

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GUIDO ZAPPA

Miglioramento della diseguglianza tra il rango e il tipo di un gruppo finito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 13 (1942), p. 36-40

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1942__13__36_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1942, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

MIGLIORAMENTO DELLA DISEGUAGLIANZA TRA IL RANGO E IL TIPO DI UN GRUPPO FINITO

Nota di GUIDO ZAPPA (a Roma)

Una delle questioni rimaste sino ad ora aperte nell'elegantissima teoria dei sottogruppi fondamentali di un gruppo, ideata dal CIPOLLA ⁽¹⁾, è quella della diseguaglianza che lega il rango e il tipo di un gruppo.

Lo stesso CIPOLLA, dopo aver dato la definizione di rango di un gruppo, aveva notato, sin dal 1910 ⁽²⁾, quasi di sfuggita, che se r è il rango e τ il tipo di un gruppo, sussiste la diseguaglianza

$$(1) \quad \tau + 2 \geq 3r,$$

In epoca più recente, lo SCORZA ⁽³⁾ ha notevolmente migliorato la diseguaglianza del CIPOLLA, sostituendovi l'altra

$$(2) \quad \tau + 2 \geq 6r - 3$$

e successivamente l'altra

$$(3) \quad \tau + 2 \geq 7r - 5.$$

⁽¹⁾ M. CIPOLLA: *Sulla struttura dei gruppi d'ordine finito*. [Rend. Accad. Scienze], Napoli, Nota I e II (1909); Nota III (1911); Nota IV (1912).

⁽²⁾ Op. cit. in ⁽¹⁾, Nota III, pag. 128.

⁽³⁾ G. SCORZA: *Sui sottogruppi fondamentali di un gruppo*. [Rend. Accad. Lincei], Roma, vol. VI (1927): 2 note. *Maggiore determinazione della relazione intercedente tra il rango e il tipo di un gruppo*. Id., vol. VIII (1928).

Ultimamente, ho dimostrato la diseuguaglianza (4)

$$(4) \quad \tau + 2 \geq 8r - 7$$

che migliora lievemente quelle di SCORZA.

D'altro canto l'AMATO (5) ha mostrato, sin dal 1918, che il tipo minimo dei gruppi di rango 2 è 7, cosicchè per $r = 2$ nelle diseuguaglianze (2), (3), (4) vale qualche volta il segno =.

In questa Nota, dimostro che vale la diseuguaglianza

$$(5) \quad \tau + 2 \geq 2^{r+1} - 1$$

la quale, per valori piccoli di r , è peggiore delle (2), (3), (4), mentre, per valori grandi di r , è decisamente migliore, in quanto esprime τ , anzichè come funzione lineare, come funzione esponenziale di r . Precisamente, la (5) comincia ad essere migliore della (4) a partire dal valore $r = 5$.

È evidente che la (5) non è una diseuguaglianza definitiva, perchè già pei primi valori di r , essa non si verifica mai col segno =. E ciò risulterà anche dalla via tenuta nella dimostrazione; infatti in essa non si tien mai conto del fatto che, se G è un sottogruppo fondamentale di H , un sistema fondamentale di G può esser costituito dalla somma di più sistemi fondamentali di H .

Ho delle ragioni per ritenere che sussista la formula

$$\tau + 2 \geq 3(2^r - 1)$$

e che in essa, per ogni valore di r , valga qualche volta il segno =. Ciò è vero senz'altro pei primi valori di r .

Per le definizioni, comè anche pei teoremi fondamentali della teoria, di cui facciamo uso, rimandiamo alle Note citate del CIPOLLA.

(4) *Sulla relazione tra il rango e il tipo di un gruppo*. [Rendiconti R. Accad. d'Italia], Roma, serie VII, vol. II (1941).

(5) V. AMATO: *Sul tipo minimo dei gruppi di rango 2*. [Rend. Accad. Scienze], Napoli, serie III, vol. 24 (1918).

1. - L'intersezione di due sottogruppi A e B di un gruppo H verrà indicata col simbolo $A \wedge B$. L'indice di un sottogruppo G in un gruppo H verrà indicato con $[H:G]$. Inoltre $H-G$ indicherà il complesso degli elementi di H che non appartengono a G .

Poichè, quando l'ordine del gruppo è basso, la (5) è certamente soddisfatta, faremo la dimostrazione per induzione rispetto all'ordine del gruppo.

Sia H un gruppo finito di rango r , per cui vogliamo dimostrare la (5), e sia τ il tipo di H . Per definizione, H dovrà contenere un sottogruppo fondamentale G_r di genere r . Detti τ' ed r' rispettivamente il tipo e il rango di G_r , dovrà essere, per l'ipotesi a base del processo d'induzione, $\tau' + 2 \geq 2^{r'+1} - 1$. Se $r' \geq r$, essendo, come è noto $\tau > \tau'$, segue subito la validità della (5) per H . Possiamo pertanto supporre $r' < r$.

Ma G_r , essendo di genere r , contiene un sottogruppo fondamentale di H di genere $r-1$, che è anche sottogruppo fondamentale di G_r di genere $r-1$. Onde $r' \geq r-1$, e pertanto esattamente $r' = r-1$. Sarà quindi $\tau' + 2 \geq 2^r - 1$.

Per dimostrare la (5) basterà allora provare che è $\tau - \tau' \geq 2^{r+1} - 2^r = 2^r$.

2. - Avendo G_r genere r , esiste almeno una catena di sottogruppi $G_r, G_{r-1}, G_{r-2}, \dots, G_1, J_1, J_2, \dots, J_{r-1}, J_r, J_0$, ciascuno contenuto nel precedente come sottogruppo proprio, ad eccezione di J_1 , che può eventualmente coincidere con G_1 , ove G_i è un sottogruppo fondamentale di H di genere i ($i = 1, \dots, r$), J_i è il sottogruppo abeliano fondamentale corrispondente a G_i , e J_0 è il centrale di H . Indichiamo poi con I_1, I_2, \dots, I_r i sistemi fondamentali relativi a G_1, G_2, \dots, G_r .

Sia ora I un sistema fondamentale di H , non contenuto in G_r ; siano G e J rispettivamente il sottogruppo fondamentale e il sottogruppo abeliano fondamentale relativi ad I . Poichè I non è in G_i , I_i non è in G , nè quindi in J .

Diremo ora che J, I e G sono di stadio s , se J ha elementi a comune con s , e solo s , dei $2r-1$ complessi $G_r - G_{r-1}, G_{r-1} - G_{r-2}, \dots, G_2 - G_1, J_1 - J_2, \dots, J_{r-1} - J_r, J_r - J_0$. E mostriamo anzitutto che l'indice di J in H non è inferiore a 2^{2r-1} .

Abbiamo infatti, per una nota proprietà dei gruppi, che $[H:J] \geq [G_r:J \wedge G_r]$. Inoltre, poichè $J \wedge G_{r-1} = J \wedge G_r \wedge G_{r-1}$, si ha anche $[G_r:J \wedge G_r] \geq [G_{r-1}:J \wedge G_r \wedge G_{r-1}] = [G_{r-1}:J \wedge G_{r-1}]$; e se poi J non ha elementi a comune con $G_r - G_{r-1}$, si ha $J \wedge G_r = J \wedge G_{r-1}$, e quindi $[G_r:J \wedge G_r] = [G_r:J \wedge G_{r-1}] = [G_r:G_{r-1}] \cdot [G_{r-1}:J \wedge G_{r-1}] \geq 2[G_{r-1}:J \wedge G_{r-1}]$. E similmente $[G_{r-1}:J \wedge G_{r-1}] \geq [G_{r-2}:J \wedge G_{r-2}]$; e se poi J non ha elementi a comune con $G_{r-1} - G_{r-2}$, è anche $[G_{r-1}:J \wedge G_{r-1}] \geq 2[G_{r-2}:J \wedge G_{r-2}]$. Onde $[G_r:J \wedge G_r] \geq \varepsilon [G_{r-2}:J \wedge G_{r-2}]$, ove $\varepsilon = 1, 2$ o 4 a seconda che J ha elementi a comune con ambedue, con uno o con nessuno dei complessi $G_r - G_{r-1}$, $G_{r-1} - G_{r-2}$.

Così seguitando, e ricordando che J ha elementi a comune con s , e solo s , dei $2r - 1$ complessi $G_r - G_{r-1}$, $G_{r-1} - G_{r-2}$, ..., $G_2 - G_1$, $J_1 - J_2$, ..., $J_r - J_0$, si ottiene $[H:J] \geq [G_r:J \wedge G_r] \geq 2^{2r-1-s} [J_0:J \wedge J_0]$. E poichè J_0 , quale centrale di H , appartiene a J , e pertanto $[J_0:J \wedge J_0] = 1$, si ha

$$[H:J] \geq 2^{2r-s-1},$$

come si era affermato.

3. — Mostriamo ora che, d'altro canto, l'indice di J in H non è inferiore a 2^s .

Si indichino con K_1, K_2, \dots, K_s quelli tra i complessi $G_r - G_{r-1}$, $G_{r-1} - G_{r-2}$, ..., $G_2 - G_1$, $J_1 - J_2$, ..., $J_r - J_0$, che hanno elementi a comune con J . Sia poi I_ξ^* un sistema fondamentale comune a J e a K_ξ , e G_ξ^* il corrispondente sottogruppo fondamentale ($\xi = 1, 2, \dots, s$).

Sia, più precisamente, $K_1 = G_{i_1} - G_{i_1-1}$, $K_2 = G_{i_2} - G_{i_2-1}$, ..., $K_t = G_{i_t} - G_{i_t-1}$, $K_{t+1} = J_{i_{t+1}} - J_{i_{t+1}+1}$, ..., $K_s = J_{i_s} - J_{i_s+1}$, ove i_1, \dots, i_t sono alcuni dei numeri $1, \dots, r$ posti in ordine decrescente, e i_{t+1}, \dots, i_s alcuni dei medesimi numeri posti in ordine crescente. Inoltre, quando $i_s = r$, $i_s + 1$ indichi lo 0. Può, in particolare, essere $t = 0$, o $t = s$.

Si noti ora che se $\xi > t$, I_ξ^* è in $J_{i_{t+1}}, J_{i_{t+2}}, \dots, J_{i_s}$, ma non in $J_{i_{\xi+1}}, J_{i_{\xi+2}}, \dots, J_{i_s}$, onde G_ξ^* contiene $G_{i_{t+1}}, G_{i_{t+2}}, \dots, G_{i_s}$,

ma non $G_{i_{\xi+1}^*}, G_{i_{\xi+2}^*}, \dots, G_{i_s^*}$. Da ciò segue che $G_s^* \wedge G_{s-1}^* \wedge \dots \wedge G_{\xi}^*$ è un sottogruppo proprio di $G_s^* \wedge G_{s-1}^* \wedge \dots \wedge G_{\xi+1}^*$, in quanto questo contiene, e quello non contiene $G_{i_{\xi+1}^*}$. Se poi $\xi \leq t$, I_{ξ}^* è in $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_{\xi}},$ ma non in $G_{i_{\xi+1}}, \dots, G_{i_t},$ onde G_{ξ}^* contiene $I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_{\xi}},$ ma non $I_{i_{\xi+1}}, \dots, I_{i_t}.$ Da ciò segue, anche in questo caso, che $G_s^* \wedge G_{s-1}^* \wedge \dots \wedge G_{\xi}^*$ è un sottogruppo proprio di $G_s^* \wedge G_{s-1}^* \wedge \dots \wedge G_{\xi+1}^*$, in quanto questo contiene, e quello non contiene $I_{i_{\xi+1}}.$ In conclusione, nella catena di sottogruppi $H, G_s^*, G_s^* \wedge G_{s-1}^*, \dots, G_s^* \wedge G_{s-1}^* \wedge \dots \wedge G_1^*$ ogni sottogruppo è contenuto nel precedente come sottogruppo proprio, e pertanto ha in esso indice ≥ 2 . D'altra parte ognuno di essi contiene J , perchè G contiene $I_1^*, \dots, I_s^*;$ quindi l'indice di J in H non è inferiore a 2^r , come si era affermato.

4. - Dai nn. 2 e 3 segue che $[H:J]$ non è inferiore al maggiore dei numeri $2^{2^r-1-s}, 2^s;$ e poichè, se $s < r$, si ha $2^r - 1 - s \geq r$, otteniamo che:

L'indice di J in H non è inferiore a 2^r .

Si ponga ora per brevità $[H:J] = \mu$, e si indichi con n l'ordine di H , e con g quello di G_r . Allora $[G_r:J \wedge G_r] \leq [H:J] = \mu$, onde l'ordine di $J \wedge G_r$ è $\geq \frac{g}{\mu}$. E poichè I appartiene a J , ma non a G_r , e J ha ordine $\frac{n}{\mu}$, si ha che l'ordine di I è $\leq \frac{n}{\mu} - \frac{g}{\mu} = \frac{n-g}{\mu}$. Essendo poi $n-g$ l'ordine di $H - G_r$, si ha che il numero dei sistemi fondamentali di H non contenuti in G_r , cioè $\tau - \tau'$, soddisfa alla disuguaglianza $\tau - \tau' \geq \mu$. Essendo inoltre, come s'è visto or ora, $\mu \geq 2^r$, segue

$$\tau - \tau' \geq 2^r$$

e poichè per ipotesi $\tau' + 2 \geq 2^r - 1$, si ottiene $\tau + 2 \geq 2^r + 2^r - 1 = 2^{r+1} - 1$, cioè la (5).