Giandomenico Mattioli

Sopra certi sistemi coordinati associati ad un'ennupla di congruenze (e applicazioni)

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 1 (1930), p. 110-132
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1930__1__110_0>

SOPRA CERTI SISTEMI COORDINATI ASSOCIATI AD UN' ENNUPLA DI CONGRUENZE (E APPLICAZIONI)

di GIANDOMENICO MATTIOLI.

È ben noto che, in una varietà riemanniana V_n, partendo dalla considerazione delle ∞^{n-1} geodetiche spiccate da un punto O, si possono definire, con RIEMANN, delle coordinate aventi carattere cartesiano in O *(coordinate normali)*. Similmente fondandosi sulle ∞^{n-2} geodetiche uscenti dai punti P di una curva B, e inoltre parallele fra loro secondo LEVI-CIVITA, questo autore ha analogamente definite altre coordinate che hanno pure comportamento cartesiano lungo B (¹).

Quali coordinate (cioè caratterizzate da quali proprietà) si possono definire in una V_n quando si sostituiscano le geodetiche con curve aventi un'altra, a priori qualunque, definizione, e con le geodetiche non avendo in comune se non la circostanza che di esse ne escano ∞^{n-1} per ogni punto di V_n?

Nel presente lavoro considero il caso in cui tali linee sono definite al modo seguente: è assegnata un'ennupla di congruenze ortogonali; allora per ogni punto passa una ed una sola curva che forma con le linee dell'ennupla, che mano a mano incontra, angoli costanti (qualunque ma determinati). La totalità di queste curve, cui in particolare appartengono le linee dell'ennupla, e che per ogni punto di V_n sono effettivamente ∞^{n-1}, sostituisce, nel seguito, la considerazione delle geodetiche nelle trattazioni precedentemente accennate. Il naturale adattamento all'attuale impostazione dei procedimenti analitici che servono a definire le coordinate normali in un punto o lungo una linea, ci conduce a

(¹) LEVI-CIVITA, *Écart géodésique*, Math. Annalen, B. 97 (1926).

due particolari sistemi di coordinate associate all'ennupla base, e che potremo dire *canoniche* per l'n.pla stessa. Il primo di questi (*n.* 1) era già implicitamente usato nella teoria dei gruppi (i *parametri canonici* non sono altro se non tali coordinate); il secondo sistema, associato inoltre ad una base B che è una qualunque delle curve fondamentali dianzi definite, non mi consta che sia mai stato considerato, neppure senza espressa definizione.

In tutti quei problemi in cui si presenta la considerazione di un'n.pla di congruenze ortogonali, od anche, senza intervenire esplicitamente un tale ente geometrico, ci si può richiamare ad esso allo scopo di concretizzare un'altra impostazione, anche non geometrica, di un problema, le coordinate canoniche si offrono naturalmente come le più aderenti alla questione, e come si vedrà in due applicazioni che seguono: ad un problema geometrico (determinazione di varietà che contengono n.ple di congruenze per per le quali le somme $\gamma_{hki} + \gamma_{hik}$ sono costanti), ed alla teoria dei gruppi (integrazione delle equazioni di Maurer nell'intorno di un sottogruppo ad un parametro), queste coordinate possono talvolta riuscire utili in dimostrazioni esistenziali, ed anche nella effettiva integrazione delle equazioni differenziali del problema.

Nel seguito interverranno sommatorie nelle quali gli indici di somma varieranno da 1 a n, oppure da 1 a $n-1$: per brevità di scrittura abolisco il segno sommatorio, convenendo di indicare con lettere latine i primi indici, con lettere greche i secondi; e la somma si intenderà indicata dalla presenza di due indici eguali nella stessa espressione monomia.

§ 1. - Variabili canoniche per un' ennupla di congruenze ortogonali.

Sia assegnata un'n.pla di congruenze ortogonali di cui indichiamo con $\lambda_h^i(x)$ i *parametri* in originarie variabili qualunque x_i. Si ha pure, ovviamente, $\|\lambda_h^i\| \neq 0$.

Si considerino le equazioni

$$\frac{dx_i}{ds} = \xi_h \lambda_h^i, \qquad i, h = 1, 2 \ldots n \tag{1}$$

con le ξ_h *costanti*, alle quali, volendo, si può imporre il vincolo

$\Sigma_h \xi_h^2 = 1$ allo scopo di interpretare il parametro s come lunghezza dell'arco su ogni curva integrale di (1). Infatti si ricava in tal caso

$$\lambda_{h\,.\,i}\, d x_i = \xi_h\, d s\,,$$

e quadrando e sommando su h,

$$\lambda_{h\,.\,i}\, \lambda_{h\,.\,j}\, d x_i\, d x_j = a_{ij}\, d x_i\, d x_j = d s^2\,,$$

che chiarisce appunto il significato dichiarato di s.

È facile riconoscere quali curve rappresenta il sistema (1): *lungo ognuna di esse sono costanti* $(= \xi_h)$ *i coseni direttori della tangente rispetto alle direzioni dell'* n.*pla locale*. Per brevità nei richiami, indicheremo con C la totalità, od anche una determinata, di siffatte curve.

Le ∞^{n-1} curve C che passano per un punto O di coordinate x_i^0 sono rappresentate dall'integrale di (1) determinato dalle condizioni iniziali

$$x_i = x_i^0\,, \quad \text{per } s = 0\,,$$

convenendo di assumere su ognuna l'origine dell'arco s nel punto O. Indichiamo con u_h^i i valori, costanti, dei parametri dell'n.pla in O, cioè poniamo $u_h^i = \lambda_h^i(x_0)$: per la forma delle (1) è chiaro che questo integrale sarà del tipo

$$x_i = x_i^0 + u_h^i\, \xi_h\, s + \psi_i(\xi_1 s, \xi_2 s, \ldots \xi_n s)\,, \tag{2}$$

le funzioni $\psi(\xi s)$ potendo essere rappresentate dallo sviluppo di Taylor costruibile mediante successive derivazioni da (1), e che comincerà con un termine in s^2.

Facciamo ora la posizione

$$y_i = \xi_i\, s\,, \quad i = 1, 2 \ldots n \tag{3}$$

con la quale introduciamo delle nuove variabili y_i: le (2) diventano allora

$$x_i = x_i^0 + u_h^i\, y_i + \psi_i(y_1, y_2, \ldots y_n) \tag{2^1}$$

(le ψ_i annullandosi almeno di secondo ordine in $y_i = 0$) e definiscono una trasformazione di variabili che è regolare e biunivoca nell'intorno di O. Infatti in $y_i = 0$, il determinante funzionale delle x rispetto alle y è

$$\| u_h^i \| = \| \lambda_h^i (x_i^0 \|$$

che, come fu supposto, è $\neq 0$.

In quanto precede risultano dunque definite le annunciate *coordinate canoniche:* passiamo a rilevarne alcune proprietà caratteristiche.

Le equazioni (2), dove le ξ_h sono certe costanti, rappresentano parametricamente, in coordinate x_i, le curve C: ne viene che anche le (3) rappresentano le stesse curve in coordinate y_i e perciò soddisfano al sistema differenziale trasformato di (1) in variabili y_i, che è

$$(1^1) \qquad \frac{d y_i}{d s} = \xi_h \mu_h^i$$

quando si indichino con $\mu_h^i = \lambda_h^j \dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}$ i parametri dell'n.pla nel sistema coordinato y_i.

Sostituendo dunque in (1^1) le espressioni (3) delle y_i si hanno le relazioni

$$(4) \qquad \xi_i = \xi_h \mu_h^i, \quad \text{oppure} \quad \xi_h = \xi_i \mu_{h.i}$$

che devono sussistere in ogni punto, vale a dire per i corrispondenti valori di ξ_h e s. In particolare nell'origine O, $s = 0$, esse devono valere identicamente rispetto alle ξ_i; per cui consegue che i valori iniziali (in O) delle μ_h^i sono

$$\mu_h^i (0) = \varepsilon_{hi}$$

col noto significato di ε_{hi}: $= 1$, $= 0$, secondo che $i = h$, oppure $i \neq h$.

Si ha pure, moltiplicando i due membri delle (4) per s e badando alle (3):

$$(4^1) \qquad y_i = y_h \mu_h^i, \quad \text{oppure} \quad y_h = y_i \mu_{h.i}$$

valide per ogni sistema di valori delle y_i (ristretti al campo in cui è regolare la trasformazione (2^1). Noto, incidentalmente, che le formule (4^1) erano già state considerate da Poincaré [1] nella rappresentazione del gruppo parametrico.

[1] *Quelques remarques sur les groupes continus*. Rendiconti di Palermo, T. XV, pag. 335, formula 4.

§ 2. - Coordinate canoniche lungo una base B appartenente a C.

Una immediata generalizzazione del risultato del n. precedente ci conduce a definire un secondo sistema coordinato canonico associato ancora ad un'n.pla di congruenze, nel quale una qualunque linea C è privilegiata. Conserviamo le notazioni del n. 1, per cui siano ancora λ_h^i, in originarie variabili x_i, i paramentri dell'n.pla, e consideriamo quella linea, che diremo B, della congruenza n.esima che passa per un punto O, qualunque, ma determinato, che supporremo rappresentata dalle equazioni

$$x_i = \varphi_i(\sigma)$$

nelle quali converremo che σ denoti l'arco di B contato da O. Sia P il generico punto di B: da esso partono $n-1$ linee appartenenti rispettivamente alle congruenze $\lambda_1^i, \ldots \lambda_{n-1}^i$, ed ogni altra linea passante per P e ortogonale a B, avrà, in P, parametri di direzione che sono combinazioni lineari delle $(\lambda_\alpha^i)_P$, $(\alpha = 1, 2 \ldots n-1)$. Consideriamo ora le ∞^{n-2} linee (che diremo C') spiccate da P ortogonalmente a B le quali siano in ogni loro punto ortogonali alla linea di λ_n^i che vi passa, ed inoltre abbiano direzione costante (ma qualunque) rispetto alle altre $n-1$ congruenze. Esse formano una ipersuperficie Σ a $n-1$ dimensioni che associamo al punto P di B. Le equazioni differenziali delle curve C' sono ovviamente

$$\frac{dx_i}{ds} = \xi_\alpha \lambda_\alpha^i, \qquad \begin{matrix} i = 1, 2 \ldots n \\ \alpha = 1, 2 \ldots n-1 \end{matrix} \tag{5}$$

con ξ_α *costanti,* tali che $\sum_1^{n-1} {}_\alpha \xi_\alpha^2 = 1$, se s denota l'arco contato, ad es., da P su ogni curva C': e per ottenere le curve C' sotto forma finita, le (5) vanno integrate con le condizioni iniziali: $x_i = \varphi_i(\sigma)$ per $s = 0$.

Ogni superficie Σ corrisponde ad un valore di σ, e viceversa ogni punto di V_n, almeno appartenente ad una regione intorno alla B, è situato su una Σ e su una sola, e quindi ad esso è associato un valore ben determinato di σ. Si completerà la sua determinazione assumendo su ogni Σ un sistema di $n-1$ coordinate; ciò che faremo generalizzando il procedimento del n. precedente.

Si integrino infatti le equazioni (5): avremo che le equazioni finite delle curve C', per s abbastanza piccolo, risultano del tipo

$$x_i = \varphi_i(\sigma) + u^i_\alpha \xi^i_\alpha s + \psi_i(s\xi_1, s\xi_2, \dots s\xi_{n-1}, \sigma) \tag{6}$$

dove si è messo in evidenza il termine lineare dello sviluppo di x_i. È da osservare che $u^i_\alpha(\sigma) = (\lambda^i_\alpha)_P$ sono funzioni determinate di σ, e che le ψ_i sono rappresentate da serie di potenze di s, che cominciano col termine in s^2, nelle quali il coefficiente di s^n è il prodotto di un termine contenente σ per un polinomio omogeneo delle costanti ξ_α di grado m: cosicchè appunto ψ_i, oltre che di σ, risulta funzione dei prodotti $s\xi_\alpha$.

Poniamo ancora

$$\begin{aligned} y_\alpha &= s\xi_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2 \dots n-1 \\ y_n &= \sigma, \end{aligned} \tag{7}$$

per cui le (6) si avranno anche sotto quest'altra forma

$$x_i = \varphi_i(\sigma) + u^i_\alpha y_\alpha + \psi_i(y_1, y_2, \dots y_{n-1}, y_n). \tag{6^1}$$

Le (6^1) definiscono un'effettiva trasformazione delle variabili x_i nelle y_i che è regolare in un certo intorno della linea B. Infatti esse permettono di calcolare le x_i in funzione delle y_i per $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$ abbastanza piccole, vale a dire in ogni punto prossimo a B, nella quale appunto $y_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \dots n-1)$; e viceversa dalle ($6^1$) si possono anche esprimere le y_i mediante le x_i, in quanto il determinante funzionale delle x rapporto alle y, continuo nei punti prossimi a B, è $\neq 0$ in B; come si ricava tosto osservando che per $y_\alpha = 0$, diventa

$$\Delta = \begin{vmatrix} u^1_1 & u^1_2 & \dots & u^1_{n-1} & \varphi'_1(\sigma) \\ u^2_1 & u^2_2 & \dots & u^2_{n-1} & \varphi'_2(\sigma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^n_1 & u^n_2 & \dots & u^n_{n-1} & \varphi'_n(\sigma) \end{vmatrix}$$

Notando che $\varphi_i' = \frac{d\varphi_i}{d\sigma} = (\lambda_n^i)_P$ sono i parametri direzionali della linea B, il determinante Δ non è altro che $\|\lambda_h^i\|$ calcolato nei punti di B, e che abbiamo supposto $\neq 0$.

Le formule (6^1) definiscono dunque un sistema di coordinate y_i associate all'n.pla di congruenze considerate, che diremo *canoniche* lungo la linea base B (appartenente all'n.esima congruenza).

La rappresentazione analitica dell'n.pla rispetto alle y_i gode di certe particolarità che passiamo a riconoscere. Indichiamo ancora con μ_h^i i parametri delle linee della congruenza h.esima, e consideriamo le linee C' che in coordinate y_i sono rappresentate dalle equazioni parametriche (7), le quali devono essere integrali delle (5) scritte in variabili y_i: si deducono le relazioni

$$(8)\qquad \begin{aligned} \xi_\alpha &= \xi_\beta \mu_\beta^\alpha \\ 0 &= \xi_\beta \mu_\beta^n \end{aligned} \qquad \alpha, \beta = 1, 2 \ldots n-1,$$

o queste altre che si hanno moltiplicandole per s

$$(8^1)\qquad \begin{aligned} y_\alpha &= y_\beta \mu_\beta^\alpha \\ 0 &= y_\beta \mu_\beta^n \end{aligned} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{aligned} y_\alpha \mu_{\beta,\alpha} &= y_\beta \\ y_\alpha \mu_{n,\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

che devono essere verificate in ogni punto (dove le y_i sono definite), e che corrispondono alle (4^1) del n. prec.

Si deduce inoltre che, le (8) dovendo essere verificate identicamente rispetto alle ξ_α nei punti di B, è

$$(\mu_\alpha^i)_P = \varepsilon_{\alpha.i}; \qquad \begin{aligned} \alpha &= 1, 2 \ldots n-1 \\ i &= 1, 2 \ldots n \end{aligned}$$

e poichè la base B è di equazioni $y_\alpha = 0$, $y_n = \sigma$, e σ è precisamente il relativo arco, i parametri direzionali di B sono $\frac{dy_i}{d\sigma} = (\mu_n^i)_P = \varepsilon_{in}$. In ogni caso dunque lungo la B:

$$(\mu_h^i)_P = \varepsilon_{ih}.$$

Osservazione. – In quanto precede ci si è costantemente riferiti ad un' n.pla di congruenze ortogonali, principalmente allo scopo di realizzare un' esposizione il più possibile espressiva dal lato geometrico: ma in nessun momento nel corso dei calcoli è intervenuta, in modo essenziale, la metrica della varietà V_n (se si eccettua là dove è stata richiamata per poter attribuire il significato d' arco al parametro s che individua i punti delle linee C: interpretazione della quale si può benissimo fare a meno). Ne viene che i due tipi di variabili canoniche sono definibili anche, e semplicemente, in relazione ad un sistema di n^2 funzioni λ^i_k, a determinante $|\lambda^i_k| \neq 0$, raggruppabili n a n in modo da formare n sistemi controvarianti (o covarianti). Infatti ciò che è essenziale per arrivare a definire le y_i è la considerazione dei sistemi differenziali (1) e (5) nei quali le ξ_i sono costanti qualunque (non tutte nulle); i quali, in ogni caso, anche cioè quando le λ^i_k non sono proprio i parametri di un' n.pla, definiscono delle linee C (o C') aventi un loro comportamento caratteristico in relazione al sistema considerato di funzioni. V'è solo da osservare che nel caso del n. 2, affinchè valgano su B le indicate particolarizzazioni per le μ^i_k, il parametro σ dei punti di B deve essere definito in modo che $(\lambda^i_n)_P = \dfrac{dx_i}{d\sigma}$.

§ 3. – Applicazione I.ª – Determinazione delle varietà riemanniane per le quali sono costanti le somme $\delta_{hke} = \gamma_{hke} + \gamma_{hek}$ di certe loro n.ple di congruenze.

Siano da determinare tutte le varietà riemanniane che ammettono n.ple di congruenze ortogonali tali che per esse risultano *costanti* le somme $\gamma_{hke} + \gamma_{hek}$ degli invarianti differenziali di 1° ordine (*coefficienti di rotazione* del Ricci). Queste varietà sono interessanti in quanto le relative equazioni delle geodetiche si possono scindere in due sistemi distinti, di 1° ordine: uno solo dei due contenente le coordinate (senza che esse varietà esauriscano la totalità di quelle per le quali questo fatto si presenta). Segue anche che il corrispondente problema dinamico: determinazione dei moti spontanei di un sistema a vincoli fissi la cui forza viva è proporzionale al ds^2 della varietà, è, secondo la locuzione introdotta dal VOLTERRA, a *caratteristiche indipendenti.* Per risolvere un siffatto problema si offrono naturalmente le coordinate che *risulteranno canoniche relativamente all' n.pla da determinarsi:* adotteremo quelle definite al n. 1, e vedremo che la soluzione dipende dall' integrazione di due sistemi di equazioni differenziali ordinarie di 1º ordine, cosicchè il ds^2 della V_n costruita sull' n.pla contiene solamente un numero finito di costanti arbitrarie.

Premettiamo che una V_n riemanniana è sempre determinata da una sua, qualunque, n.pla ortogonale di congruenze, in quanto, se

$$ds^2 = a_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

è il quadrato del suo elemento lineare, e $\lambda_{h,i}$ $(i, h = 1, 2 \ldots n)$ sono i *momenti* di una sua n.pla, valgono le relazioni

$$a_{ij} = \lambda_{h,i}\, \lambda_{h,j}\ ,$$

cosicchè una V_n di assegnate proprietà intrinseche possiamo determinarla ricercando, in certe variabili, le espressioni che spettano alle $\lambda_{h.i}$.

L' ennupla di momenti $\lambda_{h,i}$ (o di parametri λ_h^i, reciproci di $\lambda_{h,i}$ nel determinante $|\lambda_{h,i}|$) sia del tipo dichiarato dianzi, cioè per essa le somme (nelle quali $\lambda_{h.ij}$ denota la derivata covariante secondo il ds^2 d'indice j del sistema semplice $\lambda_{h,i}$)

$$\gamma_{hke} + \gamma_{hek} = (\lambda_{h.ij} + \lambda_{h,ji})\, \lambda_k^i\, \lambda_e^j = \delta_{hke}$$

siano delle *costanti* δ_{hke}, le quali, si verifica tosto, tenuto conto che gli invarianti γ_{hke} sono emisimmetrici rispetto ai due primi indici, soddisfano le identità

$$\text{(9)}\qquad \begin{aligned} &\delta_{hke} = \delta_{hek} \\ &\delta_{hke} + \delta_{keh} + \delta_{ehk} = 0 \end{aligned}\ .$$

Introduciamo le quantità

$$\text{(10)}\qquad c_{eh}^k = \gamma_{keh} - \gamma_{khe} = \left(\frac{\partial \lambda_{k\,.\,i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \lambda_{k\,.\,j}}{\partial x_i}\right) \lambda_e^i \lambda_h^j$$

mediante le quali si esprimono le δ_{hke}:

$$\text{(11)}\qquad c_{eh}^k + c_{kh}^e = \delta_{hke}\ .$$

Si eliminino nelle equazioni che si hanno per derivazioni dalle (10) le derivate seconde delle $\lambda_{k.i}$. A questo scopo sarà utile sostituire (10) con l'equivalente

$$(10^1) \qquad \frac{\partial \lambda_{k.i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \lambda_{k.j}}{\partial x_i} = c^k_{eh} \lambda_{e.i} \lambda_{h.j} :$$

si derivi poi rispetto ad un x_p, e si scrivano le altre due equazioni che si hanno permutando circolarmente i, j, p. Sommando membro a membro le derivate seconde scompaiono, e sono altresì eliminabili le derivate prime con le (10^1) stesse a causa della emisimmetria di c^h_{ke} rispetto agli indici inferiori. Moltiplicando infine per $\lambda^i_k \lambda^j_e \lambda^p_r$, e sommando su i, j, p, si arriva alle relazioni

$$(12) \qquad \frac{\partial c^h_{ke}}{\partial s_r} + \frac{\partial c^h_{er}}{\partial s_k} + \frac{\partial c^h_{rk}}{\partial s_e} + c^s_{ke} c^h_{rs} + c^s_{er} c^h_{ks} + c^s_{rk} c^h_{es} = 0 ,$$

nelle quali è inteso che, ad es., $\dfrac{\partial}{\partial s_r} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \lambda^i_r$.

Poniamo per brevità

$$c^s_{ke} c^h_{rs} + c^s_{er} c^h_{ks} + c^s_{rk} c^h_{es} = c^h_{ker} :$$

si riconosce che i simboli c^h_{ker} conservano il loro valore per ogni sostituzione *pari* degli indici k, e, r, mentre cambiano segno per una *dispari*. In particolare, quindi, se due almeno dei tre indici sono eguali, i corrispondenti simboli sono nulli.

Supponiamo ora che siano soddisfatte anche le (11) con le δ_{hke} costanti: allora le (12) assieme con le equazioni che risultano derivando intrinsecamente le (11) sono risolubili rispetto a tutte le derivate. Il modo più pratico di procedere è questo: si scrivano accanto alle (12) le stesse ottenute permutando circolarmente i quattro indici h, k, e, r, e si sommino la 1ª e 3ª equazione col doppio della 4ª e si sottragga la 2ª: risulta richiamando anche le derivate delle (11),

$$3 \frac{\partial c^h_{ke}}{\partial s_r} - c^h_{ker} - c^k_{erh} + c^e_{rhk} + 2 c^r_{hke} = 0 ,$$

che scriviamo anche

$$(13) \qquad \frac{\partial c_{ke}^h}{\partial s_r} = \Gamma_{hke,r}$$

con evidente significato dei polinomi, in e_{vw}^u, $\Gamma_{hke.r}$. Si vede dunque che la posta condizione, $\delta_{hke} = \text{cost.}$, impone agli invarianti c_{ke}^h di soddisfare ad un sistema alle derivate parziali, equivalente ad uno ai differenziali totali.

Adottiamo ora come variabili quelle y_i che risulteranno canoniche (secondo il n. 1) rispetto all'n.pla da determinarsi; e conformemente a quanto abbiamo fatto in precedenza, indichiamo con $\mu_{h.i}$ i momenti dell'incognita n.pla riferita alle variabili y_i: i parametri μ_h^i sono *definiti* come i reciproci di $\mu_{h.i}$ nel determinante $\|\mu_{h.i}\|$, che dovrà essere $\neq 0$. Riscriviamo le equazioni (10^1) in variabili y_i:

$$(14) \qquad \frac{\partial \mu_{h.i}}{\partial y_j} - \frac{\partial \mu_{h.j}}{\partial y_i} = c_{ke}^h \mu_{h.i} \mu_{e.j} :$$

il problema proposto è risolto se si sanno integrare queste equazioni nelle quali le c_{ke}^h sono funzioni che soddisfano alle (13).

Secondo questa impostazione, la ricerca preliminare da farsi è la determinazione delle soluzioni del sistema (13), il quale, al primo sguardo, non sembra atto a fornire le c_{ke}^h indipendentemente dalla preventiva conoscenza delle incognite $\mu_{h.i}$. Infatti i primi membri sono le derivate intrinseche lungo le linee μ_h^i; cioè, scritti nelle variabili hanno la forma

$$(13^1) \qquad \frac{\partial c_{ke}^h}{\partial y_i} \mu_r^i = \Gamma_{hke.r}, \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial c_{ke}^h}{\partial y_i} = \Gamma_{hke.r} \mu_{r,i}$$

dove le incognite μ_r^i entrano effettivamente. Malgrado ciò si possono intanto sviluppare tutti i calcoli necessari per riconoscere le condizioni d'esistenza di soluzioni di (13). Infatti, ricordando la formula d'inversione delle derivate seconde intrinseche, le condizioni d'integrabilità di (13) sono

$$(15) \qquad \frac{\partial \Gamma_{hke.p}}{\partial s_q} - \frac{\partial \Gamma_{hke.q}}{\partial s_p} + c_{pq}^r \Gamma_{hke.r} = 0$$

nelle quali le derivate prime sono da eliminarsi con le (13) stesse. Ma fatto ciò, ogni traccia delle incognite μ_h^i è scomparsa, e le (15) si presentano come relazioni (intere, omogenee di 3° grado in generale) tra le sole c:., alle quali sono da aggiungere le altre condizioni

$$(16) \qquad c^h_{ke} + c^k_{he} = \delta_{ehk} \; (= \text{cost.}) \; ; \qquad c^h_{le} + c^h_{ek} = 0 \,.$$

In virtù di queste ultime, le c:. che hanno due indici uguali sono costanti; talchè il numero di quelle, a priori, variabili non legate da una relazione (16) è uguale a $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, bastando considerare per ogni terna h, k, e un solo simbolo c^h_{ke}. Il numero delle condizioni d'integrabilità (15) è allora $\frac{n^2(n-1)^2(n-2)}{12}$, e se esistono soluzioni, non tutte costanti, di (13), le (15) devono intanto ridursi ad un numero, N, di equazioni indipendenti minore delle incognite c:.; cioè $N < \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Esprimendo che N è successivamente $= 0, 1, 2 \ldots . \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 1$, risultano in ogni singolo caso delle condizioni per le δ_{hke}, che saranno da esaminare nei riguardi della loro compatibilità. Se sono compatibili, le corrispondenti N equazioni indipendenti tra le (15) sono da aggregare al sistema differenziale (13): si è così condotti ad un sistema *misto,* del quale sono ancora esplicitabili le condizioni d'integrabilità. Se esse non sono identicamente soddisfatte nelle c:. variabili, tenuto conto delle N equazioni finite, vi saranno delle nuove equazioni in termini finiti da aggiungere alle N iniziali. Se complessivamente sono in numero maggiore di $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, bisognerà di nuovo esprimere che si riducono a meno di tale numero: e con ciò si hanno altre condizioni per le δ_{hke}. Le nuove equazioni finite si aggregano ancora alle (13) e si continua con lo stesso procedimento fino a che, o si constatano incompatibilità, o si arriva ad nn sistema misto le cui condizioni d'integrabilità sono identicamente soddisfatte.

Orbene *per un sistema siffatto le incognite* c^k_{he} *sono effettivamente determinabili nelle coordinate canoniche* y_i *integrando un sistema differenziale ordinario,* malgrado che le (13) contengono le incognite μ^i_h.

Intanto le relazioni finite tra le $c.\because$ che rendono completo il sistema (13), consentiranno di eliminare un egual numero di $c.\because$ stesse: il sistema (differenziale puro) che ne risulta per il minor numero di $c.\because$ è pure completo, e sarà della forma (vedi 13')

$$\frac{\partial c_{ke}^{h}}{\partial y_i} = f_{hke,r}(c.\because)\, \mu_{r.i} \tag{13''}$$

e solo interessa notare che nei secondi membri i coefficienti di $\mu_{r,i}$ sono certe funzioni delle sole $c.\because$.

Sia O l' origine delle coordinate canoniche y_i, e consideriamo le curve C partenti da O e definite al n. 1, di equazioni $y_i = s\xi_i$ (ξ_i costanti). Queste curve esauriscono in O la stella di direzioni; e, almeno in un intorno di O, ogni punto P sarà congiunto ad O da una determinata di esse. *Integriamo il sistema completo* (13'') *col metodo di* Morera *assumendo come linee d'integrazione precisamente le curve* $y_i = s\xi_i$: il corrispondente sistema di equazioni differenziali ordinarie è

$$\frac{d c_{ke}^{h}}{ds} = f_{hke,r}\, \mu_{r,i}\, \frac{d y_i}{ds} = f_{hke,r}\, \mu_{r,i}\, \xi_i\,,$$

il quale, in virtù delle relazioni (4) verificate dal sistema coordinato, diventa

$$\frac{d c_{ke}^{h}}{ds} = \xi_r f_{hke,r}(c.\because) \tag{13'''}$$

nel quale le incognite $\mu_{r,i}$ sono scomparse, e le ξ_r sono costanti arbitrarie, non tutte nulle. Attesa la forma del 2º membro, le c_{ke}^{h} sono funzioni dei prodotti $s\xi_i = y_i$: fatta questa sostituzione, le c_{ke}^{h} si ricavano quindi effettivamente espresse nelle variabili canoniche per la corrispondente n.pla di congruenze.

§ 4. - Integrazione delle equazioni (14).

Supponiamo d'aver determinato un sistema di invarianti $c_{ke}^{h} = c_{ke}^{h}(y_i)$ col metodo precedentemente indicato: occorrerà ora integrare le (14), con le condizioni iniziali $\mu_{h.i} = \varepsilon_{hi}$

per $y_i = 0$. Consideriamo come prima le linee C che congiungono l'origine O con ogni punto P del suo intorno, e calcoliamo le derivate $\frac{d\mu_{h.i}}{ds}$ dell'incognita $\mu_{h,i}$ rapporto all'arco s della generica linea C. A tale scopo moltiplichiamo le (14) per $y_j = s\xi_j$ e sommiamo sull'indice j: tenendo conto delle (4'), e che la derivata richiesta è

$$\frac{d\mu_{h.i}}{ds} = \frac{\partial \mu_{h.i}}{\partial y_j}\frac{dy_j}{ds} = \frac{\partial \mu_{h.i}}{\partial y_j}\xi_j = \frac{1}{s}\frac{\partial \mu_{h.i}}{\partial y_j}y_j \,,$$

avremo

$$s\frac{d\mu_{h.i}}{ds} + \mu_{h,i} - \varepsilon_{hi} = s\, c^h_{ke}\mu_{k.i}\xi_e \,. \tag{15}$$

Ora, lungo una linea C, le quantità ξ_e sono *costanti:* le incognite $\mu_{k.i}$ soddisfano dunque lungo ogni linea C al sistema (15) di equazioni differenziali ordinarie.

Viceversa, entro le c^h_{ke} determinate al n. prec. poniamo $s\xi_i$ al posto di y_i, e interpretiamo nelle (15) le ξ_j come parametri costanti (non tutti nulli): le $\mu_{h.i}$ risulteranno determinate quali funzioni dei *prodotti* $\xi_i s$, quando, come deve farsi, si ponga $\mu_{h.i} = \varepsilon_{hi}$ per $s = 0$. Sostituendo poi di nuovo y_i al posto di $s\xi_i$, otteniamo in ogni punto appartenente ad un certo intorno di O, delle funzioni $\mu_{h.i}$ (9), che, come proveremo, soddisfano al sistema (14) alle derivate parziali.

Nei riguardi dell'integrazione di (15) si possono assumere come incognite le $\nu_{h,i} = s\mu_{h.i}$, con le condizioni iniziali $\nu_{h,i} = 0$ per $s = 0$, per le quali si ha il sistema più semplice

$$\frac{d\nu_{h,i}}{ds} - \varepsilon_{h.i} = c^h_{ke}\nu_{k.i}\xi_e \,. \tag{15'}$$

Prima di procedere alla verifica delle (14), dimostriamo che le $\mu_{h.i}$ verificano in ogni punto le relazioni (4). Basta moltiplicare le (15) per ξ_i e sommare su i: siccome le ξ_i sono costanti rispetto ad s, avremo

$$s\frac{d\mu_{h.i}\xi_i}{ds} + \mu_{h.i}\xi_i - \xi_h = s\, c^h_{ke}\mu_{k.i}\xi_i\xi_e \,.$$

Poniamo

$$\mu_{h.i}\xi_i = H_h + \xi_h \,.$$

Per $s = 0$ si ha $H_h = 0$: proviamo che l'uguaglianza vale ovunque. La precedente equazione si scrive anche

$$s \frac{d H_h}{ds} + H_h = s c_{ke}^h H_k \xi_e + s c_{ke}^h \xi_k \xi_e .$$

L'ultimo termine è nullo: resta per le H_h (o se si vuole, per $s H_h$) una equazione lineare omogenea; ed allora essendo $H_h = 0$ inizialmente, lo è sempre. Le (4) sono dunque soddisfatte.

Veniamo ora alla verifica delle (14) con le $\mu_{h.i}(s \xi_j) = \mu_{h.i}(y_j)$ determinate con le (15).

Si ha formalmente

$$\frac{\partial \mu_{h.i}}{\partial y_j} = \frac{1}{s} \frac{\partial \mu_{h.i}}{\partial \xi_j}, \tag{16}$$

cosicchè il sistema (14), nel quale le $\mu_{h.i}$, e così pure le c_{ke}^h, si pensano ora espresse per i prodotti $s \xi_j$, può scriversi

$$\frac{\partial \mu_{h.i}}{\partial \xi_j} - \frac{\partial \mu_{h.j}}{\partial \xi_i} = s c_{ke}^h \mu_{k.i} \mu_{e.j} , \tag{14'}$$

ed è chiaro che se $\mu_{h.i}(s \xi)$ soddisfano a (14′), le $\mu_{h.i}(y)$ verificano (14). Conviene ora, prima di procedere, sfruttare la circostanza che in (14′) la s interviene come un parametro indipendente dalle ξ_i, per sostituire alle (14′) l'equivalente sistema per le $\nu_{h.i} = s \mu_{h.i}$. Basta a tale scopo moltiplicare (14′) per s: risulta

$$\frac{\partial \nu_{h.i}}{\partial \xi_j} - \frac{\partial \nu_{h.j}}{\partial \xi_i} = c_{ke}^h \nu_{k.i} \nu_{e.j} , \tag{14''}$$

che vogliamo riconoscere è soddisfatto dalle funzioni $\nu_{h.i} = s \varphi_{h.i}(s \xi)$ che risultano dall'integrazione di (15′).

Poniamo a tale scopo

$$V_{hij} = \frac{\partial \nu_{h.i}}{\partial \xi_j} - \frac{\partial \nu_{h.j}}{\partial \xi_i} - c_{ke}^h \nu_{k.i} \nu_{e.j} ,$$

e deriviamo rispetto ad s tenendo conto delle (15′). Lungo una curva C le ξ_j sono costanti, talchè la derivazione secondo s è permutabile con la derivazione parziale rispetto alle ξ_j: avremo perciò:

$$\frac{d V_{hij}}{ds} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\varepsilon_{hi} + c_{ke}^h \nu_{k.i} \xi_e) - \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\varepsilon_{hj} + c_{ke}^h \nu_{k.j} \xi_e) -$$

$$- c^h_{ke}[\nu_{k,i}(\varepsilon_{ej} + c^e_{pq}\nu_{p.j}\,\xi_q) + \nu_{e.j}(\varepsilon_{ki} + c^k_{pq}\nu_{p.i}\,\xi_q)] -$$

$$- \nu_{k.i}\nu_{e.j}\frac{d\,c^h_{ke}}{d\,s}.$$

Essendo c^h_{ke} funzione delle $\xi_i s = y_i$, sarà, anche per le (4),

$$\frac{d\,c^h_{ke}}{d\,s} = \frac{\partial\,c^h_{ke}}{\partial\,y_r}\xi_r = \frac{\partial\,c^h_{ke}}{\partial\,y_r}\xi_p\,\mu^r_p\,,$$

per cui tenendo conto della (16) e delle $c^h_{ke} + c^h_{ek} = 0$, dopo opportuni cambiamenti d' indice di somma, avremo

$$\frac{d\,V_{hij}}{d\,s} = c^h_{ke}\,\xi_e\left(\frac{\partial\,\nu_{k,i}}{\partial\,\xi_j} - \frac{\partial\,\nu_{k.j}}{\partial\,\xi_i}\right) - \xi_e\,[c^h_{ks}\,c^s_{pe} + c^h_{ps}\,c^s_{ek}]\,\nu_{k.i}\nu_{p.j} +$$

$$+ \xi_e\left[\frac{\partial\,c^h_{ke}}{\partial\,y_j}s\,\nu_{k.i} - \frac{\partial\,c^h_{ke}}{\partial\,y_i}s\,\nu_{k.j} - \frac{\partial\,c^h_{kp}}{\partial\,y_r}\nu_{k.i}\,\nu_{p.j}\,\mu^r_e\right]_{y=\xi s}.$$

Ponendo per la differenza

$$\frac{\partial\,\nu_{k.i}}{\partial\,\xi_j} - \frac{\partial\nu_{k.j}}{\partial\,\xi_i} \text{ il suo valore } V_{k.ij} + c^k_{pq}\,\nu_{p.i}\,\nu_{q.j}\,,$$

avremo, rimettendo negli ultimi termini in evidenza le $\mu_{k,i}$,

$$\frac{d\,V_{hij}}{d\,s} = c^h_{ke}\,\xi_e\,V_{kij} + s^2\,\xi_e\left[\frac{\partial\,c^h_{ke}}{\partial\,y_j}\mu_{k.i} + \frac{\partial\,c^h_{ek}}{\partial\,y_i}\mu_{k.j} + \frac{\partial\,c^h_{pk}}{\partial\,y_r}\mu_{k,i}\,\mu_{p.j}\,\mu^r_e +\right.$$

$$\left. + \mu_{p.i}\,\mu_{q.j}\,(c^h_{se}\,c^s_{pq} + c^h_{sp}\,c^s_{qe} + c^h_{sq}\,c^s_{ep})\right].$$

Sostituendo, nell' ultimo termine, alla derivazione rapporto alle y_i, la derivazione intrinseca secondo le linee dell' n.pla, tra le quali passa una relazione del tipo

$$\frac{\partial\,c^h_{he}}{\partial\,y_j} = \frac{\partial\,c^h_{ke}}{\partial\,s_p}\mu_{p.j}\,,$$

avremo in definitiva

$$\frac{d\,V_{hij}}{d\,s} = c^h_{ke}\,\xi_e\,V_{kij} + s^2\,\xi_e\,\mu_{k.i}\,\mu_{p.j}\left[\frac{\partial\,c^h_{ke}}{\partial\,s_p} + \frac{\partial\,c^h_{ep}}{\partial\,s_k} + \frac{\partial\,c^h_{pk}}{\partial\,s_e} +\right.$$

$$\left. + c^h_{se}\,c^s_{kp} + c^h_{sk}\,c^s_{pe} + c^h_{sp}\,c^s_{ek}\right].$$

Il termine tra parentesi è nullo, perchè le c^h_{ke} soddisfano alle equazioni (12): resta dunque

$$\frac{d\,V_{hij}}{d\,s} = c^h_{ke}\,\xi_e\,V_{hij}$$

che sono equazioni lineari e omogenee nelle incognite V_{hij}; le quali perciò se sono nulle inizialmente lo sono identicamente. Ora è proprio così, perchè le (15') dovendo essere integrate con la condizione $\nu_{h.i}=0$ per $s=0$ forniscono per $\nu_{h.i}$ delle serie il cui primo termine è $\varepsilon_{hi}\,s$, cosicchè, in $s=0$, le derivate parziali rapporto a ξ_i sono nulle come s^2. Segue che i due membri delle (14'') sono nulli in $s=0$, e quindi $(V_{hij})_0=0$.

Si conclude quindi che: *scelta una soluzione del sistema differenziale* (13'''), *il quale determina le* c^h_{ke} *in coordinate canoniche, l'ulteriore integrazione di* (15) o (15'), *fornisce, nelle stesse variabili, la corrispondente n.pla di congruenze per la quale risulteranno costanti le somme* $c^h_{ke}+c^k_{he}$.

Se ci si pone il problema totale, di determinare cioè *tutte* siffatte n.ple, e quindi tutte le varietà in cui esse possono trovarsi, ci si imbatte nella discussione, praticamente ineseguibile per $n>3$: determinazione di tutte le possibili condizioni da imporsi alle costanti δ_{hke} che riducono completo il sistema (13). Ma ad altri problemi più localizzati può prestarsi il metodo qui esposto: per citarne uno, determinare se esistono e quali sono le V_n che possiedono n.ple con i δ_{hke} tutti nulli (che sono le varietà le cui geodetiche hanno direzioni costanti rispetto all'n.pla locale), ecc.

§ 5. - Caso particolare $n=3$.

Il caso $n=2$ non presenta interesse. Per $n=3$ poniamo

$$\begin{array}{lll} c^1_{23}=p_1 & c^1_{31}=p_2 & c^1_{12}=p_3\,, \\ c^2_{23}=q_1 & c^2_{31}=q_2 & c^2_{12}=q_3\,, \\ c^3_{23}=r_1 & c^3_{31}=r_2 & c^3_{12}=r_3\,. \end{array}$$

Si ricordi che le c.·. con due indici uguali sono costanti; non sono dunque necessariamente costanti p_1, q_2, r_3 che sono d'altronde legati da due relazioni

$$(17) \qquad p_1 - q_2 = \delta_{321}\,, \qquad r_3 - p_1 = \delta_{231}\,;$$

cosicchè basta scrivere le equazioni (13) solamente per p_1. Esse sono

$$(18) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial s_1} &= p_1(q_3 - r_2) + p_2 r_1 - p_3 q_1\,, \\ \frac{\partial p_1}{\partial s_2} &= q_2(r_1 - p_3) + p_2 q_3 - r_2 q_1\,, \\ \frac{\partial p_1}{\partial s_3} &= r_3(p_2 - q_1) + r_1 q_3 - r_2 p_3\,, \end{aligned}$$

le cui condizioni d'integrabilità, tenuto conto delle (17), sono

$$(19) \qquad (q_3 - r_2)\frac{\partial p_1}{\partial s_2} - (r_1 - p_3)\frac{\partial p_1}{\partial s_1} + p_3\frac{\partial p_1}{\partial s_1} + q_3\frac{\partial p_1}{\partial s_2} + r_3\frac{\partial p_1}{\partial s_1} = 0$$

ed altre due analoghe. Eliminando le derivate con le (18), le (19) diventano, anche per le (17), tre equazioni di 2° grado nella variabile p_1 (tutte le rimanenti quantità sono costanti): ove si cerchino le soluzioni di (18) *non costanti*, occorre esigere che le (19) si riducano ad *identità* rispetto a p_1, altrimenti esse, se compatibili, assegnano a p_1 valore costante. In particolare i coefficienti dei termini di 2° grado in p_1 dovranno essere nulli nelle 3 equazioni (19): calcolandoli si vede che è

$$p_2 - q_1 = 0\,, \qquad q_3 - r_2 = 0\,, \qquad r_1 - p_3 = 0\,;$$

ed allora si constata che i secondi membri delle (18) sono pure nulli, e la p_1 non può essere che costante. *Non esiste dunque una V_3 del tipo qui considerato e per la quale gti invarianti c_{ke}^{h} non sono tutti costanti.*

§ 6. - Applicazione II.ª - Integrazione delle equazioni di Maurer nell' intorno di un G_1.

Nelle esposizioni tradizionali della teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni la dimostrazione del terzo teorema fondamentale di Lie consegue dalla riconosciuta integrabilità, in certe variabili, delle equazioni di Maurer

$$\frac{\partial \mu_{h.i}}{\partial y_j} - \frac{\partial \mu_{h.j}}{\partial y_i} = c^h_{ke}\, \mu_{k.i}\, \mu_{e.j} \tag{20}$$

nelle quali le funzioni incognite $\mu_{h.i}$ sono reciproche nel determinante $\| \mu^i_h \|$ dei coefficienti delle trasformazioni infinitesime

$$Y_h f = \mu^i_h \frac{\partial f}{\partial y_i},$$

e c^h_{ke} sono le *costanti di composizione* del gruppo soddisfacienti alle relazioni

$$c^h_{ke} + c^h_{ek} = 0 \,,$$

$$c^h_{se}\, c^s_{kp} + c^h_{sk}\, c^s_{pe} + c^h_{sp}\, c^s_{ek} = 0 \,.$$

Nel metodo d' integrazione di Schur, le variabili adottate sono i parametri canonici del gruppo, che, ove si associ al *gruppo parametrico* la considerazione dell' n.pla di momenti $\mu_{h.i}$, sono le *variabili canoniche* relative a tale n.pla, come sono state definite al n. 1.

Cartan [1] ha osservato che con questo procedimento non sempre si può arrivare a costruire la totalità del gruppo parametrico, in quanto la determinazione dei parametri canonici da assegnarsi ai punti della V_n su cui il gruppo è rappresentato, può essere arrestata nei punti di una V_{n-1}, se precisamente $n-1$ sono le dimensioni della varietà dei punti nei quali l' equazione caratteristica del gruppo ha delle radici multipli interi, non nulli, di $2\pi i$. In realtà, dunque, l' integrazione delle equazioni di Maurer in parametri canonici, fornisce in generale una porzione di gruppo nell' *intorno della trasformazione identica.*

L' adozione delle variabili canoniche lungo una linea definite al n. 2, consente, come vedremo, di costruire il gruppo parametrico *nell' intorno di un suo qualunque sottogruppo ad un parametro.*

Le y_i considerate nelle (20) siano tali variabili, per le quali la curva B base, sia, come al n. 2, la curva della congruenza n.esima che passa per l' origine O. Supposto ora $i \neq n$, per cui al suo posto scriveremo α, moltiplichiamo quelle delle (20) che

(1) Mémorial des sciences mathématiques. Fasc. XLII, pag. 21.

corrispondono a valori di $j=\beta \neq n$, per $y_\beta = s\xi_\beta$, e sommiamo su β, da 1 a $n-1$: avremo, trasformando ovviamente il 2° termine,

$$\frac{\partial \mu_{h.\alpha}}{\partial y_\beta} s\xi_\beta - \frac{\partial \mu_{h.\beta} y_\beta}{\partial y_\alpha} + \mu_{h.\alpha} = c^h_{ke} \mu_{k.\alpha} \mu_{e.\beta} y_\beta .$$

Per la derivata lungo una linea C' di equaz. $y_\alpha = s\xi_\alpha$ (n. 2) si ha

$$\frac{d\mu_{h.\alpha}}{ds} = \frac{\partial \mu_{h.\alpha}}{\partial y_\beta} \xi_\beta ; \tag{21}$$

inoltre le relazioni (8′) consentono di sostituire al posto di $\mu_{e.\beta} y_\beta$: y_e se $e \neq n$, 0 se $e = n$. Si hanno dunque le equazioni

$$s\frac{d\mu_{h.\alpha}}{ds} + \mu_{h.\alpha} - \varepsilon_{h\alpha} = s c^h_{k\beta} \mu_{k.\alpha} \xi_\beta , \tag{22}$$

valide per ogni h, e che costituiscono un sistema differenziale ordinario di 1° ordine tra le incognite $\mu_{h.\alpha}$, al quale, ponendo $\nu_{h.\alpha} = s\mu_{h.\alpha}$, si può sostituire il sistema più semplice

$$\frac{d\nu_{h.\alpha}}{ds} - \varepsilon_{h\alpha} = c^h_{k\beta} \nu_{k.\alpha} \xi_\beta , \qquad \begin{array}{l} h, k = 1, 2 \ldots n \\ \alpha, \beta = 1, 2 \ldots n-1 \end{array} \tag{22′}$$

da integrarsi con le condizioni iniziali $\nu_{k.\alpha} = 0$ per $s = 0$. L'integrazione è algebrica.

Restano da determinare le equazioni per le $\mu_{h.n}$. Nelle (20) facciamo $i = n$, e $j = \beta \neq n$: moltiplicando per $y_\beta = s\xi_\beta$ e sommando su β (da 1 a $n-1$), otteniamo

$$s\frac{\partial \mu_{h.n}}{\partial y_\beta} \xi_\beta - \frac{\partial \mu_{h.\beta}}{\partial y_n} y_\beta = s c^h_{ke} \mu_{k.n} \mu_{e.\beta} \xi_\beta .$$

Ora, anche per le (8′),

$$\frac{\partial \mu_{h.\beta}}{\partial y_n} y_\beta = \frac{\partial \mu_{h.\beta} y_\beta}{\partial y_n} - \mu_{h.\beta} \frac{\partial y_\beta}{\partial y_n} = 0 :$$

sarà dunque, dopo aver diviso per s, e richiamando le (21),

$$\frac{d\mu_{h.n}}{ds} = c^h_{k\beta} \mu_{k.n} \xi_\beta \qquad \begin{array}{l} h.k = 1, 2 \ldots n \\ \beta = 1, 2 \ldots n-1 \end{array} . \tag{23}$$

Ecco il sistema differenziale, ancora integrabile algebricamente, che fornisce le rimanenti incognite $\mu_{h.n}$, quando le condizioni iniziali sono $\mu_{hn} = \varepsilon_{hn}$ per $s = 0$. Per la forma delle equazioni (22), o (22') e (23) le $\mu_{h.i}$ risultano funzioni dei prodotti $s\xi_\alpha$: si tratta ora di far vedere che, scritto y_α al posto di $s\xi_\alpha$, le stesse funzioni soddisfano alle equazioni (20) di Maurer.

Per i valori degli indici, $i, j \neq n$, interessa considerare solamente il sistema (22) o (22') che coincide formalmente con quello considerato nella abituale dimostrazione di Schur: la sola differenza è che la somma su β va da 1 a $n-1$, in luogo che fino ad n. Ma ciò non pregiudica l'identità formale, bastando porre $\xi_n = 0$ nel sistema di Schur. La verifica richiesta dianzi può vedersi quindi nel Bianchi [1], oppure desumersi come caso particolare dell'analoga sviluppata al n. 4, ove solo si faccia l'ipotesi che le c_{ke}^h sono costanti.

Resta da vedere il caso in cui uno degli indici, poniamo i, è $= n$, mentre $j = \alpha \neq n$. Poniamo

$$V_{h.\alpha} = s\left(\frac{\partial \mu_{h.n}}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial \mu_{h.\alpha}}{\partial y_n} - c_{ke}^h \mu_{k,n} \mu_{e,\alpha}\right),$$

e pensando le $\mu_{h.\alpha}$, $\mu_{h,n}$ definite rispettivamente da (22), (23), con la solita sostituzione $y_\alpha = s\xi_\alpha$, calcoliamo $\frac{dV_{h\alpha}}{ds}$, cioè la derivata di $V_{h\alpha}$ lungo una qualunque C. Notiamo anzitutto che le $\mu_{h.i}$ risultano indipendenti da y_n, e che inoltre

$$\frac{\partial \mu_{h.n}}{\partial \xi_\alpha} = s\frac{\partial \mu_{h.n}}{\partial y_\alpha},$$

per cui avremo pure

$$V_{h\alpha} = \frac{\partial \mu_{h.n}}{\partial \xi_\alpha} - c_{ke}^h \mu_{k.n} \nu_{e,\alpha}, \tag{24}$$

e, beninteso, nei secondi membri pensiamo ora le $\mu_{k.n}$, $\nu_{e,\alpha}$ espresse in funzione di s, ξ_α. Si ha dunque, essendo permutabili le derivate parziali rispetto a ξ_α e la derivata secondo s:

(1) *Lezioni sulla teoria dei gruppi finiti di trasf.* pag. 110.

$$\frac{d\,V_{h\alpha}}{ds} = \frac{\partial}{\partial\,\xi_\alpha}\,(c^h_{k\beta}\,\mu_{k.n}\,\xi_\beta) - c^h_{ke}\,[\nu_{e,\alpha}\,c^k_{p\beta}\,\mu_{p,n}\,\xi_\beta + \mu_{k,n}\,(\varepsilon_{e\alpha} + c^e_{p\beta}\,\nu_{p.\alpha}\,\xi_\beta)]\,.$$

Sviluppando e sostituendo a $\frac{\partial\,\mu_{h,n}}{\partial\,\xi_\alpha}$ secondo la (24), avremo, dopo aver scambiato p, e, k in e, k, p nell'ultimo termine,

$$\frac{d\,V_{h\alpha}}{ds} = c^h_{k\beta}\,V_{k\alpha} + (c^h_{k\beta}\,c^k_{pe} + c^h_{ke}\,c^k_{\beta p} + {}^h_{kp}\,c^k_{e\beta})\,\mu_{p.n}\,\nu_{e.\alpha} + (c^h_{k\alpha} + c^h_{\alpha k})\,\mu_{k.n}\,.$$

Gli ultimi termini si annullano a causa delle identità cui soddisfano le costanti di composizione, resta perciò:

$$\frac{d\,V_{h\alpha}}{ds} = c^h_{k\beta}\,\xi_\beta\,V_{k\alpha}\,.$$

Ora $V_{h\alpha}$ s'annulla sui punti della base B del sistema coordinato (ivi è $s=0$), e siccome soddisfa ad un sistema lineare e omogeneo, è nulla per ogni valore di s: vale a dire $V_{h\alpha}=0$ in ogni punto dell'intorno di B dove le variabili y_i sono definite. Le equazioni di MAURER sono dunque integrate da (22) e (23).

Il precedente metodo d'integrazione costruisce il gruppo (parametrico) nell'intorno di un suo qualunque sottogruppo G_1 ad un parametro. Lo si vede adottando il punto di vista geometrico di CARTAN [1], il quale rappresenta il gruppo parametrico G_n su una varietà V_n, facendo corrispondere ad ogni trasformazione finita un punto in modo che sussistano certe due connessioni lineari. Nella realizzazione analitica del gruppo, la V_n di gruppo può pensarsi determinata dalle n congruenze di momenii $\mu_{h\,i}$ (reciproci dei coefficienti μ^i_h delle trasformazioni infinitesime), per cui ad esse, in particolare, può essere attribuita la metrica

$$ds^2 = \mu_{h.i}\,\mu_{h.j}\,dy_i\,dy_j\,.$$

Sia O il punto di V_n rappresentativo dell'identità: le linee di equazioni differenziali

$$\frac{dy_i}{ds} = \mu^i_h\,, \qquad h, i = 1, 2 \ldots n\,.$$

[1] *Géométrie des groupes des transformations.* Journal de Matématiques, T. VI (1927).

che partono da O, cioè le n linee per O appartenenti ad ognuna delle n congruenze, sono le traiettorie degli n gruppi ad un parametro contenuti nel G_n considerato. La linea di base B delle variabili canoniche y_i, e considerate nel calcolo che precede, quale linea di μ_n^i passante per O, rappresenta effettivamente un G_1 contenuto in G_n; per cui è provato che col procedimento d'integrazione suesposto, il G_n parametrico risulta costruito nell'intorno di tale suo sottogruppo.

Osservando poi che eseguendo una sostituzione a coefficienti costanti (e a determinante $\neq 0$) sulle iniziali trasformazioni infinitesime si ottiene un'altra base equivalente di G_n, e le linee C per O si sostituiscono fra loro, si riconosce che la traiettoria base B può essere quella di un qualunque sottogruppo G_1 di G_n.