

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO TONOLO

## **Commemorazione di Giuseppe Vitali**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 3 (1932), p. 67-81

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1932\\_\\_3\\_\\_67\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1932__3__67_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## COMMEMORAZIONE DI GIUSEPPE VITALI

di ANGELO TONOLO

La forte amicizia che ebbe inizio nel 1924, quando Egli venne ad occupare la cattedra di Analisi infinitesimale nell'Università di Padova, la devota riconoscenza per le prove che ho avuto del Suo animo squisitamente buono, la profonda ammirazione verso il matematico di grande potenza, mi spingono a dire della vita e delle opere di GIUSEPPE VITALI, vita che fu intensa di pensiero e di lavoro, opere che non cadranno con Lui, ma resteranno patrimonio di quella disciplina che Egli tanto amò. Sia questo il mio omaggio d'affetto verso la Memoria del grande e il caro Amico perduto.

GIUSEPPE VITALI nacque a Ravenna il 26 Agosto 1875. Fanciullezza senza agi fu la Sua, perchè il padre, assistente ai lavori ferroviari con scarso stipendio, non poteva dispensare il minimo benessere economico ai cinque figli, di cui il Nostro era il maggiore. Ma nessuno ignora che nella povertà si temprano le maggiori virtù umane, e il padre, educato alla severa scuola del lavoro e del sacrificio, chiuse la sua dura esistenza con la piena soddisfazione di vedere i figli seguire con amore il suo esempio, e raggiungere tutti ottime posizioni sociali. Ma anche dell' unica ricchezza costituita dal vigile amore della madre e del padre, doveva il VITALI ben presto essere privato, perchè, quando Egli frequentava il Ginnasio di Ravenna, il padre fu trasferito a Lecco, e l' Adolescente rimase solo in quella città presso uno zio, conservando per la famiglia lontana un affetto quasi morboso. Frequentò il liceo di Ravenna, dove dal valente professore NONNI apprese gli elementi delle matematiche. Le simpatiche riunioni di uomini maturi e di giovani studenti che

avvenivano nel domestico studio del NONNI, ove si discutevano quistioni di matematica, ebbero certamente influenza nella mente del giovane Allievo. E la naturale inclinazione a questa disciplina cominciò subito a manifestarsi, perchè il VITALI, non solo era costantemente il primo fra tutti nella risoluzione dei problemi, ma lasciava indietro di buon tratto i più distinti, per modo che veniva citato dal NONNI come esempio rarissimo. Ottenuta la licenza liceale, frequentò nel 1895 i Corsi di Matematiche dell'Università di Bologna; indi, ottenuta una borsa di studio per la Scuola Normale Superiore di Pisa, passò l'anno successivo in questa Università, dove il DINI e il BIANCHI furono i Suoi Maestri prediletti. Fervidi uomini, suscitatori di idee e di ricerche nei giovani matematici, presero essi a stimare il Nostro, nel quale avevano riconosciuto un ingegno, non meno acuto che pronto, e furono da Lui contraccambiati della più deferente e affettuosa ammirazione. A Pisa si laureò con lode nel 1899, presentando come Tesi una ricerca, ove estende alle superficie di RIEMANN il classico teorema di MITTAG-LEFFLER sull'esistenza di funzioni analitiche uniformi dotate di singolarità assegnate in punti prestabiliti del piano complesso. Più importante è la Sua Tesi di abilitazione dell'anno successivo, dove, prendendo a soggetto una indicazione contenuta in una Memoria dell'APPELL sugli integrali delle funzioni a moltiplicatori, trasporta lo studio degli integrali abeliani alle soluzioni delle equazioni differenziali lineari omogenee del second'ordine a coefficienti algebrici con punti singolari della classe di FUCHS. Con queste due Memorie, unite all'altra del 1900 dove esamina le funzioni analitiche le cui derivate  $n$ -esime ammettono un limite finito al crescere indefinito di  $n$ , entra il giovane VITALI nell'agone scientifico, lasciandovi subito una impronta con i risultati ottenuti nella Sua Tesi di abilitazione. Egli restò all'Università di Pisa quale Assistente del DINI fino al 1901; poi, in seguito a concorso, raggiunse la Scuola Tecnica di Sassari, e nel 1902 vinse il concorso per il Liceo di Voghera. Nel 1904 passò al Liceo « Colombo » di Genova, dove rimase fino al 1922, conseguendo nel 1907 la libera docenza in Analisi infinitesimale, nel 1909 il premio Ministeriale per la Matematica, e nel 1911 ebbe l'incarico dell'Analisi Matematica nella R. Scuola Navale Superiore di Genova.

Esaminiamo la produzione scientifica del Nostro durante il periodo d'insegnamento nelle Scuole Secondarie.

Verso il 1900 il problema della misura degli insiemi di punti d'una retta attirava l'attenzione di eminenti matematici. Nel 1898 il BOREL diede a grandi linee una vasta classe di insiemi che soddisfano alle condizioni di tale problema, e nel 1901 il LEBESGUE completò la ricerca, giungendo a quella classe di insiemi misurabili che meritatamente porta il suo nome. Indipendentemente dal LEBESGUE, e senza conoscere l'opera dell'eminento matematico francese, il VITALI arrivò nel 1903 allo stesso concetto di misura lebesguiana, estendibile agli insiemi non limitati. Restava però sempre il dubbio se ogni insieme di punti della retta fosse misurabile nel senso di LEBESGUE. Questo dubbio fu tolto dallo stesso VITALI, il quale nel 1905 diede il primo esempio di un insieme di punti non misurabile.

Al concetto di misura il Nostro fu condotto cercando le proprietà caratteristiche delle funzioni integrabili secondo RIEMANN. Il LEBESGUE, nella sua classica Tesi del 1902, osservò che i punti di discontinuità di una funzione integrabile secondo RIEMANN formano un insieme di misura nulla. Ma nel 1903 il VITALI dimostrò che l'integrabilità riemanniana d'una funzione dipendeva esclusivamente dalla natura dell'insieme dei suoi punti di discontinuità, e nel 1904 Egli diede al risultato una forma più elegante, trovando che condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità in discorso, è che l'insieme dei punti di discontinuità della funzione sia di misura nulla. Nello stesso anno questo teorema fu ottenuto dal LEBESGUE.

Fra le funzioni continue a variazione limitata, hanno particolare importanza quelle che il VITALI chiamò nel 1905 assolutamente continue. Il LEBESGUE un anno prima di Lui aveva fissato l'attenzione sopra questa classe di funzioni, ma spetta al Nostro il merito di avere introdotto nella matematica questo concetto che si dimostrò essenziale, permettendo a Lui e ad altri di ottenere risultati di alto interesse. E in primo luogo Egli dimostrò nel 1905 che l'assoluta continuità caratterizza completamente le funzioni integrali secondo LEBESGUE. Questo fondamentale teorema venne indicato dallo stesso LEBESGUE nel 1904, ma fu dimostrato in modo completo dal VITALI nel 1905, e dal

LEBESGUE nel 1907, ritrovato dal VITALI nel 1908 con metodo diverso dal primo, che ha il vantaggio di essere estendibile ai casi di due o più variabili.

Nella teoria delle funzioni di variabile reale un problema molto interessante è quello dell'integrazione per serie. Il Nostro vi dedicò una penetrante ricerca del 1907. Egli non considerò il problema soltanto dal punto di vista della integrazione estesa ad un segmento, ma lo studiò da quello più generale dell'integrazione estesa ad un qualsiasi insieme misurabile di punti. A questo scopo Egli introdusse il concetto di integrabilità completa per serie, e di equiassoluta continuità di un insieme di funzioni, e determinò la condizione necessaria e sufficiente perchè una serie di funzioni sommabili sia integrabile completamente per serie. In particolare caratterizzò una vasta classe di serie convergenti, per cui è lecita l'integrazione termine a termine nel senso ordinario.

Nella teoria degli insiemi di punti sono usati con molto vantaggio gli « Überdeckungssätze ». Il primo teorema in proposito è di BOREL del 1894. In stretto legame con esso sta una proposizione di VITALI del 1908 di capitale importanza che i Tedeschi chiamano « Überdeckungssatz von VITALI ». Appoggiandosi su questa proposizione, e sopra un'idea fondamentale di VOLTERRA, LEBESGUE, DE LA VALLÉE POUSSIN ed altri hanno ampiamente sviluppato la derivazione degli integrali multipli. Spetta però al Nostro il merito di avere iniziato nel 1908 questa teoria, raggiungendo risultati cospicui.

Il BAIRE nel 1898 pose la sua ben nota classificazione delle funzioni, ma BOREL e LEBESGUE riuscirono a costruire delle funzioni che sfuggono a questa classificazione. Nacque allora la questione di caratterizzare le funzioni di BAIRE. VITALI e LEBESGUE nel 1905 stabilirono che tutte e solo le funzioni di BAIRE sono misurabili secondo BOREL. Ma il VITALI in una successiva ricerca dello stesso anno spinse più avanti l'indagine, provando che ogni funzione misurabile secondo LEBESGUE, si può decomporre nella somma di una funzione di BAIRE al massimo di seconda classe, e di una funzione diversa da zero al massimo in un insieme di misura nulla, cioè una funzione ad integrale nullo, come Egli stesso provò in un'altra ricerca.

Da qui il Nostro ricavò un altro bel teorema indicato da

BOREL e da LEBESGUE, ma da VITALI esplicitamente dichiarato, cioè che ogni funzione misurabile in un insieme misurabile, è continua sopra un insieme perfetto la cui misura può supporre arbitrariamente prossima a quella dell'insieme dato. Questa proprietà delle funzioni misurabili ha servito di base alla definizione di integrale data da BOREL e a quelle che ne sono derivate.

Alla teoria delle serie di funzioni analitiche il Nostro rivolse l'attenzione già nel 1903, lasciandovi tre teoremi che da soli basterebbero a rendere preclaro il nome dell'Autore. Un problema di alto interesse è quello di determinare le condizioni che si richiedono, perchè una serie di funzioni analitiche convergente in un campo, sia ivi una funzione analitica. Dopo il classico teorema di WEIERSTRASS, cospicui risultati hanno ottenuto STIELTJES, ARZELÀ, OSGOOD. Ma il contributo più notevole vi portò il VITALI, restringendo al minimo le condizioni per la risoluzione del problema in discorso. Egli provò, che se le somme parziali della serie sono limitate nel loro insieme, e se la serie converge in un insieme infinito di punti aventi per punto di accumulazione un punto interno al campo, essa converge in egual grado verso una funzione analitica in tutto il campo. Questo teorema è universalmente conosciuto come « Teorema di VITALI ». Egli giunse a questa proposizione, dimostrando dapprima che nella sola ipotesi della finitezza delle somme parziali nel loro insieme, dalla successione completa delle somme parziali, si possono estrarre delle successioni che convergono in egual grado verso funzioni analitiche. Più tardi sorse, per opera del MONTEL, una teoria completa delle cosiddette famiglie normali di funzioni analitiche, ma il VITALI ne aveva posto le basi con il teorema in discorso, che impropriamente qualche volta viene attribuito al MONTEL. Ma un terzo risultato Egli ottenne di non minore importanza dei precedenti, provando che se una successione di funzioni analitiche converge in un campo, e se inoltre le funzioni non assumono due prestabiliti valori, allora la successione converge verso una funzione analitica.

La scoperta di questo teorema ci offre un limpido esempio della penetrante intuizione del Nostro. Il teorema è vero, come hanno provato più tardi LANDAU e CARATHÉODORY, ma la dimostrazione che ne dà il VITALI non è corretta. Ora non è certamente

facile prevedere quale legame vi sia tra il fatto che i termini della successione non acquistano mai due prestabiliti valori, e la natura analitica del limite. D'altra parte Egli non fu condotto alla proposizione in forza della dimostrazione perchè, come dissi, questa è difettosa. Adunque il VITALI sentì la verità di quel risultato così poco intuitivo prima di tentarne la dimostrazione. I concetti da Lui introdotti, e i risultati raggiunti che oramai dominano nella teoria delle funzioni di variabile reale, Gli assicurano uno dei primi posti in questo campo di studi. Essi furono ottenuti tutti nel periodo 1903-1908 nello snervante insegnamento delle scuole medie. Il VITALI è stato quello che gli inglesi chiamano un self-made-man. Egli non fu allievo di una determinata scuola, o di un determinato maestro. E ben s'intende che un ingegno della Sua tempra non poteva accontentarsi di rimaneggiare idee altrui, e doveva sentire il bisogno di lavoro originale. Già all'inizio delle Sue meditazioni, trascurò di far l'assaggio delle Sue forze sopra problemi di second' ordine. Egli andò diritto alle quistioni difficili, e con colpi da maestro ne ottenne la soluzione. Nella sottile lucidità del dettato lasciò sempre trasparire le idee con una nettezza perfetta, e fece intravedere il rapido succedersi delle Sue concezioni. Non fu mai Sua l'arte di esporre dei risultati mascherando sottilmente la via per raggiungerli.

\* \* \*

La produzione scientifica del Nostro subisce una tregua nel periodo 1909 - 1922, sia come attività, sia come qualità di lavori, all'infuori di una ricerca, ove è contenuta una condizione caratteristica, di rara eleganza, sulla chiusura di un sistema di funzioni ortogonali. In questo periodo di allontanamento dalle meditazioni matematiche, Egli sentì il bisogno di accogliere intera la vita nei suoi compiti sociali, e partecipò attivamente alla vita amministrativa, come consigliere comunale e come assessore alle Belle Arti e alla Pubblica Istruzione del Comune di Genova. Anche nelle quistioni attinenti alla Sua carica, spiccò quella facoltà geniale di cogliere con prontezza il giusto punto donde bisognava partire per la risoluzione di qualche problema concreto. Dotato di un giusto senso di equilibrio, preciso, fermo, talvolta

assoluto nei giudizi, era tuttavia disposto per ingenita bontà all'indulgenza, cosicchè non ebbe acerbi avversari. Accolse il compito di uomo pubblico con animo scevro da ambizioni volgari e di personali interessi, e lo esercitò sempre con zelo e fervore.

E l'assessorato alle Belle Arti ben s'informava alla Sua indole, perchè in Lui vigilava, accanto al puro scienziato, un'appassionata anima di artista. Disegnava Egli in modo eccellente, e all'occasione sapeva rivestire il Suo dire di eletta forma poetica. Nella Prolusione ch'Egli tenne all'Università di Bologna nel 1930, e nella Commemorazione ch'Egli avrebbe fatto del Ricci, all'inaugurazione dell'Aula che porta il nome di questo Sommo nel Seminario Matematico dell'Università di Padova, dopo pagine severe di scienza, eccone altre di così intima commozione, in un ricamo sì perfetto di immagini, in una musica sì blanda di parole, che non sembrano scritte da chi passa tutta la giornata in un mondo così diverso dal letterario.

\* \* \*

Purtroppo il riconoscimento ufficiale del Suo merito insigne fu lento nell'ambiente accademico, per quanto alcuni eminenti matematici italiani stimassero profondamente il VITALI. A ciò ha indubbiamente contribuito il Suo carattere riservato ed alieno, nonchè dal farsi largo, altresì dalle forme intensive di comunicazione scientifica che si accompagnano alla vita moderna, quali frequenti viaggi, contatti personali, intervento ai congressi, distribuzione larga di lavori. Cosicchè Egli non potè raggiungere la Cattedra Universitaria che nel 1923, quando venne nominato Professore di Aualisi infinitesimale dell'Università di Modena. L'arrivo alla Cattedra fu per il Nostro fulgido esempio di magnifica operosità scientifica. Il Suo lavoro ricominciò con una penetrante analisi delle funzioni a variazione limitata, arrivando ad una proposizione che in sostanza equivale ad un notevole teorema di DE LA VALLEE-POUSSIN. In una successiva Memoria Egli pervenne a mettere in rilievo una nuova e importante proprietà caratteristica delle funzioni continue a variazione limitata, la quale Gli suggerì una estensione della nozione di variazione limitata alle coppie di funzioni di due variabili reali. Secondo



il Suo pensiero questa estensione poteva indicare la via per trasportare alle superficie i noti teoremi sulla rettificazione delle curve. Con diversi procedimenti, e poco tempo prima, il BANACH aveva conseguiti i risultati che collimavano con quelli del VITALI, e recentemente, dopo il BANACH, hanno pubblicato penetranti ricerche TONELLI, CACCIOPOLI, RADÒ, NALLI-ANDREOLI.

Con questo lavoro, e con altri di minore portata, hanno termine le Sue meditazioni sulla teoria delle funzioni di variabile reale.

Nel 1924 è chiamato ad occupare la Cattedra di Analisi infinitesimale della Università di Padova. Verso la fine del 1926, nel pieno fervore della Sua attività scientifica, è colpito da emiplegia: un embolo arterioso Gli paralizza la parte destra del corpo, e Lo porta sull'orlo della tomba. Assistiamo ora ad un fatto che ha del fantastico. Mentre il terribile male compie nel corpo la sua opera nefasta, la mente resta lucida, l'intuizione si fa più chiaroveggente, l'indagine più penetrante, onde alcune delle Sue ricerche furono, se non proprio portate a termine, certo intravviste durante l'acuto periodo del male. Si alza, dopo qualche mese di letto, ma la paralisi Gli ha tolto l'uso della mano destra, e Lo ha messo nell'impossibilità di scrivere senza ricorrere a mezzi meccanici. Acquista una macchina con la quale può mettere nella carta ciò che il cervello vede nello spazio. Molte delle Sue indagini richiedono ora calcoli laboriosi. Il mezzo meccanico, per quanto perfetto, non Gli serve per tutti gli sviluppi delle formule. Non importa. I passaggi intermedi sono visti nell'aria, e gli allievi verificano talvolta materialmente i risultati delle Sue previsioni. Un fiuto eccezionale Lo salvaguardia dagli errori. La fine di una ricerca si fonde con l'inizio di un'altra. Egli non si dà tregua. Un immutato fervore Gli fa germogliare i temi. Non s'indugia nella compiacenza del lavoro compiuto; è della razza buona che trova ristoro nel suo cammino, camminando. La ricerca distillata, lambiccata non è per Lui, nè appartiene al Suo credo scientifico. Da ciò desiderio di grandi tele. I temi Gli si offrono nella loro completa ampiezza, ed Egli deve ricorrere all'opera degli allievi per esaurirli. Escono così dal Suo cervello vulcanico più di una trentina di originali ricerche, ed altrettante ne pubblicano gli allievi sotto la Sua guida generosa.

Cercherò di dare un'idea della natura dei Suoi lavori più notevoli.

Una bella Memoria del PASCAL del 1910 suggerì al VITALI nel 1923 un'altra, dove è sviluppato un Calcolo assoluto da Lui chiamato generalizzato. Ma in questa prima esposizione, Egli non aveva ancora trovato un'operazione che potesse tenere il luogo della derivazione covariante del Calcolo di RICCI, e pertanto una grave lacuna restava al Suo Calcolo. I primi tentativi diretti fallirono, ed Egli scoprì la derivata in discorso nel modo seguente del tutto inatteso. Fra gli spazi funzionali, uno dei meglio caratterizzati, è quello delle funzioni a quadrato sommabile, cioè lo spazio HILBERTIANO. In una poderosa Memoria del 1927 il VITALI studiò in modo completo la Geometria di questo spazio, servendosi sistematicamente della rappresentazione funzionale, la quale ha la sua ragione d'essere nella possibilità di sviluppare qualunque funzione a quadrato sommabile in serie di funzioni ortogonali i cui coefficienti si possono interpretare come le coordinate cartesiane del punto rappresentato dalla funzione. Di questo metodo il Nostro farà uso continuo in tutte le ricerche, mostrando con numerose applicazioni i vantaggi che si possono trarre da esso, specialmente nel campo della Geometria differenziale. Non starò qui ad esporre le estensioni allo spazio hilbertiano che Egli ha fatto, con genialità ed originalità di vedute, di molte proposizioni dell'ordinaria geometria differenziale degli spazi ad un numero finito di dimensioni. Mi limiterò soltanto a dire come Egli trovò la derivata covariante del Suo Calcolo assoluto. Studiando le normali che giacciono nel secondo spazio osculatore in un punto d'una varietà immersa nello spazio hilbertiano, Egli s'imbattè proprio con la derivata covariante del Calcolo di RICCI. Allora Egli pensò che lo studio delle normali all' $n$ -esimo spazio osculatore che giacciono nel  $1^{o}(n + 1)$ -esimo spazio osculatore in un punto della varietà in discorso, Lo avrebbe condotto a trovare l'espressione della derivata generalizzata. E così avvenne, perchè la ricerca anzidetta, guidata con opportuna scelta di notazioni, Lo portò a scrivere un'operazione che è proprio la derivata che Egli cercava. L'algoritmo si estende subito a tutti i sistemi assoluti, e la lacuna che vi era nella prima esposizione del Suo Calcolo, venne finalmente colmata nel 1927. Ma purtroppo tale

operazione non era perfetta. Possedeva sì tutte le proprietà della derivata di CHRISTOFFEL-RICCI, ma mentre gli indici e gli apici del sistema assoluto di partenza possono essere di classe qualunque, l'indice di derivazione deve essere di classe uno. Solo tre anni più tardi questa imperfezione potè esser tolta. È interessante conoscere come Egli raggiunse lo scopo. In una lezione di Analisi superiore del 1930, Egli sviluppava la dimostrazione del carattere assoluto della derivata covariante con un indice di derivazione di classe uno. Ad un tratto si arrestò, pensò qualche minuto, poi fece scrivere dall'Assistente una formula e, aggiunse, rivolto agli allievi: questa deve essere l'espressione della derivata covariante con un indice di derivazione di classe qualunque. Nella prossima lezione proverò il suo carattere assoluto, e se avrò sbagliato . . . . . mi fischierete. Nella successiva lezione sotto la Sua guida, l'Assistente eseguì i calcoli necessari per provare l'asserto, e alla fine, dopo un'ora di laboriosi sviluppi, ebbe la conferma che anche questa volta la Sua intuizione non L'aveva ingannato! Malgrado però che la dimostrazione sia la più semplice che si possa ideare, essa risultò troppo pesante per il Suo spirito abituato all'agile snellezza degli algoritmi. Cercando di semplificare la dimostrazione in discorso, giunse ad un risultato sorprendente: la derivata covariante di un sistema assoluto per qualunque stato dell'indice di covarianza può essere scritta in una forma sintetica, che ne mette in evidenza di colpo il carattere assoluto!

Reso così perfetto nelle notazioni e negli algoritmi per assidua e geniale opera del VITALI, geometrizzato e applicato alle geometrie riemanniane di specie superiore in questi ultimi tempi dalle abili mani di ENEA BORTOLOTTI, il Calcolo assoluto generalizzato attende ora qualche clamorosa applicazione che ne faccia vedere la grande portata.

Nel campo delle ricerche geometriche sono da segnalare: il bel concetto e la determinazione dei sistemi principali di normali ad una varietà dello spazio hilbertiano giacenti nel secondo spazio osculatore, cioè di quei sistemi, che rispondendo ad una definizione simmetrica rispetto all'insieme delle loro direzioni, devono essere considerati, secondo VITALI, come sistemi privilegiati; la dimostrazione che per i

problemi di minimo o di massimo relativi alle varietà dello spazio hilbertiano, le relative equazioni di EULERO-LAGRANGE si riassumono nell'annullarsi di un parametro invariante, il quale, quando non è nullo, è perpendicolare alla varietà; la determinazione di certe forme differenziali a carattere proiettivo associate a certe varietà di cui un caso particolare è la forma classica di FUBINI; la costruzione per qualsiasi varietà, di una varietà, che sotto molti riguardi può essere considerata come la naturale estensione della evoluta delle curve e delle superficie. Quasi tutte le ricerche ora segnalate, ed altre ancora di Geometria differenziale delle curve e delle varietà condotte col sistematico uso della rappresentazione funzionale, nonchè una personale esposizione della teoria degli integrali di LEBESGUE, e degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali, sono contenute nella Sua opera «Geometria nello spazio hilbertiano» «opera che merita di essere meditata dai nostri giovani matematici, onde completare le ricerche del Maestro in un indirizzo che non dovrebbe essere perduto con Lui» come ben disse il PINCHERLE nella Commemorazione che fece del VITALI alla Reale Accademia di Bologna.

Egli riteneva che, specialmente nelle ricerche di geometria proiettiva differenziale, fosse opportuno pensare immersa la figura nello spazio hilbertiano, e quindi, rappresentando i suoi punti con le funzioni a quadrato sommabile, condurre l'indagine colla rappresentazione funzionale combinata con gli algoritmi del Calcolo assoluto.

\* \* \*

Il Nostro era veramente un matematico di classe. Dotato di penetrante intuizione, Egli sentiva la verità d'una proposizione anche se Gli mancavano gli elementi logici per una tale persuasione. Io che ebbi grande consuetudine di vita con Lui, bene mi accorsi quanto lontano e prontamente Egli vedesse. Possedeva eziandio una sorprendente abilità algoritmica, cosicchè le conclusioni, pure nel groviglio delle formule, erano sempre raggiunte nel modo più rapido con maestria sapiente. D'un colpo d'occhio vedeva il piano generale del problema, partiva deciso verso la soluzione, avanzando senza timore d'ingannarsi.

L'originalità era una Sua caratteristica mentale, nel senso che non desiderava servirsi di quanto prima di Lui era stato fatto, ed anche per cose note, sentiva il bisogno di dare al loro studio una personale impronta. Maestro nel senso più elevato e più ampio della parola, aveva fervido l'amore per la Scuola. Agli allievi insegnava con l'esempio il metodo della ricerca matematica, narrava i Suoi studi, e si occupava con interessamento delle loro questioni, da Lui sempre consigliate, e per le quali, o indicava la via da percorrere, o dava un'idea che forniva nuovo mezzo di indagine. Perciò esercitava un forte ascendente sulle giovani menti dei discepoli, i quali Lo circondavano di profonda ammirazione e di devota affezione.

Come lo Scienziato fu prodigo distributore di sapere, così l'Uomo fu largo di generosi affetti. Sotto il semblante riservato, Egli custodiva tesori di delicati sentimenti; la soavità era tutta raccolta nel cuore. Chi Lo conosceva la prima volta, subiva di colpo il fascino che emanava dal Suo ingegno robusto, ma la squisita bontà del Suo animo, il calore del Suo affetto, la sensibilità del Suo cuore, avido di famigliari tenerezze, e di amicizie profonde, erano conosciuti pienamente da chi ebbe grande dimestichezza con Lui. Più di una volta mi confidò accorati pensieri, e c'era nel racconto un tale luccicare di lagrime, una tale commovente espansione, che io ne restavo turbato, e sento che non darò mai abbastanza simpatia ad un'Anima così bella e così pura, ad un Uomo così mite e così buono.

Spirito versatile, sapeva passare dalle più alte astrazioni alle cose concrete con praticità ed equilibrio. Appena giunto alla Cattedra dell'Università di Padova, propugnò con ardore, con tutto il consenso dei Colleghi, ed ottenne la costituzione del «Seminario matematico» come opera di alto valore educativo, e che nella Sua mente doveva diventare una fiorente Scuola matematica. I Colleghi ammirati da tanto fervore e d'instancabile attività, Lo vollero Direttore, e sotto la Sua guida sapiente, il «Seminario» iniziò la sua vita sotto i migliori auspici. Le conferenze tenute da Lui e dai Colleghi facevano conoscere interessanti problemi ad un numeroso uditorio, le discussioni su qualche Memoria, interessavano gli allievi alla ricerca originale, e dalle lezioni su qualche argomento elementare, essi apprendevano la difficile arte

dell'insegnare. Costituito il «Seminario» Egli si odoperò ad ottenere i fondi necessari per la pubblicazione dei «Rendiconti» che accolsero subito alcune Sue belle ricerche. In una delle quali portò nuovi contributi alla nozione di derivazione covariante, facendo in particolare vedere, che le proprietà di questa derivata non si conservano inmutate, quando l'indice di derivazione è di classe qualunque. In un'altro lavoro determinò analiticamente tutte le superficie ad area minima dello spazio hilbertiano, e nella terza Memoria, inviata poco tempo prima della morte, sviluppò un'operazione nella quale rientrano come casi particolari, sia quella Sua derivata del 1922 formata col concorso di una  $n$ -pla ortogonale di congruenze di curve, dalla quale poi aveva dedotto un parallelismo detto di VITALI-WEITZENBÖCK, sia quella del Calcolo assoluto generalizzato, e in particolare, naturalmente, la derivata del Calcolo di RICCI.

\* \* \*

Il dolce richiamo della mamma carica di anni, il mesto silenzio della tomba del padre, le amorse preghiere dei fratelli, l'affettuosa eloquenza dei Colleghi dell'Università di Bologna, L'hanno deciso nel 1930 ad abbandonare la Cattedra di Analisi infinitesimale dell'Università di Padova per quella di Bologna. EccoLo entrare con animo lieto in quella Università che Lo accolse studente, e continuare quel poderoso lavoro per Sè, e per gli allievi, iniziato a Padova. Quì si manifesta nel Nostro una seconda mentalità scientifica.

Il VITALI, nelle Sue ricerche, aveva mirato soltanto alla matematica pura, ed era sempre rimasto lontano dalle applicazioni. Per Lui l'opera scientifica doveva avere i pregi dell'opera artistica, nel senso che doveva possederere in sè stessa i caratteri tali da farla apprezzare. Ora però Lo attraevano le moderne teorie fisiche, ed aveva preso ad occuparsi di astronomia stellare. Il Suo temperamento matematico doveva naturalmente portarLo alla diffidenza per i dogmi scientifici, dei quali voleva darsi piena ragione prima di accoglierli. Aveva torto? L'evoluzione dei credo nelle scienze fisiche, nelle quali recentissime vedute minacciano il crollo di principî ritenuti immutabili, ci dice che il dubbio

scientifico è spesso strumento di progresso. Purtroppo la morte prematura non Gli lasciò il tempo di sistemare in modo completo le Sue vedute, che furono esposte in pochi lavori. Cercherò di darne un cenno.

HAUSDORFF aveva assegnato una decomposizione di un solido sferico in tre aggregati - trascurando l'aggregato dei punti di una infinità numerabile di diametri - per cui esistono due rotazioni, una delle quali porta un aggregato sulla somma degli altri due e viceversa, mentre l'altra rotazione porta il primo aggregato sul secondo, il secondo sul terzo e il terzo sul primo. Fondandosi su questo singolare risultato, il VITALI riuscì ad abbozzare un'interpretazione della comprimibilità della materia, senza ricorrere all'ipotesi della discontinuità. Su quest'ordine di idee Egli doveva anzi tenere una conferenza ai matematici e ai chimici dell'Università di Bologna. In una seconda ricerca, dopo aver applicato il metodo funzionale per dedurre note quistioni di meccanica degli spazî curvi, Egli immaginò che lo spazio fisico sia una ipersfera di uno spazio lineare a quattro dimensioni, e provò che se in questa ipersfera i corpi materiali si attraessero secondo la legge di NEWTON, il moto dei pianeti non presenterebbe spostamenti di perielî. Ma una postulazione più fantasiosa - per usare la Sua parola - della reciproca azione fra i corpi materiali, potrebbe avere come conseguenza delle leggi per cui i pianeti dovrebbero presentare gli spostamenti dei loro perielî, e in particolare quello classico di Mercurio. In un terzo lavoro propose una nuova interpretazione del fenomeno della gravitazione universale, con la quale riescì a giustificare le opinioni correnti sulla finitezza dello spazio fisico, e sull'età delle stelle.

Mentre la Sua mente si occupava di questi problemi, Egli condusse a termine dei lavori di matematica pura. Siano qui segnalate alcune Lezioni di Analisi superiore che verranno pubblicate negli «Annali di Matematica» nelle quali, dopo aver introdotto gli elementi impropri nello spazio hilbertiano, studiò la proiettività in questo spazio ampliato, e una Monografia sulle funzioni reali di variabile reale, di cui attualmente la Ditta Zanichelli cura la stampa, nella quale, con personali vedute, trattò la teoria degli insiemi, quella dei numeri transfiniti, e la teoria della misura degli insiemi di punti di una retta.

Il 29 Febbraio 1932 doveva essere l'ultimo giorno della Sua vita. Recatosi nel pomeriggio all'Università per tenere le lezioni di Analisi infinitesimale e superiore, ne usciva poi in compagnia del Collega BORTOLOTTI, e serenamente parlava di alcuni lavori avuti in esame. Ad un tratto le membra cedettero, s'accasciò nello spasimo dell'agonia, e dopo qualche minuto il cuore cessava di battere.

Fra i vari attaccamenti alla vita, c'è indubbiamente quello del sapiente, il cui cervello è pieno di idee, ma la cui vita è minata da un male. Ove si pensi che la morte può annientare tutto il suo mondo di alti pensieri, ben si comprende che alla gioia del suo lavoro si mescola il timore di interromperlo. Il Nostro era conscio del Suo male, sul quale qualche volta scherzava. Ma c'era sempre nell'arguzia una velata melanconia, perchè pensava che una prematura sciagura non Gli avrebbe permesso di sviluppare nella loro intrezza molte idee che abbisognavano di un lungo lavoro di analisi. Egli è morto nel più brillante momento della Sua carriera scientifica, nel pieno vigore delle Sue forze intellettuali. Il Destino, che Gli fu sempre spietato, volle alla fine essere pietoso, troncandoGli la vita fulmineamente. Amico mio, quale strazio sarebbe stato il Tuo, se Tu avessi visto avvicinarsi lentamente la morte, che per sempre Ti separava dalla Famiglia, dalla Scienza, dalla Scuola, i soli ideali che hanno dominato tutta la Tua esistenza. Lagrime e struggenti parole di dolore hai avuto da tutti i Tuoi, affettuose parole di commiato Ti furono rivolte dagli amici, dai colleghi, dagli allievi. Esse ripeteranno al Tuo spirito quanto cara e nostalgica sia nei loro cuori la Tua dolce Memoria.

---