RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

E. LAURA

Sul moto di una porzione di superficie conica inestendibile pesante

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 11 (1940), p. 113-131

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1940__11__113_0>

SUL MOTO DI UNA PORZIONE DI SUPERFICIE CONICA INESTENDIBILE PESANTE

Nota di E. Laura *à Padova.*

Le equazioni indefinite del moto di una superficie flessibile ed inestendibile sono quelle date da Beltrami per l'equilibrio, nella sua classica Memoria, quando le forze $\boldsymbol{F}$ riferite all'unità di superficie, vengano sostituite con le forze perdute, cioè con le forze $\boldsymbol{F} - \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$, dove P è il punto che percorre la superficie.

Queste equazioni avranno dunque la forma:

$$(A) \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial P}{\partial u} + \mu \frac{\partial P}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\mu \frac{\partial P}{\partial u} + \nu \frac{\partial P}{\partial v}\right) = H\left(\boldsymbol{F} - \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right),$$

dove $H du dv$ è l'elemento della superficie moventesi.

Le difficoltà cui accenna il Beltrami, relative alle equazioni supplementari da aggiungere alla A), condizioni ai limiti, possono essere sormontate quando ci limitiamo a particolari problemi relativi a superficie sviluppabili.

Questi problemi furono da me prospettati nella Nota (7) (Cfr. la bibliografia alla fine dell'introduzione) e possono così essere formulati.

Consideriamo una porzione di piano limitato da due segmenti AB, CD e da due linee non intersecantesi AC, BD. La porzione di piano considerata sia costituita da una superficie materiale flessibile, inestendibile. Se i segmenti AB, CD si fanno coincidere con due segmenti fissi $A'B'$, $C'D'$ dello spazio, la data porzione si disporrà lungo una superficie sviluppabile di cui $A'B'$, $C'D'$ sono due porzioni di generatrici.

Noto il campo delle forze che sollecitano gli elementi della superficie, si potrà ricercare sia il moto, sia la posizione di equilibrio della superficie. Il problema ovviamente è l'analogo di quello della funicolare attaccata con gli estremi a due punti fissi.

Nella Nota (7) diedi l'impostazione matematica di questo problema nel caso statico e supponendo che le forze sollecitanti la superficie siano i pesi degli elementi. La stessa analisi può essere estesa a campi di forze qualunque come può essere applicata al campo dinamico. La possibilità dello scrivere le equazioni che reggono il moto o l'equilibrio, dipende in ultima analisi dalla eliminazione dei moltiplicatori lagrangiani (tensioni) dall'equazioni indefinite A) del moto o dell'equilibrio, eliminazione che si può ottenere nel caso delle superficie sviluppabili. (Cfr. Note (7) (8)).

La complessità delle equazioni cui si giunge già nel caso dell'equilibrio, è ancora aumentata nel caso dinamico. Giova perciò limitarci alle considerazioni di quei casi particolari in cui, a priori, per ragioni meccaniche intuitive, già è previsto che la superficie di equilibrio o durante il moto ha sempre forma cilindrica o conica.

Scarterò il caso della forma cilindrica, i problemi corrispondenti equivalendo a problemi di moto o di equilibrio di un filo pesante non omogeneo e mi limiterò al caso in cui la superficie mobile è conica.

Si consideri una porzione di piano OAB, limitata da due segmenti OA, OB e da una linea qualunque AB (priva di nodi).

Se facciamo coincidere i segmenti OA, OB con due segmenti fissi $O'A'$ $O'B'$, la superficie supposta, pesante si disporrà lungo un cono di vertice il punto O' ed il problema equivarrà al moto o all'equilibrio di una superficie conica limitata da due porzioni fisse di generatrici $O'A'$, $O'B'$ e da una linea $A'B'$ di cui è nota l'equazione relativamente al cono.

Questo problema offre rispetto al problema generale carattere di maggiore semplicità, poichè mentre nel caso generale la superficie dipende da due funzioni, di cui una entra nelle condizioni ai limiti (tensioni nulle attraverso ai bordi liberi), nel caso ora prospettato la superficie conica dipende da una sola funzione che non compare nella equazione del bordo libero.

Il metodo da me dato nella Nota (7) conduce a difficoltà formali non facilmente sormontabili. Giova invece applicare il metodo del triedro mobile di cui già un saggio ho dato in una Nota del Bollettino di Matematica (8) relativamente al problema statico. Le equazioni cui perverremo si potranno considerare come le equazioni intrinseche del problema considerato.

Notiamo che particolari problemi relativi a moti di porzioni di superficie sviluppabili pesanti limitati da porzioni di generatrici si possono considerare come casi limiti del problema seguente. Si considerino delle piastre piane pesanti limitate da segmenti rettilinei:

$$A\,B\,C_1\,D_1,\quad C_1\,D_1\,C_2\,D_2,\ldots,\quad C_{n-1}\,D_{n-1}\,C\,D$$

ognuna collegata a cerniera con la precedente e la seguente; la prima obbligata a ruotare intorno al lato fisso AB; l'ultima obbligata a ruotare intorno al lato fisso CD. I segmenti AB, $C_i D_i$, CD sono inoltre orizzontali e paralleli e i loro punti medî giacciono in un piano verticale, perpendicolare alla loro comune direzione.

Il problema trattato in questa Nota è poi il problema limite del seguente.

Si considerano delle piastre triangolari $O A B_1$, $O B_1 B_2, \ldots$ $\ldots$, $O B_{n-1} B$ pesanti. Ognuna è collegata a cerniera con la precedente e la seguente ed inoltre la 1ª ruota intorno al lato fisso OA, l'ultima intorno al lato fisso OB.

La letteratura piuttosto scarsa relativa all'argomento trattato (omettendo le memorie anteriori a quelle del Beltrami) è fornita dal seguente elenco:

(1) E. Beltrami, *Sull' equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili* [Memorie Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, serie IV, vol. III], pp. 217-265 oppure *Opere matematiche* di E. Beltrami, Milano (1913), t. III, pp. 420-464.

(2) V. Volterra, [Transunti R. Acc. Lincei, serie III, vol. VIII (1884)] pp. 214-218 e 244-245.

(3) Picciati, *Sull' equilibrio e sul moto infinitesimo delle superficie flessibili ed inestendibili* [Giornale di Mat. di Battaglini (1892)] p. 1.

(4) B. Baroni, *Sull' equilibrio di una porzione di superficie rigata sviluppabile* [Atti R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. XXXVIII (1929)] pp. 895-902.

([5]) B. CALDONAZZO, *Sull'equilibrio di un velo pesante triangolare* [Nuovo Cimento, serie VI, vol. XXII] pp. 43-45.
([6]) B. CALDONAZZO, *Sulla meccanica delle superficie* [Il Monitore Tecnico].
([7]) E. LAURA, *Un' osservazione sopra l' equilibrio delle superficie rigate sviluppabili, flessibili ed inestendibili* [Atti R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. XCIV, Parte II (1939-40)] pp. 339-356.
([8]) E. LAURA, *Sull' equilibrio di una porzione di superficie conica flessibile, inestendibile, pesante* [Bollettino Unione Matematica Italiana, serie II, Anno II] pp. 405-414.

Caratteristiche cinematiche del triedro mobile.

1. - Riferisco il cono ad un triedro xyz, di cui l' asse x coincidente con la generatrice variabile e l' asse z coincidente con la normale al cono. La coordinata u rappresenti l' ascissa del punto mobile sulla generatrice, contata a partire dal vertice O' del cono. Il piano xy sia tangente al cono; lo spostamento del triedro xyz al variare della sola u, sarà una pura traslazione lungo l' asse delle x; cioè le caratteristiche cinematiche al variare di u, saranno rispettivamente ([1]) :

$$\mathbf{l}_1 \equiv (1,\ 0,\ 0) \qquad \boldsymbol{\omega}_1 \equiv (0,\ 0,\ 0).$$

Lo spostamento del triedro xyz al variare di v si comporrà di una traslazione lungo l' asse delle y e di una rotazione decomponibile in due rotazioni; l' una fatta intorno all' asse x e che indicheremo con $p\,dv$, se come linee v ($u =$ cost) assumiamo le traiettorie ortogonali delle generatrici; la seconda rotazione fatta intorno ad un asse parallelo all' asse z, che vale dv, se v è l' arco della linea staccata dal cono sopra una sfera unitaria di centro il vertice del cono. La traslazione infinitesima avverrà lungo l' asse delle y e varrà $u\,dv$.

Consegue che le caratteristiche cinematiche relative al variare di v saranno rispettivamente:

$$\mathbf{l}_2 = (0,\ u,\ 0) \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = (p,\ 0,\ 1).$$

([1]) In questo § le lettere in grassetto rappresentano complessi, i cui elementi sono le componenti di un vettore secondo gli assi mobili xyz.

Possiamo notare circa il significato geometrico di p, che se ρ e T sono i due raggi di curvatura della direttrice sferica del cono, si ha, in valore assoluto:

$$\frac{1}{T} = \left| \frac{\frac{dp}{dv}}{1+p^2} \right|, \quad \frac{1}{\rho} = \sqrt{1+p^2}.$$

Supponiamo ora che il detto cono si deformi con il tempo mantenendo il vertice fisso. La posizione del triedro mobile dipenderà da t. Indicherò allora con

$$\boldsymbol{l}_3 = (l_1\, m_1\, n_1) \qquad \omega_3 = (p_1\, q_1\, r_1)$$

le caratteristiche cinematiche del moto del triedro mobile (traslazione e rotazione istantanea) al variare di t.

I sei vettori così introdotti $\boldsymbol{l}_1$, ω_1, $\boldsymbol{l}_2$, ω_2, $\boldsymbol{l}_3$, ω_3 non sono indipendenti (cfr. la mia Memoria in questi Rendiconti, Vol. I « La teoria delle matrici e il metodo dello n-edro mobile »). Essi sono legati dalle seguenti relazioni, che possiamo chiamare di Darboux:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{l}_1}{\partial v} - \dfrac{\partial \boldsymbol{l}_2}{\partial u} = \omega_1 \wedge \boldsymbol{l}_2 - \omega_2 \wedge \boldsymbol{l}_1 \\[2ex] \dfrac{\partial \boldsymbol{l}_2}{\partial t} - \dfrac{\partial \boldsymbol{l}_3}{\partial v} = \omega_2 \wedge \boldsymbol{l}_3 - \omega_3 \wedge \boldsymbol{l}_2 \\[2ex] \dfrac{\partial \boldsymbol{l}_3}{\partial u} - \dfrac{\partial \boldsymbol{l}_1}{\partial t} = \omega_3 \wedge \boldsymbol{l}_1 - \omega_1 \wedge \boldsymbol{l}_3 \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \omega_1}{\partial v} - \dfrac{\partial \omega_2}{\partial u} = \omega_1 \wedge \omega_2 \\[2ex] \dfrac{\partial \omega_2}{\partial t} - \dfrac{\partial \omega_3}{\partial v} = \omega_2 \wedge \omega_3 \, . \\[2ex] \dfrac{\partial \omega_3}{\partial u} - \dfrac{\partial \omega_1}{\partial t} = \omega_3 \wedge \omega_1 \end{cases}$$

Le ultime tre di queste relazioni, quando le ω_1, ω_2, ω_3 vengono sostituite con le espressioni ottenute risolvendo le (1) rispetto a questi complessi, coincidono ovviamente con le ben note equazioni di Lamé, che assicurano che il $ds^2 = (l_1 du + l_2 dv + l_3 dt)^2$ è euclideo.

Per le posizioni fatte riguardo ai vettori l_1, l_2, ω_1, ω_2 si deduce immediatamente dalla 1ª delle (2) che la p è funzione delle sole variabili v, t.

Le rimanenti, esplicitate dànno luogo alle equazioni:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial l_1}{\partial v} = m_1 - u r_1 \\ \dfrac{\partial m_1}{\partial v} = -l_1 + p n_1 \\ \dfrac{\partial n_1}{\partial v} = -p m_1 + u p_1 \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial v} - \dfrac{\partial p}{\partial t} = q_1 \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial v} = p r_1 - p_1 \\ \dfrac{\partial r_1}{\partial v} = -p q_1 \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial l_1}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{\partial m_1}{\partial u} = r_1 \\ \dfrac{\partial n_1}{\partial u} = -q_1 \end{cases} \qquad (6)\quad \frac{\partial p_1}{\partial u} = \frac{\partial q_1}{\partial u} = \frac{\partial r_1}{\partial u} = 0 \,.$$

Le $p_1\, q_1\, r_1$ sono cioè funzioni delle sole variabili v, t.

Integrando le (5) e notando che, per il fatto che i coni hanno in comune il vertice, si ha $l_1 = m_1 = n_1 = 0$ per $u = 0$, si trae:

$$(7)\qquad l_1 = 0 \qquad m_1 = u r_1 \qquad n_1 = -u q_1 \,.$$

Con questa posizione le (3) coincidono con le (4); sicchè possiamo concludere che le *caratteristiche del moto del triedro al variare di t soddisfano alle sole equazioni* (4) *e* (7) *e che inoltre le* $p_1\, q_1\, r_1$ *sono funzioni delle sole variabili* v, t.

2. – Se $\alpha\, \beta\, \gamma$ sono i coseni direttori di una direzione fissa (ad es. quella della verticale), valgono le equazioni di Poisson:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} - \beta = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \beta}{\partial v} + \alpha - p\gamma = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \gamma}{\partial v} + p\,\beta = 0 \end{cases} \qquad (9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} + q_1\gamma - r_1\beta = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \beta}{\partial t} + r_1\alpha - p_1\gamma = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial t} + p_1\beta - q_1\alpha = 0. \end{cases}$$

Le equazioni (4) sono allora una conseguenza evidente delle equazioni (8) e (9). Più precisamente, quale conseguenza di teoremi generali, le equazioni (4) sono necessarie e sufficienti affinchè esistano tre funzioni α, β, γ di v e di t soddisfacenti alle equazioni (8) e (9).

Riferiamoci ad una terna $\xi\ \eta\ \zeta$ fissa con l'origine nel vertice del cono e con l'asse ζ verticale diretto verso il basso. I coseni di questa terna rispetto al triedre mobile siano forniti dal quadro:

	x	y	z
ξ	α_1	β_1	γ_1
η	α_2	β_2	γ_2
ζ	α_3	β_3	γ_3 ,

per modo che i coseni della generatrice variabile del cono risultano $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$.

Ognuna delle tre terne $(\alpha_i\ \beta_i\ \gamma_i)$ $i = 1, 2, 3$ soddisfano alle equazioni (8) e (9).

La porzione di cono, di cui è considerato il moto, sviluppato sopra un piano ricopra un settore di ampiezza v_0. Assumiamo come generatrici fisse la $v = 0$ e la $v = v_0$.

Nei punti delle generatrici fisse resteranno verificate delle equazioni del tipo

$$(10)\quad \begin{cases} \alpha_1\Big|_{v=0} = \alpha_1^0 \qquad \alpha_2\Big|_{v=0} = \alpha_2^0 \qquad \alpha_3\Big|_{v=0} = \alpha_3^0 \\[2mm] \alpha_1\Big|_{v=v_0} = \alpha_1^1 \qquad \alpha_2\Big|_{v=v_0} = \alpha_2^1 \qquad \alpha_3\Big|_{v=v_0} = \alpha_3^1 \end{cases}$$

per t qualunque.

Dalle (9) discende allora facilmente:

$$(11)\qquad \begin{cases} q_1\Big|_{v=0} = r_1\Big|_{v=0} = 0 \\ q_1\Big|_{v=v_0} = r_1\Big|_{v=v_0} = 0 \end{cases}$$

per ogni valore di t. Le (11) hanno poi carattere di evidenza, poichè se le generatrici $v=0$, $v=v_0$ hanno posizioni invariate, al variare di t, la rotazione istantanea avverrà intorno alla generatrice fissa e quindi nei punti di essa saranno nulle le q_1, r_1.

Viceversa se sono verificate le (11), le (9) dànno:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial \alpha_3}{\partial t} = 0 \quad \text{per } v = 0 \text{ e } v = v_0 ,$$

sicchè sussistono le (10).

Se è nota la $p(v,t)$ e valgono le (10) il moto della superficie è univocamente determinato. Questa funzione, nel caso del cono, coincide con quella funzione considerata per primo da Weingarten relativamente alla deformazione delle superficie inestendibili e chiamata dal Bianchi funzione caratteristica.

La conoscenza di p, comporta invero la conoscenza delle due curvature della linea traccia del cono sulla superficie sferica di raggio unitario e di centro il vertice del cono. Questa traccia resterà perciò determinata istante per istante a meno di rotazioni intorno al centro della sfera e sarà quindi, in generale, univocamente determinata quando ad essa si imponga di passare per due punti assegnati dalla sfera.

Il problema che dovremo risolvere consisterà dunque nella ricerca della equazione differenziale cui deve soddisfare la p, atta a rappresentare il moto di una superficie conica flessibile, pesante.

Forma intrinseca delle equazioni indefinite del moto.

3. – Queste equazioni si ottengono proiettando i vettori che compaiono nelle equazioni di Beltrami del moto:

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda\frac{\partial P}{\partial u}+\mu\frac{\partial P}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\mu\frac{\partial P}{\partial u}+\nu\frac{\partial P}{\partial v}\right)=g\boldsymbol{n}u-u\frac{\partial^2 P}{\partial t^2},$$

dove P è il punto mobile della superficie ed $\boldsymbol{n}$ è un vettore diretto lungo la verticale verso il basso, sopra il triedro mobile $x\,y\,z$ dianzi considerato. In luogo della (12) consideremo la forma esplicitata.

$$(13)\qquad \begin{aligned}&\lambda\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}+2\mu\frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial v}+\mu\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{\partial\mu}{\partial v}\right)\frac{\partial P}{\partial u}+\\&+\left(\frac{\partial\mu}{\partial u}+\frac{\partial\nu}{\partial v}\right)\frac{\partial P}{\partial v}=g\,u\,\boldsymbol{n}-u\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Dovremo perciò ricavare le proiezioni dei vettori $\frac{\partial P}{\partial u}\cdots\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$ sugli assi mobili.

Le componenti dei vettori $\frac{\partial P}{\partial u}$, $\frac{\partial P}{\partial v}$, $\frac{\partial P}{\partial t}$ sono rispettivamente le traslazioni istantanee, relative al solo variare di u, o di v, o di t.

Per quanto precede queste componenti sono rispettivamente:

$$(1\,,0\,,0)\qquad (0\,,u\,,0)\qquad (0\,,u\,r_1\,,-u\,q_1)\,.$$

Per ottenere le componenti delle derivate 2ᵉ di P sugli stessi assi, ci varremo della seguente osservazione.

Se un vettore funzione di un generico parametro u è di componenti $(a\,,b\,,c)$ secondo una terna mobile con u, la cui rotazione istantanea è di componenti p, q, r, allora le componenti della derivata sostanziale del vettore considerato hanno le espressioni :

$$\frac{\partial a}{\partial u}+q\,c-r\,b\,,\ \frac{\partial b}{\partial u}+r\,a-p\,c\,,\ \frac{\partial c}{\partial u}+p\,b-q\,a\,,$$

come facilmente discende, considerando la derivata sostanziale del punto, come la velocità assoluta di un punto di coordinate $a\,,b\,,c$ rispetto a tre assi $x'\,y'\,z'$ costantemente paralleli agli assi $x\,y\,z$

e di origine fissa. Poichè allora $\frac{\partial a}{\partial u}, \frac{\partial b}{\partial u}, \frac{\partial c}{\partial u}$ sono le componenti della velocità relativa e $qc - rb, \ldots$ quelle della velocità di trascinamento, consegue ovviamente quanto prima è stato asserito.

Applicando questa osservazione e tenendo presente le espressioni delle rotazioni relative al variare di u, di v o di t, si ricava facilmente che:

1° il vettore $\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}$ è nullo;

2° il vettore $\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}$ ha le componenti $(0, 1, 0)$;

3° il vettore $\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}$ ha le componenti $(-u, 0, up)$;

4° il vettore $\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$ ha le componenti $-u(q_1^2 + r_1^2)$, $u\left(\frac{\partial r_1}{\partial t} + p_1 q_1\right)$, $-u\left(\frac{\partial q_1}{\partial t} - p_1 r_1\right)$.

Le equazioni di Beltrami, in forma intrinseca, divengono pertanto:

$$
(14) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial v} - u\nu = g\alpha u + u^2(q_1^2 + r_1^2) \\
&u\left(\frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \nu}{\partial v}\right) + 2\mu = g\beta u - u^2\left(\frac{\partial r_1}{\partial t} + p_1 q_1\right) \\
&up\nu = g\gamma u + u^2\left(\frac{\partial q_1}{\partial t} - p_1 r_1\right)
\end{aligned}
\right. .
$$

Prima di procedere alla discussione di queste equazioni, notiamo il seguente gruppo di identità, dipendenti dalle equazioni (7) e (8), che ci saranno utili nel seguito. Per comodità di scrittura poniamo:

$$(15) \qquad A = -(q_1^2 + r_1^2) \quad B = \frac{\partial r_1}{\partial t} + p_1 q_1 \quad C = -\frac{\partial q_1}{\partial t} + p_1 r_1,$$

cioè indichiamo con A, B, C le componenti del vettore $\frac{1}{u}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$.

Osserviamo ora che il vettore $\frac{1}{u}\frac{\partial^2 P}{\partial v \partial t}$ ha le componenti, sempre secondo gli assi mobili:

$$(-r_1, \;\; 0, \;\; p_1).$$

Il vettore $\frac{1}{u}\frac{\partial^3 P}{\partial t^2 \partial v}$ secondo che sia considerato come $\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)$, o come $\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial v \partial t}\right)$, e tenendo presente l'osservazione relativa alla derivazione di un vettore, avrà rispettivamente le componenti:

$$\frac{\partial A}{\partial v} - B, \qquad \frac{\partial B}{\partial v} + A - pC, \qquad \frac{\partial C}{\partial v} + pB$$

oppure le componenti:

$$-\frac{\partial r_1}{\partial t} + p_1 q_1, \qquad -r_1^2 - p_1^2, \qquad \frac{\partial p}{\partial t} + q_1 r_1.$$

Valgono dunque le identità:

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial v} - B = -\frac{\partial r_1}{\partial t} + p_1 q_1 \\ &\frac{\partial B}{\partial v} + A - pC = -p_1^2 - r_1^2 \\ &\frac{\partial C}{\partial v} + pB = \frac{\partial p_1}{\partial t} + q_1 r_1, \end{aligned} \right.$$

le quali possono farsi discendere facilmente dalla (8) e dalle (9).

Integrazione delle equazioni intrinseche

4. – Riprendiamo le equazioni intrinseche del moto:

$$
(14^{\text{bis}})\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{\partial\mu}{\partial v}-u\nu=g\alpha u-u^2A\\
&u\left(\frac{\partial\mu}{\partial u}+\frac{\partial\nu}{\partial v}\right)+2\mu=g\beta u-u^2B\\
&\qquad\qquad\qquad u p\nu=g\gamma u-u^2C.
\end{aligned}
\right.
$$

Queste equazioni sono facilmente integrabili.

La ν, a differenza di quanto avviene nel caso statico, è funzione lineare della u:

$$
(17)\qquad \nu=g\frac{\gamma}{p}-\frac{u}{p}C.
$$

Poniamo nella 2ª delle (14^{bis})

$$
\mu=\frac{M}{u^2},
$$

otterremo l'equazione:

$$
\frac{\partial M}{\partial u}=gu^2\left[\beta-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\gamma}{p}\right)\right]-u^3\left[-\frac{\partial}{\partial v}\frac{C}{p}+B\right].
$$

Da cui facilmente:

$$
(18)\qquad \mu=g\frac{u}{3}\left[\beta-\frac{\partial}{\partial v}\frac{\gamma}{p}\right]-\frac{u^2}{4}\left[-\frac{\partial}{\partial v}\frac{C}{p}+B\right].
$$

Il termine in $\frac{1}{u}$, proveniente dalla integrazione rispetto ad u, è stato posto a zero, poichè la μ deve essere regolare in tutti i punti della porzione di cono considerata e quindi anche per $u=0$.

La 1ª delle (14^{bis}) fornirebbe infine la λ, che risulterà funzione di 3° grado della variabile u. La funzione arbitraria che si introdurrà nel calcolo in questa espressione di λ verrà determinata tenendo conto delle condizioni ai limiti. L'espressione di λ non è necessaria ai fini del presente lavoro; essa necessiterebbe per il calcolo effettivo delle tensioni e quindi ad integrazione del problema eseguita.

Vale dunque anche per il moto delle superficie coniche come per l'equilibrio, la proprietà che le equazioni intrinseche sono integrabili. È pressochè ovvio, ed il calcolo non offre difficoltà, che questa proprietà sussiste in generale per le superficie sviluppabili. È poi questa proprietà che permette di eliminare dalle equazioni del moto, le tensioni.

Condizioni ai limiti e condizioni iniziali

5. - Queste si determinano come nel caso statico e rimando perciò alla mia nota (7).

Sia

$$u = f(v)$$

l'equazione della linea AB nello sviluppo piano della porzione considerata di cono. La stessa equazione competerà al bordo libero della superficie mobile.

Annullando la tensione attraverso a questa linea si avranno le due equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} -\lambda + \mu u \dot{f} &= 0 \\ \mu + \nu u \dot{f} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{per} \quad u = f(v) \tag{19}$$

dove la $\dot{f}$ è la derivata rispetto a v di f.

La 2ª di queste equazioni, quando per μ e ν si pongano le espressioni fornite dalle (17) e (18), fornirà una relazione differenziale tra la β e la γ, che è da considerarsi come l'equazione del moto.

Più precisamente questa equazione dovrà coesistere con due dei sistemi (4) (8) e (9); con queste equazioni essa fornirà cioè un sistema di 7 equazioni alle derivate parziali del 1° ordine nelle funzioni incognite α, β, γ, p_1, q_1, r_1, p.

Valendoci delle (8) si potrà procedere, con successive derivazioni, alla eliminazione delle α, β, γ dalla equazione ricavata dalla 2ª delle (19). Si perviene così ad un sistema di 4 equazioni nelle funzioni incognite p_1, q_1, r_1, p.

Le condizioni ai limiti derivano da quanto precede. Esse si possono compendiare nelle relazioni:

$$q_1 |_{v=0} = r_1 |_{v=0} = 0$$
$$q_1 |_{v=v_0} = r_1 |_{v=v_0} = 0 \;,$$

per ogni valore di t.

Le condizioni iniziali consisteranno nell'assegnare il valore di p per $t=0$:

$$p |_{t=0} = p_0(v),$$

(poichè con ciò resta assegnata la posizione iniziale della porzione di cono muoventesi) e i valori iniziali del vettore $\frac{\partial P}{\partial t}$, cioè i valori delle quantità $q_1 |_{t=0}$ $r_1 |_{t=0}$ in funzione di v.

Equazioni differenziali del moto in un caso particolare

6. - Applichiamo il procedimento prima indicato al caso in cui la porzione di cui si considera il moto, quando venga sviluppata sopra un piano ricopra un settore circolare. La funzione f si riduce ad una costante e le (19) divengono semplicemente:

$$\lambda = \mu = 0 \qquad \text{per} \quad u = 1 \,.$$

Notiamo subito che μ, a differenza del caso statico, è funzione di 2° grado della u annullantesi per $u = 0$. Non è quindi necessariamente nulla in tutti i punti della generatrice. Le considerazioni sviluppate nella Nota ([8]) § 6 permettono allora di concludere che durante il moto della porzione di cono considerata le linee $u = \text{cost}$ *non si muovono come linee pesanti obbligate a rimanere aderenti senza attrito ad una sfera.*

La 2ª delle (19) diventa ora:

$$\frac{g}{3}\left(\beta-\frac{\partial}{\partial v}\frac{\gamma}{p}\right)-\frac{1}{4}\left(B-\frac{\partial}{\partial v}\frac{C}{p}\right)=0\,. \tag{20}$$

L'eliminazione delle α, β, γ tra la (20) e le (8) può essere semplificata valendoci delle identità (16):

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial v}-B=-\frac{\partial r_1}{\partial t}+p_1 q_1 \\ &\frac{\partial B}{\partial v}+A-pC=-p_1^2-r_1^2 \\ &\frac{\partial C}{\partial v}+pB=\frac{\partial p_1}{\partial t}+q_1 r_1\,. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Poniamo

$$A_1=\frac{g\alpha}{3}-\frac{A}{4}\,,\qquad B_1=\frac{g\beta}{3}-\frac{B}{4}\,,\qquad C_1=\frac{g\gamma}{3}-\frac{C}{4}$$

e notiamo che le α, β, γ soddisfano alle equazioni (8) cioè ad equazioni i cui primi membri hanno la stessa forma dei primi membri delle (16).

Le A_1, B_1, C_1 soddisferanno perciò al sistema:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial A_1}{\partial v}-B_1=-\frac{1}{4}\left(-\frac{\partial r_1}{\partial t}+p_1 q_1\right) \\ &\frac{\partial B_1}{\partial v}+A_1-pC_1=\frac{1}{4}(p_1^2+r_1^2) \\ &\frac{\partial C_1}{\partial v}+pB_1=-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial p_1}{\partial t}+q_1 r_1\right) \end{aligned}\right. \tag{21}$$

mentrecchè la (20) assume la forma:

$$B_1-\frac{\partial}{\partial v}\frac{C_1}{p}=0\,. \tag{22}$$

Come equazioni del moto si possono infine assumere le (21), le (22) e le (4), cioè un sistema notevolmente più semplice di quello già considerato.

Si può portare una ulteriore semplificazione combinando la 1ª delle (21) con la (22) ed eliminando B_1. Si ottiene per tal modo:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(A_1 - \frac{C_1}{p}\right) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{\partial r_1}{\partial t} + p_1 q_1\right).$$

Si scorge per tal modo il vantaggio del cambiamento di variabili seguente:

$$A_2 = A_1 - \frac{C_1}{p} \qquad B_2 = B_1 \qquad C_2 = \frac{C_1}{p}$$

e si giunge facilmente al sistema:

$$(23) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A_1}{\partial v} = -\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{\partial r_1}{\partial t} + p_1 q_1\right) \\[2ex] \dfrac{\partial B_2}{\partial v} + A_2 + (1-p^2)\,C_2 = \dfrac{1}{4}(p_1^2 + r_1^2) \\[2ex] \dfrac{\partial C_2}{\partial v} - B_2 = 0 \\[2ex] 2B_2 + \dfrac{1}{p}\dfrac{\partial p}{\partial v}C_2 = -\dfrac{1}{4p}\left(\dfrac{\partial p_1}{\partial t} + q_1 r_1\right). \end{cases}$$

L'eliminazione delle A_2, B_2, C_2 dalle (23) è ora agevole; cioè facilmente potremo ricavare dalle (23) una equazione differenziale tra le $p_1\, q_1\, r_1$ e la p, che associata al sistema (4) fornirà le equazioni del moto della porzione considerata di superficie conica.

Piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile

7. – Se assumiamo quale equilibrio stabile di una superficie flessibile ed inestendibile quello per cui il trinomio $\lambda\xi^2 + 2\mu\xi\eta + \nu\eta^2$ è essenzialmente negativo, le λ, μ, ν essendo i parametri lagrangiani considerati da Beltrami, allora, come dimostrai in una Comunicazione fatta al Congresso dei Matematici Italiani a Bologna nell'anno corrente, vale per le oscillazioni intorno a questa posizione di equilibrio stabile, il teorema generale della Meccanica.

Se ancora consideriamo la porzione di superficie conica, del moto della quale ci stamo occupati nel precedente Cap. l'equilibrio di essa sarà stabile, se essa volgerà la sua concavità verso l'alto. Deformando allora questa porzione infinitamente poco, mantenendo fisse le generatrici estreme, e imprimendo velocità infinitesime ai suoi punti, il moto che nasce è, e resta infinitesimo.

In questa posizione il parametro p abbia il valore $p_0(v)$ e siano inoltre α_0, β_0, γ_0 i coseni direttori della verticale, diretta verso il basso. Varranno allora le equazioni

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_0}{dv} - \beta_0 = 0 \\[2ex] \dfrac{d\beta_0}{dv} + \alpha_0 - p_0\gamma_0 = 0 \\[2ex] \dfrac{d\gamma_0}{dv} + p_0\beta_0 = 0 \\[2ex] \beta_0 - \dfrac{d}{dv}\dfrac{\gamma_0}{p_0} = 0\,; \end{cases}$$

quando si tenga conto delle condizioni ai limiti, queste equazioni determinano univocamente le $\alpha_0\ \beta_0\ \gamma_0\ p_0$.

Se deformo infinitamente poco questa superficie e imprimo ai suoi punti velocità infinitesime, il moto che nasce è infinitesimo; sarà perciò lecito supporre che i coseni direttori α, β, γ della verticale rispetto al triedro mobile che percorre la superficie nella posizione che essa ha ad un istante qualunque differiscano infinitamente poco da $\alpha_0\,\beta_0\,\gamma_0$. Così pure il parametro p caratterizzante la superficie stessa differirà da p_0 di una quantità infinitesima. Saranno cioè lecite le posizioni:

$$(25)\qquad \begin{cases} \alpha = \alpha_0 + \alpha' \\ \beta = \beta_0 + \beta' \\ \gamma = \gamma_0 + \gamma' \\ p = p_0 + p' \end{cases}$$

essendo le α', β', γ', p' funzioni infinitesime di v e di t.

I valori di α', β', γ', p' sono noti (quali funzioni di v) per $t = 0$. È inoltre nulla la α' nei punti delle generatrici $v = 0$ $v = v_0$ per ogni valore di t.

Poichè il moto rimane infinitesimo, è lecito supporre che pure le p_1 q_1 r_1 siano infinitesime. Inoltre come precedentemente si ha

$$q_1 = r_1 = 0$$

nei punti delle generatrici fisse e ad ogni istante.

Sostituendo nelle (4), (8), (9) le espressioni di α, β, γ fornite dalle (25), trascurando infinitesimi del 2° ordine e tenendo conto delle (24) si perviene facilmente alle equazioni :

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial v} - \dfrac{\partial p'}{\partial t} = q_1 \\[2ex] \dfrac{\partial q_1}{\partial v} = -p_1 + p_0 r_1 \\[2ex] \dfrac{\partial r_1}{\partial v} = -p_0 q_1 \end{cases} \qquad (27)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha'}{\partial v} - \beta' = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \beta'}{\partial v} + \alpha' - p_0\gamma' - p'\gamma_0 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \gamma'}{\partial v} + p_0\beta' + \beta_0 p' = 0 \end{cases}$$

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha'}{\partial t} + q_1\gamma_0 - r_1\beta_0 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \beta'}{\partial t} + r_1\alpha_0 - p_1\gamma_0 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \gamma'}{\partial t} + p_1\beta_0 - q_1\alpha_0 = 0 \end{cases}$$

Inoltre la equazione (20), sempre trascurando infinitesimi del 2° ordine conduce alla equazione (tenendo conto della 4ª delle (24)) :

$$(29)\qquad \frac{g}{3}\beta' - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\gamma'}{p_0} - \frac{\gamma_0}{p_0^2}p'\right) - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial r_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{p_0}\frac{\partial q_1}{\partial t}\right)\right] = 0\ ,$$

la quale dovrà coesistere con due dei sistemi (26), (27), (28).

L'eliminazione delle α', β', γ' ora è immediata a mezzo delle (28). Basterà derivare rispetto a t la (29) e si ottiene l'equazione:

$$(30)\qquad \begin{aligned} &\frac{g}{3}\left\{p_1\gamma_0 - r_1\alpha_0 - \frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{\gamma_0}{p_0^2}\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{1}{p_0}[q_1\alpha_0 - p_1\beta_0]\right)\right\} - \\ &\qquad - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 r_1}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{p_0}\frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2}\right)\right] = 0 \end{aligned}$$

che associata al sistema (26) fornirà le equazioni del moto richiesto.

Un'osservazione che potrà servire per l'integrazione effettiva in casi particolari è la seguente.

Il sistema (26) reso omogeneo ha la forma stessa del sistema formato dalle prime tre equazioni (24). Quest'ultimo è riducibile alle quadrature. Con il metodo della variazione delle costanti sarà dunque possibile trovare delle espressioni p_1, q_1, r_1, nelle quali la $\dfrac{\partial p'}{\partial t}$ compare sotto il segno di integrale. La sostituzione di queste espressioni nella (28) fornirà un'equazione nella sola p'.

Il metodo può essere applicato ad es. al caso in cui le due generatrici fisse stanno in un piano orizzontale.

Pervenuto in Redazione il 22 Settembre 1940–XVIII