 0 | 1 | 0 |
| *3* | 0 | 1 | 1 |
| *4* | 1 | 0 | 0 |
| *5* | 0 | 0 | 1 |
| *6* | 0 | 0 | 0 |
| *7* | 0 | 0 | 0 |

$Y$ (données brutes)

| | e | f | g |
|---|---|---|---|
| *1* | 1 | 0 | 0 |
| *2* | 0 | 1 | 0 |
| *3* | 0 | 0 | 0 |
| *4* | 1 | 0 | 0 |
| *5* | 0 | 0 | 1 |
| *6* | 0 | 0 | 1 |
| *7* | 0 | 1 | 0 |

$Y$ (centré réduit)

| | e | f | g |
|---|---|---|---|
| *1* | 1.58 | -.63 | -.63 |
| *2* | -.63 | 1.58 | -.63 |
| *3* | -.63 | -.63 | -.63 |
| *4* | 1.58 | -.63 | -.63 |
| *5* | -.63 | -.63 | 1.58 |
| *6* | -.63 | -.63 | 1.58 |
| *7* | -.63 | 1.58 | -.63 |

Il s'agit de savoir globalement dans quelle mesure la distribution des individus de $Y$ se retrouve dans $X$. D'après ce qui précède les tableaux $X$ et $Y$ ont la variable $\underline{a}$ et $\underline{e}$ identique : la variable $\underline{a}$ devrait jouer un rôle plus important en ressemblance que $\underline{b}$ et $\underline{c}$. Si $\underline{e}$ et $\underline{g}$ étaient échangées, la conclusion serait la même, car en concordance l'appariement des variables n'est pas nécessaire.

Les individus 3, 6 et 7 induisent assez clairement une modification des corrélations internes.

La différence apportée par l'individu 3 est imbriquée cependant à une ressemblance, les valeurs du couple ($\underline{b}$, $\underline{c}$) étant égales, tout comme le sont celles de ($\underline{f}$, $\underline{g}$). Mais cette première analyse n'est que provisoire, car c'est l'ensemble des individus qui est à considérer pour pouvoir répartir le rôle de chacun, dans une comparaison basée sur des corrélations au carré.

Il peut même se faire que toutes les valeurs de $Y$ changent par rapport à celle de $X$, mais que la ressemblance soit jugée totale par l'analyse de concordance.

$X$

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.58** | -.63 | -.63 | |
| -.63 | **1.58** | -.63 | |
| .63 | **1.58** | **1.58** | |
| **1.58** | -.63 | -.63 | |
| -.63 | -.63 | **1.58** | |
| -.63 | -.63 | -.63 | |
| -.63 | -.63 | -.63 | |

$Z$

| | | |
|---|---|---|
| **1.74** | -.36 | -.36 |
| -.92 | **1.10** | **−1.12** |
| .20 | .76 | .76 |
| **1.74** | -.36 | -.36 |
| .92 | **1.12** | **−1.10** |
| .92 | **1.12** | **−1.10** |
| .92 | **1.10** | **−1.12** |

$B^*A'$

| | | |
|---|---|---|
| .70 | -.51 | -.51 |
| -.51 | .15 | -.85 |
| -.51 | -.85 | .15 |

IMAGE $X$

| Ressemblante a | b | c | | Différente a | b | c | | Bruit a | b | c | | Total analysé a | b | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.64** | -.28 | -.28 | *1* | -.06 | -.36 | -.36 | *1* | 0 | 0 | 0 | *1* | 1.58 | -.63 | -.63 |
| **-.91** | .45 | **-.66** | *2* | .28 | .03 | .03 | *2* | 0 | **1.1** | 0 | *2* | -.63 | 1.58 | -.63 |
| .35 | **.99** | **.99** | *3* | **-.99** | **.60** | .60 | *3* | 0 | 0 | 0 | *3* | -.63 | 1.58 | 1.58 |
| **1.64** | -.28 | -.28 | *4* | -.06 | -.36 | -.36 | *4* | 0 | 0 | 0 | *4* | 1.58 | -.63 | -.63 |
| **-.91** | **-.66** | .45 | *5* | .28 | .03 | .03 | *5* | 0 | 0 | **1.1** | *5* | -.63 | -.63 | 1.58 |
| **-.91** | **-.66** | .45 | *6* | .28 | .03 | .03 | *6* | 0 | 0 | **−1.1** | *6* | -.63 | -.63 | -.63 |
| **-.91** | .45 | **-66** | *7* | .28 | .03 | .03 | *7* | 0 | **−1.1** | 0 | *7* | -.63 | -.63 | -.63 |

En fait la méthode comparative est indépendante de toute rotation. C'est dire par exemple que l'analyse de $X$ est identique quand $Y$ est remplacé par un autre tableau obtenu par isométrie (une méthode comparative dépendante des rotations et prenant en compte l'appariement des variables est proposée par Torre et Chessel (1995)).

Par exemple l'analyse de concordance sera totalement inchangée avec le tableau $Z = Y^* B^* A'$. Ce tableau formé de colonnes centrées non réduites est obtenu à partir de l'isométrie Procruste $B^* A'$. Cette isométrie particulière rapproche au mieux le tableau $Y$ du tableau $X$ au sens des moindres carrés entre individus appariés. Le raisonnement essayé au début au sujet des ressemblances et différences évidentes, plus raisonnablement devrait être tenté entre $X$ et $Z$ plutôt qu'à partir des données brutes. Mais alors les premières conclusions qui apparaissaient évidentes le sont moins et ne permettent pas de toute façon de pouvoir dégager une notion de bruit.

**Contributions des INDIVIDUS** (éléments diagonaux de $X_G M g_i g_i' M X_G' D$) :

| ***RESS.*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***7*** | ***Inerties*** | ***Cumuls*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| axe **1** | .39 | .08 | .01 | .39 | .08 | .08 | .08 | *1.1413* | *38 %* |
| axe **2** | .01 | .03 | .29 | .01 | .03 | .03 | .03 | *.4506* | *53 %* |
| axe **3** | .00 | .09 | .00 | .00 | .09 | .09 | .09 | *.3500* | ***65%*** |
| | ***.41*** | *.21* | ***.30*** | ***.41*** | *.21* | *.21* | *.21* | *1.9420* | |

| ***DIFF.*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***7*** | ***Inerties*** | ***Cumuls*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| axe **1** | .02 | .00 | .21 | .02 | .00 | .00 | .00 | *.2624* | *9 %* |
| axe **2** | .01 | .01 | .03 | .01 | .01 | .01 | .01 | *.0956* | ***12%*** |
| | .04 | .01 | ***.24*** | .04 | .01 | .01 | .01 | .3580 | |

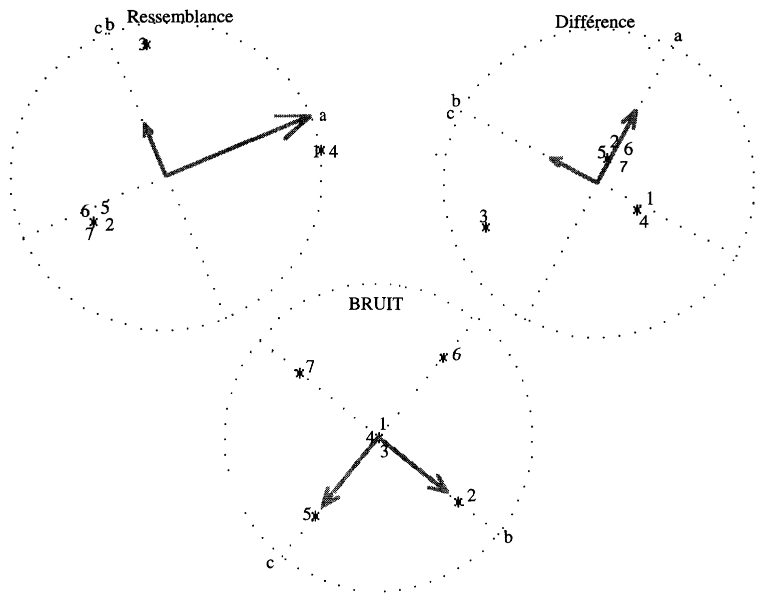
| ***BRUIT.*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***7*** | ***Inerties*** | ***Cumuls*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| axe **1** | 0 | .11 | 0 | 0 | .07 | .07 | .11 | *.35* | *11.5 %* |
| axe **2** | 0 | .07 | 0 | 0 | .11 | .11 | .07 | *.35* | ***23 %*** |
| | 0 | ***.175*** | 0 | 0 | ***.175*** | ***.175*** | ***.175*** | .70 | |

Les valeurs .65, .12, et .23 désignent respectivement les indices globaux de la ressemblance de $X$ avec $Y$, de la différence et du bruit. L'indice LAI vaut ainsi 65%. Le total 1 représente 100 % de l'inertie de $X$.

Les individus 1, 3 et 4 sont ceux de $X$ qui contribuent le plus à la ressemblance. L'individu 3 contribue aussi à la différence nettement plus que tous les autres. Tous ceux non encore cités contribuent également au bruit qui a plus d'importance que la différence structurelle.

| axes de ressemblance $\{a_i\}$ de $X$ avec $Y$ | indices partiels de ressemblance | influence de la différence | influence du bruit | Total |
|---|---|---|---|---|
| axe 1 | .7866 | .1836 | .0298 | 1 |
| axe 2 | .5308 | .1836 | .2856 | 1 |
| axe 3 | .5000 | 0 | .5000 | 1 |

Pour les trois graphes ci-après une unité commune aux 6 axes a été utilisée pour représenter les individus (le rayon des cercles vaut 1.6). Une autre unité commune aux trois biplots a été utilisée pour le calcul des longueurs de flèches.



Participations des VARIABLES (éléments diagonaux de $|\lambda_{gi}|g_i g_i')$ :

| | **Variables** | | | |
|---|---|---|---|---|
| ***RESS.*** | a | b | c | |
| axe **1** | **.9685** | .0864 | .0864 | *1.1413* |
| axe **2** | .0683 | .1912 | .1912 | *.4506* |
| axe **3** | 0000 | .1750 | .1750 | *.3500* |
| | ***1.0367*** | *.4526* | *.4526* | ***65%*** |
| ***DIFF.*** | a | b | c | |
| axe **1** | .1236 | .2199 | .2199 | *.5634* |
| axe **2** | .1603 | .0225 | .0225 | *.2053* |
| | *.2839* | *.2424* | *.2424* | ***26%*** |
| ***BRUIT.*** | a | b | c | |
| axe **1** | .0000 | .2113 | .1387 | *.3500* |
| axe **2** | .0000 | .1387 | .2113 | *.3500* |
| | *.0000* | *.3500* | *.3500* | ***23%*** |

La variable a participe à la ressemblance nettement plus que les deux autres, ces dernières étant les seules participant au bruit.

Les pourcentages sont exprimés par rapport à la variance totale de $X$. Comme la métrique est la métrique indentité, on retrouve en ressemblance et pour le bruit des pourcentages totaux égaux à ceux trouvés pour les inerties.

Un excès de 14 % survient en différence (excès qui est dû au fait qu'une valeur propre en différence est négative et égale à -.2053, la troisième valeur propre étant nulle). Il évalue l'importance de l'imbrication des variables de $X$ pour les notions de ressemblance et de différence. Le total constitue ainsi 114 % de la variabilité de $X$. En ressemblance cette imbrication ne produit pas d'excès dans les mesures grâce au choix du repère (propriété 2.3.1).

*Je remercie grandement le professeur hollandais Jos TEN BERGE pour sa forte contribution apportée à la réalisation de cet article, et les référés de la revue pour leur efficacité à détecter les erreurs.*

## Références bibliographiques

CAILLIEZ F. PAGÈS J.P. (1976). *Introduction à l'analyse des données.* SMASH, 9 rue Durban 75016, Paris.

CHESSEL D. HANAFI M. (1996) *Analyses de la co-inertie de K nuages de points.* Rev. Stat. Appliquée 44, 2, 35-60.

CHESSEL D. MERCIER P. (1993) *Couplage de triplets statistiques et liaisons espèces-environnement.* In Biométrie et Environnement, Lebreton J.D. et Asselain B. (Eds). Paris, Masson, 15-44.

FORTIER J. J. (1966) *Simultaneous linear prediction.* Psychometrika, 31, 369-381.

GABRIEL K.R. (1971) *The biplot graphic display of matrices with application to principal component analysis.* Biometrika, 58, 453-457.

GREEN B.F. (1952) *The orthogonal approximation of an oblique structure in factor analysis.* Psychometrika, 17, 429-440.

GUTTMAN L. (1953) *Image theory for the structure of quantitative variates.* Psychometrika,18, 277-296

HOTELLING H. (1935) *The most predictable criterion.* Journal of Educationnal Psychology 26, 139- 142.

HOTELLING H. (1936) *Relations between two sets of variates.* Biometrika, vol.26.

ISRAËLS A.Z. (1984) *Redundancy analysis for qualitative variables.* Psychometrika. 49, 331-346.

ISRAËLS A.Z. (1986) *Interpretation of redundancy analysis : rotated vs. unrotated solutions*, Applied Stochastics models and data analysis, 2, 121-130.

ISRAËLS A.Z. (1987) *Eigen techniques for qualitative data.* DSWO Press, Leiden.

JOHANSSON J.K. (1981) *An extension of Wollenberg's redundancy analysis.* Psychometrika, 46, 93-103.

KAISER H.F. (1976) *Image and anti-image covariance matrices from a correlation matrix that may be singular.* Psychometrika. 41, 295-300.

KELLER W.J. WANSBEEK T.J. (1983) Multivariate methods for quantitative and qualitative data. Journal of Econometrics, 22, 91-111.

LAFOSSE (1985) *Une nouvelle analyse procrustéenne de deux tableaux.* In Data Analysis and Informatics, IV (Diday & coll. eds). Elsevier Science Pub. North Holland, 407-414.

LAFOSSE R. (1989) *Ressemblance et différence entre deux tableaux totalement appariés.* Statistique et analyse des donnees. 14, 1-24.

LAFOSSE R. (1991) *Explications d'un tableau par un autre, le programme RESDIF.* La revue de Modulad 8, 1-22.

MAHALANOBIS P.C. (1936) *On the generalized distance in statistics.* Proc. Nat. Inst. Sci. India, 12.

RAO C.R. (1964) *The use and the interpretation of principal component analysis in applied research.* Sankya, ser. A, 26, 329-358.

SAMPSON A.R. (1984) *A multivariate correlation* , Statist. Probab. Lett. 2, 77-81.

STEWART D. LOVE W. (1968) *A general canonical correlation index.* Psychological Bull., 70, 160-163.

TEN BERGE J.M.F. (1985) *On the relationship between Fortier's simultaneous linear prediction and Wollenberg's redundancy analysis.* Psychometrika, 50, 121-122.

TORRE F. et CHESSEL D. (1995) *Co-structure de deux tableaux totalement appariés*. Rev. Statistique appliquée, 43, 109-121.

TUCKER L.R. (1958) *An interbattery method of factor analysis.* Psychometrika, 23, 111-136.

WOLD H. (1975) *Soft modeling by latent variables : the non-linear iterative partial least squares approach.* In Perspectiveives in probability and statistics. Gani J. (Ed), London : Academic Press.

WOLLENBERG A.L. (1977) *Redundancy analysis. An alternative for canonical correlation analysis* . Psychometrika, 42, 207-219.