RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

Ancora sulla teoria delle matrici applicata ai sistemi di equazioni differenziali lineari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 14 (1943), p. 37-42

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1943__14__37_0>

ANCORA SULLA TEORIA DELLE MATRICI APPLICATA AI SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER *(Padova)*

1. - In una Memoria, sulla teoria delle matrici applicata ai sistemi di equazioni differenziali, ho, fra l'altro, considerata l'equazione

$$DB = \frac{A}{z} \tag{1}$$

– dove A è una matrice i cui elementi sono funzioni olomorfe della variabile z, in un certo dominio del punto $z = 0$ e DB indica la derivata destra di VOLTERRA della matrice B – ed ho fatto vedere che tale equazione ammette una matrice integrale regolare [1].

Nella dimostrazione data sono però incorso in un errore che mi propongo di correggere in questa piccola Nota.

Separiamo nella matrice A la parte che contiene la z dalla parte costante, poniamo cioè:

$$A = A^{(0)} + \bar{A} z$$

e scriviamo la matrice $A^{(0)}$ sotto forma normale

[1] G. ZWIRNER: *La teoria delle matrici applicata ai sistemi di equazioni differenziali lineari* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, vol. VII (1936), pp. 55-109], pag. 101.

Rimando il lettore a tale lavoro per tutte le definizioni che avrò bisogno di richiamare in questa Nota ed anche per le notazioni adoperate.

$$A^{(0)} = C^{-1}[T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}]\,C, \tag{2}$$

dove

$$T_i^{(e_i)} = \begin{Vmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{Vmatrix}$$

e le λ sono le radici dell'equazione caratteristica

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{1,1}^{(0)} - \lambda & a_{1,2}^{(0)} & \dots & a_{1,n}^{(0)} \\ a_{2,1}^{(0)} & a_{2,2}^{(0)} - \lambda & \dots & a_{2,n}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}^{(0)} & a_{n,2}^{(0)} & \dots & a_{n,n}^{(0)} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

dove $a_{i,k}^{(0)}$ sono gli elementi della matrice $A^{(0)}$.

L'equazione (1) si può allora porre sotto la forma:

$$\frac{dB}{dz} = B\frac{A^{(0)}}{z} + B\bar{A}. \tag{3}$$

Determiniamo ora una matrice H soddisfacente all'equazione (²)

$$DH = \frac{A^{(0)}}{z} \tag{4}$$

e poniamo nella (3)

$$B = HB_1.$$

Si avrà:

$$H\frac{dB_1}{dz} + \frac{dH}{dz}B_1 = HB_1\frac{A^{(0)}}{z} + HB_1\bar{A},$$

ossia, tenendo presente la (4),

$$\frac{dB_1}{dz} + \frac{A^{(0)}}{z}B_1 - B_1\frac{A^{(0)}}{z} = B_1\bar{A}.$$

(²) cfr. loc. cit. in (¹), pag. 99.

Moltiplicando ora, a sinistra, per la matrice C, dove C è la matrice che compare nella (2), si ha:

$$C\frac{dB_1}{dz}+C\frac{C^{-1}[T_1^{(e_1)},\ T_2^{(e_2)},\ldots,\ T_p^{(e_p)}]\,C}{z}B_1-CB_1\frac{A^{(0)}}{z}=CB_1\bar{A}\,.$$

Posto

$$\bar{B}=CB_1,$$

si ottiene:

$$(5)\qquad z\frac{d\bar{B}}{dz}-\bar{B}A^{(0)}+[T_1^{(e_1)},\ T_2^{(e_2)},\ldots,\ T_p^{(e_p)}]\,\bar{B}=\bar{B}\bar{A}\,z\,.$$

Facciamo ora vedere che si può soddisfare all'equazione (5) con una matrice $\bar{B}$ olomorfa in un certo dominio del punto $z=0$, riducentesi per $z=0$ alla matrice C. A tale scopo, posto

$$\bar{A}z=\sum_{1}^{\infty}{}_i\,A^{(i)}z^i$$

e. formalmente,

$$(6)\qquad \bar{B}=\sum_{0}^{\infty}{}_j\,\bar{B}^{(j)}z^j,\qquad (\bar{B}^{(0)}=C),$$

dalla (5) si ricavano le seguenti formule di ricorrenza:

$$(7)\qquad K\bar{B}^{(k)}-\bar{B}^{(k)}A^{(0)}+[T_1^{(e_1)},\ T_2^{(e_2)},\ldots,\ T_p^{(e_p)}]\,\bar{B}^{k}=\sum_{1}^{k}{}_h\,\bar{B}^{(k-h)}A^{(h)},$$

$$(k=1,\ 2,\ldots.).$$

In corrispondenza al divisore elementare $(\lambda-\lambda_1)^{e_1}$ della matrice $A^{(0)}$, dalle (7) si deducono i seguenti e_1 sistemi:

$$(8)\qquad a_{1,s}^{(0)}\,\bar{b}_{t,1}^{(k)}+a_{2,s}^{(0)}\,\bar{b}_{t,2}^{(k)}+\ldots.+(a_{s,s}^{(0)}-k-\lambda_1)\,\bar{b}_{t,s}^{(k)}+\ldots.+$$

$$+\,a_{n,s}^{(0)}\,\bar{b}_{t,n}^{(k)}=P_{t,s}+\bar{b}_{t-1,s}^{(k)},$$

$$(t=1,\ 2,\ldots,\ e_1;\ s=1,\ 2,\ldots,\ n;\ \bar{b}_{0,s}^{(k)}=0),$$

nelle funzioni incognite $\bar{b}_{t,s}^{(k)}$ e dove $P_{t,s}$ sono delle funzioni razionali intere degli elementi delle matrici $A^{(h)}$ e $\overline{B}^{(k-h)}$ $(h = 1, 2, \ldots, k)$.

Il determinante dei coefficienti di tali sistemi vale $F(k + \lambda_1)$ e se ammettiamo che le radici dell'equazione caratteristica non differiscano per interi positivi non nulli, si avrà

$$F(k + \lambda_1) \neq 0$$

e dai sistemi (8) si potranno determinare gli elementi delle prime e_1 righe della matrice $\overline{B}^{(k)}$. Ragionando in modo analogo sugli altri divisori elementari si verrà a determinare la matrice $\overline{B}^{(k)}$ e quindi lo sviluppo (6).

2. – Dimostriamo ora la convergenza dello sviluppo (6).

A tale scopo diciamo r il raggio di un cerchio, avente il centro nell'origine, in ogni punto del quale, compresa la circonferenza, la matrice $A z$ converge e sia M il massimo modulo dei suoi elementi, in tale cerchio, e N il massimo modulo degli elementi delle matrici $\overline{B}^{(k-h)} r^{k-h}$ $(h = 1, 2, \ldots, k - 1)$. Si ha allora, evidentemente,

$$(9) \qquad | P_{t,s} r^k | \leq k n M N, \quad (s = 1, 2, \ldots, n;\ t = 1, 2, \ldots, e_1).$$

Dalle (8) si ricava inoltre, per $t = 1$,

$$(10) \qquad \overline{b}^{(k)}_{1,s} F(k + \lambda_1) = P_{1,1} \Delta_{s,1} + P_{1,2} \Delta_{s,2} + \ldots + P_{1,n} \Delta_{s,n},$$

dove $\Delta_{s,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ indicano i complementi algebrici degli elementi della riga s-ma nel determinante $F(k + \lambda_1)$ [3].

Detto allora $\delta_{s,i}$ il modulo di $\Delta_{s,i}$ e δ il modulo di $F(k + \lambda_1)$, dalla (9) e (10) risulta:

$$(11) \qquad | \overline{b}^{(k)}_{1,s} r^k | \leq n M N \left(\frac{k\delta_{s,1}}{\delta} + \frac{k\delta_{s,2}}{\delta} + \ldots + \frac{k\delta_{s,n}}{\delta} \right),$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

[3] Per il ragionamento svolto in questo numero Cfr. L. Sauvage: *Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles* [Annales de l'École Normale Supérieure, tomo III (1886), pp. 391-404], pag. 395.

Essendo inoltre

$$\frac{k\delta_{s,i}}{\delta} = \left| \frac{k\,\Delta_{s,i}}{F(k+\lambda_1)} \right|$$

e risultando $F(k+\lambda_1)$ di grado n rispetto a k e $k\Delta_{s,i}$ di grado $\leq n$ rispetto a k, esisterà e sarà finito il

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k\delta_{s,i}}{\delta}.$$

Si potrà quindi determinare un numero $l_1 > 0$ tale che per k sufficientemente grande si abbia, tenendo presente la (11)

$$|\bar{b}^{(k)}_{1,s} \cdot r^k| \leq n\,M\,N\,l_1\,, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Determinato così un estremo superiore per $|\bar{b}^{(k)}_{1,s}\, r^k|$ si potrà ora con ragionamento analogo determinare un estremo superiore anche per gli elementi $|\bar{b}^{(k)}_{2,s}\, r^k|, \ldots, |\bar{b}^{(k)}_{e_1,s}|$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ e per tutti gli altri elementi $\bar{b}^{(k)}_{t,s}\, r^k$ che corrispondono agli altri divisori elementari [4].

Si potrà quindi determinare un numero $L > 0$ tale che. per k sufficientemente grande, si abbia

$$|\bar{B}^{(k)}| \cdot r^k \leq |n\,M\,N\,L| .$$

Siccome coll'aumentare di k non aumenta il numero L e supponendo, come è sempre lecito purchè si prenda r sufficientemente piccolo,

$$n\,M\,L < 1,$$

si avrà:

$$|\bar{B}^{(k+q)}|\, r^{k+q} \leq |N| , \qquad (q = 0, 1, \ldots).$$

[4] Per determinare un estremo superiore, per esempio, di $|\bar{b}^{(k)}_{2,s}\, r^k|$ basta osservare che risulta

$$|P_{2,s} + \bar{b}^{(k)}_{1,s}|\, r^k \leq k\,n M N + n\,M\,N\,l_1 < k\,n\,M\,N(1 + l_1)$$

e poi ragionare come nel caso precedente.

Da qui risulta che i moduli dei termini dello sviluppo (6) sono, a partire da un certo indice, minori di un numero fisso per ogni valore di z il cui modulo è, al più, eguale a r.

Lo sviluppo (6) risulterà quindi convergente entro il cerchio, con il centro nell'origine, avente per raggio r.

3. - Siamo venuti in tal modo a determinare, nell'ipotesi che le radici dell'equazione caratteristica non differiscano per interi positivi non nulli, un sistema fondamentale di integrali per il sistema di equazioni differenziali lineari

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} z\dfrac{dy_1}{dz} = a_{1,1}\,y_1 + a_{1,2}\,y_2 + \ldots . + a_{1,n}\,y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z\dfrac{dy_n}{dz} = a_{n,1}\,y_1 + a_{n,2}\,y_2 + \ldots . + a_{n,n}\,y_n, \end{array}\right.$$

con $a_{i,k}$ funzioni olomorfe in un dominio del punto $z=0$.

Ci rimane ora da esaminare il caso che il determinante $F(\lambda)$ abbia delle radici che differiscono fra loro per numeri interi positivi non nulli. A tale scopo basterà allora ragionare come ho fatto nella Memoria citata ricordando che quando del sistema (12) si conoscono m integrali linearmente indipendenti si può trasformare tale sistema in nuovo sistema contenente soltanto $n-m$ equazioni con altrettante incognite e della stessa natura del sistema (12) ([5]); quindi anche l'equazione (1) si trasformerà in una nuova equazione, della stessa natura, dove le matrici, integranda e integrale, sono d'ordine $n-m$.

([5]) Per tale trasformazione cfr. loc. cit. in ([1]), n. 6. Cfr. anche i lavori dello stesso Autore « *Annales de l'École Normale Supérieure*, 1889 e 1891 ».