RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GAETANO FICHERA

Sull'equilibrio di un corpo elastico, isotropo e omogeneo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 17 (1948), p. 9-28

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1948__17__9_0>

SULL' EQUILIBRIO DI UN CORPO ELASTICO, ISOTROPO E OMOGENEO (1)

Memoria (*) *di* GAETANO FICHERA (*a Roma*)

Le ricerche del Prof. PICONE hanno posto su nuove basi i problemi relativi all'integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali. Egli introduce fra l'altro un nuovo generale procedimento per la risoluzione dei problemi al contorno per dette equazioni, che, fondato essenzialmente sull'uso della formula di GREEN, conduce alla effettiva determinazione numerica delle soluzioni, previa la conoscenza di taluni sistemi di funzioni verificanti certe condizioni (2).

L. AMERIO, in alcuni recenti lavori, perviene alla costruzione di tali sistemi di funzioni per le equazioni del secondo ordine di tipo ellittico, per l'equazione del calore e per l'equazione $\Delta_{2k} u = f$ (3). Egli si fonda su un notevole teorema, da lui dimostrato, che assegna le *condizioni di compatibilità* fra i valori al contorno delle soluzioni delle equazioni che si considerano.

(*) Pervenuta in Redazione il 20 gennaio 1947.

(1) Lavoro eseguito nell' Istituto per le Applicazioni del calcolo.

(2) Cfr. M. PICONE, *Appunti d'Analisi superiore* [Rondinella (Napoli), 1940] pagg. 752–765, e cfr. anche dello stesso A.: *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti.* [Rend. Accad. delle Scienze di Torino, 1940] pagg. 413-426.

(3) Cfr. L. AMERIO, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ *in un dominio di connessione qualsiasi* [Ist. lombardo di Scienze e Lettere, Rend. Cl. di Scienze, Vol. LXXVIII, 1944-45] pagg. 1-24, *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo or-*

In questo lavoro ho ricercato se tali procedimenti d'integrazione siano applicabili ai sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali e precisamente ho preso in esame quello classico, relativo all'equilibrio di un solido elastico, isotropo e omogeneo. Quantunque taluni dei problemi al contorno, che si pongono per tale sistema, siano di natura diversa di quelli, che si considerano per le equazioni su menzionate, sono pervenuto ad estendere i risultati, stabiliti per tali equazioni, al suddetto sistema, dimostrando che la risoluzione di ciascun problema al contorno relativo all'equilibrio di un solido elastico è sempre equivalente a quella di un sistema di equazioni integrali di FISCHER-RIESZ, con che è da ritenersi acquisita la conoscenza numerica delle soluzioni (4).

Tale risultato si basa su un fondamentale teorema, il quale – credo – oltre che per questo, offre interesse anche da un punto di vista puramente fisico-matematico, in quanto, in virtù di esso, si viene ad ottenere una nuova e più compatta traduzione analitica delle condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un corpo elastico. Detto teorema è da riguardarsi come un'estensione alle equazioni dell'elasticità di quello, su ricordato, che l'AMERIO dimostra per le equazioni da lui considerate.

* * *

Sia C un corpo elastico tridimensionale, isotropo e omogeneo. Indichiamo con $\boldsymbol{F} dc$ la forza di massa agente sull'elemento di volume dc e con $\boldsymbol{T} d\sigma$, quella che agisce sull'elemento di superficie $d\sigma$. Introdotto un sistema di assi coordinati ortogonali $x y z$, siano X, Y, Z, le componenti secondo detti assi del vettore $\boldsymbol{F}$ e T_x, T_y, T_z quelle di $\boldsymbol{T}$. È ben noto dalla teoria matematica

dine di tipo ellittico [American Journal of Mathematics, Baltimora (1947)] pagg. 447-449, *Sull'equazione di propagazione del calore* [Rend. di Matematica e delle sue applicazioni, 1946] pagg. 84-120, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_{2k} = f$ [Annali di Matematica pura ed applicata, Serie IV, Tomo XXIV, 1945] pagg. 119-138.

(4) Cfr. M. PICONE, *Vedute unitarie sul calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali della Fisica–matematica* [Atti del I. Convegno di Matematica applicata, Roma, 4-6 giugno 1936] pagg. 1-36.

dell'elasticità che indicate con t_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ le nove caratteristiche di tensione, con $t_{ij} = t_{ji}$, le condizioni d'equilibrio nell'interno di C sono espresse dalle seguenti equazioni:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} + X = 0, \\ &\frac{\partial t_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} + Y = 0, \\ &\frac{\partial t_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} + Z = 0, \end{aligned} \right.$$

mentre indicata con n la normale in un punto della superficie del corpo, rivolta verso l'interno del corpo stesso, le condizioni d'equilibrio sulla superficie sono le seguenti:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &t_{11} \cos(n, x) + t_{12} \cos(n, y) + t_{13} \cos(n, z) + T_x = 0, \\ &t_{21} \cos(n, x) + t_{22} \cos(n, y) + t_{23} \cos(n, z) + T_y = 0, \\ &t_{31} \cos(n, x) + t_{32} \cos(n, y) + t_{33} \cos(n, z) + T_z = 0. \end{aligned} \right.$$

Indichiamo con $S \equiv (u, v, w)$ il vettore che indica lo spostamento di un punto P di C in uno stato di deformazione del corpo. Posto

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

riesce, com'è noto:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &t_{11} = L\Theta + 2K\frac{\partial u}{\partial x}; \quad t_{22} = L\Theta + 2K\frac{\partial v}{\partial y}; \\ &t_{33} = L\Theta + 2K\frac{\partial w}{\partial z}; \\ &t_{12} = t_{21} = K\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \quad t_{13} = t_{31} = K\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right); \\ &t_{23} = t_{32} = K\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \end{aligned} \right.$$

essendo L e K costanti elastiche del corpo stesso (costanti di Lamé), aventi valore positivo.

Dalle (1) e (2) si perviene, tramite le (3), alle equazioni dell'equilibrio nelle componenti di spostamento.

Si ottiene nell'interno di C:

$$
(4)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&K\Delta_2 u + (L+K)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + X = 0\,,\\
&K\Delta_2 v + (L+K)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + Y = 0\,,\\
&K\Delta_2 w + (L+K)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + Z = 0\,,
\end{aligned}
\right.
$$

mentre sulla superficie del corpo abbiamo:

$$
(5)\left\{
\begin{aligned}
&(L+K)\,\Theta \cos(n,x) + K\frac{du}{dn} + K\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos(n,y) - \frac{\partial v}{\partial y}\cos(n,x)\right) +\\
&\qquad + K\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos(n,z) - \frac{\partial w}{\partial z}\cos(n,x)\right) + \mathrm{T} = 0\,,\\
&(L+K)\,\Theta \cos(n,y) + K\frac{dv}{dn} + K\left(\frac{\partial w}{\partial y}\cos(n,z) - \frac{\partial w}{\partial z}\cos(n,y)\right) +\\
&\qquad + K\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,x) - \frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,y)\right) + \mathrm{T}_y = 0\,,\\
&(L+K)\,\Theta \cos(n,z) + K\frac{dw}{dn} + K\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos(n,x) - \frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,z)\right) +\\
&\qquad + K\left(\frac{\partial v}{\partial z}\cos(n,y) - \frac{\partial v}{\partial y}\cos(n,z)\right) + \mathrm{T}_z = 0\,,
\end{aligned}
\right.
$$

I tre problemi fondamentali, che si pongono per la determinazione delle configurazioni d'equilibrio di un corpo elastico consistono nella integrazione del sistema di equazioni alle derivate parziali (4), assegnando sulla superficie esterna Σ del corpo uno dei seguenti tre tipi di dati:

1°) le componenti di spostamento u, v, w;

2°) le componenti della forza superficiale T_x, T_y, T_z;

3°) su una parte della superficie u, v, w, e sulla restante parte T_x, T_y, T_z.

Chiameremo il primo *problema degli spostamenti*, il secondo *problema delle forze superficiali*, il terzo *problema misto*.

Indicati con F e T e F' e T' due differenti sistemi di forze, agenti sul corpo, e detto S lo spostamento di un punto di C, dovuto alle forze del primo sistema ed S' quello relativo al secondo, sussiste, com'è ben noto, il seguente teorema di reciprocità di Betti

$$\int_C (F \times S')\, dc + \int_\Sigma (T \times S')\, d\sigma = \int_C (F' \times S)\, dc + \int_\Sigma (T' \times S)\, d\sigma .$$

Considerati i due punti $M \equiv (x, y, z)$ e $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ e posto

$$r = \overline{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \qquad \alpha = \frac{L+K}{L+2K},$$

indichiamo con $S_1(M, P)$, $S_2(M, P)$, $S_3(M, P)$ i vettori di componenti così definite

$$u_1(M, P) = -\alpha \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{2}{r}, \quad v_1(M, P) = -\alpha \frac{\partial^2 r}{\partial y^2},$$
$$w_1, (M, P) = -\alpha \frac{\partial^2 r}{\partial x\, \partial z};$$

$$u_2(M, P) = -\alpha \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}, \quad v_2(M, P) = -\alpha \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{2}{r},$$
$$w_2(M, P) = -\alpha \frac{\partial^2 r}{\partial y\, \partial z};$$

$$u_3(M, P) = -\alpha \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}, \quad v_3(M, P) = -\alpha \frac{\partial^2 r}{\partial y\, \partial z},$$
$$w_3(M, P) = -\alpha \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + \frac{2}{r}.$$

Si constata che ciascun vettore per ogni fissato P è una funzione (vettoriale) di M soluzione del sistema (4) e viceversa.

Indicate con $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$ le forze superficiali (per unità di superficie) rispettivamente competenti, in virtù delle (5), agli spostamenti S_1, S_2, S_3, le componenti di ciascuno di tali vettori sono rispettivamente date da

$$\left\{\begin{aligned}
T_x^{(1)} &= 2K\alpha\left(\frac{d}{dn}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2\cos(n,x)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{r}\right) - 2K\,\frac{d}{dn}\,\frac{1}{r}\,,\\
T_y^{(1)} &= 2K^{\alpha}\left(\frac{d}{dn}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} - 2\cos(n,x)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{r}\right) -\\
&\quad - 2K\left(\cos(n,x)\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{1}{r} - \cos(n,y)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{r}\right),\\
T_z^{(1)} &= 2K\alpha\left(\frac{d}{dn}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z} - 2\cos(n,x)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{r}\right) -\\
&\quad - 2K\left(\cos(n,x)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{r} - \cos(n,z)\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{1}{r}\right);
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
T_x^{(2)} &= 2K\alpha\left(\frac{d}{dn}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} - 2\cos(n,y)\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{1}{r}\right) -\\
&\quad - 2K\left(\cos(n,y)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{r} - \cos(n,x)\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{1}{r}\right);\\
T_y^{(2)} &= 2K\alpha\left(\frac{d}{dn}\,\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - 2\cos(n,y)\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{1}{r}\right) \quad 2K\,\frac{d}{dn}\,\frac{1}{r}\,,\\
T_z^{(2)} &= 2K\alpha\left(\frac{d}{dn}\,\frac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial z} - 2\cos(n,y)\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{1}{r}\right) -\\
&\quad - 2K\left(\cos(n,y)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{r} - \cos(n,z)\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{1}{r}\right);
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
T_x^{(3)} &= 2K\alpha\left(\frac{d}{dn}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z} - 2\cos(n,z)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{r}\right) -\\
&\quad - 2K\left(\cos(n,z)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{r} - \cos(n,x)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{r}\right),\\
T_y^{(3)} &= 2K\alpha\left(\frac{d}{dn}\,\frac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial z} - 2\cos(n,z)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{r}\right) -\\
&\quad - 2K\left(\cos(n,z)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{r} - \cos(n,x)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{r}\right),\\
T_z^{(3)} &= 2K\alpha\left(\frac{d}{dn}\,\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} - 2\cos(n,z)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{r}\right) - 2K\,\frac{d}{dn}\,\frac{1}{r}\,.
\end{aligned}\right.$$

Con procedimento classico dal teorema di BETTI si deducono le seguenti tre formole dovute a SOMIGLIANA, valide in ogni punto P interno a C (5).

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
8\pi K u(P) &= \int_C [F(M) \times S_1(M,P)]\, dc(M) + \int_\Sigma [T(M) \times \\
&\times S_1(M,P)]\, d\sigma(M) - \int_\Sigma [S(M) \times T^{(1)}(M,P)]\, d\sigma(M)\,, \\
8\pi K v(P) &= \int_C [F(M) \times S_2(M,P)]\, dc(M) + \int_\Sigma [T(M) \times \\
&\times S_2(M,P)]\, d\sigma(M) - \int_\Sigma [S(M) \times T^{(2)}(M,P)]\, d\sigma(M)\,, \\
8\pi K w(P) &= \int_C [F(M) \times S_3(M,P)]\, dc(M) + \int_\Sigma [T(M) \times \\
&\times S_3(M,P)]\, d\sigma(M) - \int_\Sigma [S(M) \times T^{(3)}(M,P)]\, d\sigma(M)\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Detto poi P' un punto esterno a C si ha:

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_C [F(M) \times S_1(M,P')]\, dc(M) + \int_\Sigma [T(M) \times \\
&\times S_1(M,P')]\, d\sigma(M) - \int_\Sigma [S(M) \times T^{(1)}(M,P')]\, d\sigma(M) = 0, \\
&\int_C [F(M) \times S_2(M,P')]\, dc(M) + \int_\Sigma [T(M) \times \\
&\times S_2(M,P')]\, d\sigma(M) - \int_\Sigma [S(M) \times T^{(2)}(M,P')]\, d\sigma(M) = 0, \\
&\int_C [F(M) \times S_3(M,P')]\, dc(M) + \int_\Sigma [T(M) \times \\
&\times S_3(M,P')]\, d\sigma(M) - \int_\Sigma [S(M) \times T^{(3)}(M,P')]\, d\sigma(M) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

(5) Cfr. C. SOMIGLIANA, *Sulle equazioni dell'elasticità* [Ann. di Matem., t. 17 (1889)] pagg. 37-64. Per una trattazione d'insieme possono consultarsi

Per dimostrare il teorema di BETTI é quindi le (6) e le (7) si suole fare l'ipotesi della continuità in tutto C (frontiera inclusa) delle funzioni u, v, w e delle loro derivate parziali prime. Noi invece ricercheremo le soluzioni del sistema (4) nella classe più generale dei vettori $\boldsymbol{S}$ per cui valgono le (6) e le (7), classe che verremo a ben precisare.

Supporremo intanto che il solido C sia schematizzabile in un dominio limitato dello spazio $x\,y\,z$, la cui frontiera Σ sia costituita da un numero finito di superficie chiuse $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_p$ a due a due prive di punti in comune, essendo Σ_0 il contorno esterno e $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$ quelli interni.

Ciascuna superficie Σ_i sia decomponibile in un numero finito di porzioni di superficie regolari [6] ed ognuna di queste goda della proprietà, che, fissato quasi ovunque su di essa un punto M ed assunto il piano tangente come piano $x\,y$ e la normale in esso come asse z, la superficie ammetta in un intorno di M la rappresentazione $z = z\,(x, y)$, essendo la funzione $z\,(x, y)$ continua assieme alle sue derivate parziali prime e seconde.

Supporremo inoltre che le tre funzioni X, Y, Z siano hölderiane in C.

Indichiamo con $\{\boldsymbol{S}\}$ la classe dei vettori $\boldsymbol{S}$, definiti in C, di componenti u, v, w, per ciascuno dei quali sono verificate le seguenti proprietà:

I) le funzioni u, v, w sono continue in $C - \Sigma$ assieme alle derivate parziali prime e seconde e verificano ivi le equazioni (4);

II) fissato quasi ovunque su Σ un punto M, condotta la normale n a Σ in M, detto P un punto di essa, contenuto in C, e considerati i due vettori $\boldsymbol{S}(P)$ e $\boldsymbol{T}(P)$, essendo quest'ultimo definito dalle (5), sussistono le due relazioni

$$(8) \qquad \lim_{P \to M \,(\text{su } n)} \boldsymbol{S}(P) = \boldsymbol{S}(M) \quad , \quad \lim_{P \to M \,(\text{su } n)} \boldsymbol{T}(P) = \boldsymbol{T}(M)\,;$$

essendo inoltre i due vettori $\boldsymbol{S}(M)$ e $\boldsymbol{T}(M)$ sommabili su Σ;

E. TREFFTZ, *Mathematische Elastizitätstheorie* [Handbuch der Phisik., Bd. VI, Springer (Berlin 1928]. R. MARCOLONGO, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici* [Hoepli (Milano) 1904].

(6) Cfr. M. PICONE, *Lezioni di Analisi infinitesimale* [Circolo Matematico di Catania (1923)] pp. 228-232.

III) in ogni punto P interno a C sussistono le (6) mentre per P' esterno sussistono le (7).

Porremo al modo seguente per i vettori della classe $\{\boldsymbol{S}\}$ i tre problemi fondamentali dell'equilibrio del solido elastico C:

problema degli spostamenti:
determinare un vettore di $\{\boldsymbol{S}\}$ avendo assegnato su Σ il vettore $\boldsymbol{S}(M)$ ivi sommabile;

problema delle forze superficiali:
determinare un vettore di $\{\boldsymbol{S}\}$ avendo assegnato su Σ il vettore $\boldsymbol{T}(M)$ ivi sommabile;

problema misto:
determinare un vettore di $\{\boldsymbol{S}\}$ avendo assegnato su una parte Σ' di Σ il vettore sommabile $\boldsymbol{S}(M)$ e sulla restante parte Σ'' il vettore sommabile $\boldsymbol{T}(M)$.

Il teorema che veniamo ad enunciare e dimostrare ci permetterà di far vedere come la risoluzione di ciascuno dei problemi posti è equivalente a quella di un sistema di equazioni integrali di Fischer-Riesz.

Teorema. - *Se* $\boldsymbol{S}(M)$ *e* $\boldsymbol{T}(M)$ *sono due vettori di componenti sommabili su* Σ *verificanti le equazioni* (7), *il vettore* $\boldsymbol{S}(P)$ *le cui componenti* u, v, w *sono definite dalle* (6) *appartiene alla classe* $\{\boldsymbol{S}\}$.

Alla dimostrazione del teorema enunciato premettiamo una osservazione, di cui ci varremo costantemente nel corso della medesima. Sia $f(M)$ una funzione sommabile su Σ e $g(M,P)$ una funzione definita per tutte le posizioni di M e di P nello spazio per cui non sia $M \equiv P$, e che risulti funzione continua di M e di P, se questi due punti variano in due insiemi senza punti in comune.

Sia M_0 un punto di Σ nel quale la superficie è dotata di piano tangente unico e, assunto questo come piano xy e la normale in M_0 come asse z, si determini su detto piano un intorno circolare Γ_R, di raggio R, del punto M_0, tale che la porzione di superficie regolare Σ_R appartenente a Σ e passante per M_0, che si proietta ortogonalmente sul piano xy nei punti di detto intorno, abbia equazione $z = z(x, y)$ essendo la funzione $z(x, y)$

continua in Γ_R assieme alle sue derivate parziali prime e seconde. Perchè ciò sia possibile basta, per le ipotesi ammesse su Σ, prendere M_0 al di fuori di un certo insieme N' di misura superficiale nulla. Introdotto nel piano xy un sistema di coordinate polari con polo l'origine, poniamo

$$\varphi(\rho, \theta) = |f[\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, z(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)] - f(0,0,0)|,$$

$$\psi(R) = \iint_{\Gamma_R} \varphi(\rho, \theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta .$$

A meno che M_0 non appartenga a un certo insieme N'' di punti di Σ di misura superficiale nulla, riesce

$$\lim_{R \to 0} \frac{\psi(R)}{R^2} = 0 .$$

Supporremo allora che M_0 non appartenga all'insieme di misura nulla $N = N' + N''$.

Si ha poi

$$\psi'(R) = R \int_0^{2\pi} \varphi(R, \theta)\, d\theta .$$

Siano P e P' i due punti di coordinate $(0, 0, \zeta)$ e $(0, 0, -\zeta)$, essendo $\zeta > 0$. Facciamo l'ipotesi che comunque si assuma il punto M su Σ_R si abbia

$$|g(M, P) - g(M, P')| < \frac{H_0\, \zeta}{(\rho^2 + \zeta^2)^{3/2}} ,$$

con H_0 costante positiva. Dimostriamo che è

$$\lim_{\zeta \to 0} \int_\Sigma [f(M) - f(M_0)]\, [g(M, P) - g(M, P')]\, d\sigma(M) = 0 .$$

Dato ad arbitrio $\varepsilon > 0$, si assuma R abbastanza piccolo da riuscire

$$\psi(R) < \varepsilon R^2 .$$

Abbiamo, detta H_1 una costante positiva

$$\int_{\Sigma_R} [f(M) - f(M_0)]\,[g(M,P) - g(M,P')]\,d\sigma(M) \leq$$

$$\leq H_1 \int_{\Gamma_R} \varphi(\rho,\theta)\,\frac{\zeta}{(\rho^2+\zeta^2)^{3/2}}\,\rho\,d\rho\,d\theta = H_1 \int_0^R \psi'(\rho)\,\frac{\zeta}{(\rho^2+\zeta^2)^{3/2}}\,d\rho \leq$$

$$\leq H_1\,\psi(R)\,\frac{\zeta}{(R^2+\zeta^2)^{3/2}} + 3H_1 \int_0^R \psi(\rho)\,\frac{\zeta\rho}{(\rho^2+\zeta^2)^{5/2}}\,d\rho <$$

$$< H_1\,\varepsilon\,R^2\,\frac{\zeta}{(R^2+\zeta^2)^{3/2}} + 3H_1\,\varepsilon \int_0^R \frac{\zeta\,d\rho}{\rho^2+\zeta^2} < \left(1+\frac{3}{2}\pi\right) H_1\,\varepsilon\,.$$

D'altronde poichè si ha

$$\lim_{\zeta \to 0} \int_{\Sigma-\Sigma_R} [f(M) - f(M_0)]\,[g(M,P) - g(M,P')]\,d\sigma(M) = 0\,,$$

si determini ζ_ε in modo che per $\zeta < \zeta_\varepsilon$ sia

$$\left| \int_{\Sigma-\Sigma_R} [f(M) - f(M_0)]\,[g(M,P) - g(M,P')]\,d\sigma(M) \right| < \varepsilon\,;$$

ne segue, per $\zeta < \zeta_\varepsilon$:

$$\left| \int_{\Sigma} [f(M) - f(M_0)]\,[g(M,P) - g(M,P')]\,d\sigma(M) \right| < \left(2+\frac{3}{2}\pi\right) H_1\,\varepsilon\,.$$

Data l'arbitrarietà di ε resta provato quanto volevamo. Passiamo adesso alla dimostrazione del nostro teorema. Il vettore $\boldsymbol{S}(P)$ definito dalle (6) verifica la I proprietà che definisce i vettori di $\{\boldsymbol{S}\}$.

Infatti le tre funzioni definite da dette formole sono continue nell'interno di C assieme alle derivate parziali prime e seconde, ciò segue per l'ipotesi fatta della hölderianeità di X, Y e Z in

C, com'è noto dalla teoria del potenziale di volume (7). Risultano inoltre verificate le equazioni (4). La proprietà III viene soddisfatta per le ipotesi stesse del teorema. Resta allora da provare la II. Fissato M_0 su Σ - fuori di un certo insieme N di misura nulla - assumeremo il piano tangente in M_0 a Σ come piano xy e la normale in M_0 come asse z diretto come la normale interna a C. Dette U_0, V_0, W_0 le componenti del vettore $\boldsymbol{S}_0 \equiv \boldsymbol{S}(M_0)$, cominciamo col dimostrare che è

$$(8_1) \qquad \lim_{\zeta \to 0+} u(0, 0, \zeta) = U_0 .$$

Assunto comunque il punto P nell'interno di C e P' all'esterno si ha:

$$(9) \qquad \begin{cases} 8\pi K U_0 = -\int_\Sigma [\boldsymbol{S}_0 \times \boldsymbol{T}^{(1)}(M,P)]\, d\sigma(M), \\ 0 = \int_\Sigma [\boldsymbol{S}_0 \times \boldsymbol{T}^{(1)}(M,P')]\, d\sigma(M). \end{cases}$$

Otteniamo, tenendo presenti le (6), le (7) e le (9):

$$(10) \qquad \begin{cases} 8\pi K(u(P) - U_0) = \\ = \int_C \{\boldsymbol{F}(M) \times [\boldsymbol{S}_1(M,P) - \boldsymbol{S}_1(M,P')]\}\, dc(M) + \\ + \int_\Sigma \{\boldsymbol{T}(M) \times [\boldsymbol{S}_1(M,P) - \boldsymbol{S}_1(M,P')]\}\, d\sigma(M) - \\ - \int_\Sigma \{[\boldsymbol{S}(M) - \boldsymbol{S}_0] \times [\boldsymbol{T}^{(1)}(M,P) - \boldsymbol{T}^{(1)}(M,P')]\}\, d\sigma(M). \end{cases}$$

Supporremo che P abbia coordinate $0, 0, \zeta > 0$ e P' $0, 0, -\zeta$ e che ζ sia abbastanza piccolo da risultare P interno a C e P' esterno.

(7) Cfr. O. D. Kellogg, *Foundations of potential theory* [Springer (Berlin) 1929] pp. 150 - 156.

Per dimostrare la (8_1) faremo vedere che ciascuno dei tre integrali al secondo membro della (10) ha per limite zero quando $\zeta \to 0$. Ciò è intanto evidente per il primo di essi dato che la funzione potenziale

$$\int_C [F(M) \times S_1(M, P)]\, dc(M)$$

è continua in tutto lo spazio.

Introduciamo il cerchio Γ_R e la funzione $z(x, y)$ già dianzi considerati e poniamo, dette x, y, z le coordinate di un punto M variabile su Σ

$$r = \overline{MP} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2} = \sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2}\,,$$

$$r' = M'P = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + \zeta)^2} = \sqrt{\rho^2 + (z + \zeta)^2}\,.$$

Sia poi H una costante positiva per la quale si abbia in Γ_R

$$|z(x, y)| < \rho^2 \quad , \quad |z_x(x, y)| < H\rho \quad , \quad |z_y(x, y)| < H\rho\,.$$

Poichè si ha, in E_R, $0 \leq \rho \leq R$, otteniamo:

$$|2 z \zeta| < 2 H \rho^2 \zeta \leq HR(\rho^2 + \zeta^2)\,;$$

$$z^2 < H^2 \rho^4 \leq H^2 R^2 \rho^2 < H^2 R^2 (\rho^2 + \zeta^2)\,.$$

Supponiamo di assumere R in modo tale sia $HR < 1$. Si ha:

$$\rho^2 + (z^2 - \zeta)^2 < \rho^2 + \zeta^2 + H^2 R^2 (\rho^2 + \zeta^2) + HR(\rho^2 + \zeta^2) =$$

$$= (1 + H^2 R^2 + HR)(\rho^2 + \zeta^2)\,;$$

$$\rho^2 + (z - \zeta)^2 > (1 - HR)(\rho^2 + \zeta^2)\,.$$

Detti allora p e q due numeri positivi, si ha in Γ_R:

$$p(\rho^2 + \zeta^2) < r^2 < q(\rho^2 + \zeta^2)\,,$$

e, analogamente:

$$p(\rho^2 + \zeta^2) < r'^2 < q(\rho^2 + \zeta^2)\,.$$

Avvertiamo che d'ora in avanti con H_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ indicheremo sempre una costante positiva avente volta a volta un conveniente valore.

Posto $T_0 = T(M_0)$, abbiamo

$$\left| \int_\Sigma \{ T(M) \times [S_1(M,P) - S_1(M,P')] \} \, d\sigma(M) \right| \leq$$

$$\leq \int_\Sigma | T(M) - T_0 | \, | S_1(M,P) - S_1(M,P') | \, d\sigma(M) +$$

$$+ \int_\Sigma |T| \, | S_1(M,P) - S_1(M,P') | \, d\sigma(M) .$$

Poichè risulta in Γ_R, com'è facile constatare:

$$| S_1(M,P) - S_1(M,P') | \leq \frac{H_0}{\rho}$$

ne viene

$$\lim_{\zeta \to 0+} \int_\Sigma |T_0| \, | S_1(M,P) - S_1\, M,P') | \, d\sigma(M) = 0 .$$

D'altra parte riesce in Γ_R

$$| S_1(M,P) - S_1(M,P') | \leq$$

$$\left| \frac{x^2}{r^3} - \frac{x^2}{r'^3} \right| + 3 \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| + \left| \frac{xy}{r^3} - \frac{xy}{r'^3} \right| + \left| \frac{(z+\zeta)x}{r} - \frac{(z-\zeta)x}{r'^3} \right| <$$

$$< 3 \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| + H_1 \left| \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right| + H_2 \zeta \left| \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right| <$$

$$< 3 \left| \frac{r'^2 - r^2}{(r'+r)\, rr'} \right| + H_1 \left| \frac{| r'^2 - r^2 | \, (r^2 + rr' + r'^2)}{(r'+r)\, r^3 r'^3} \right| +$$

$$+ H_2 \zeta \left| \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right| < H_0 \frac{\zeta}{(\rho^2 + \zeta^2)^{3/2}} .$$

Segue da ciò, per l'osservazione premessa,

$$\lim_{\zeta \to 0+} \int_\Sigma | T(M) - T_0 | \, | S_1(M,P) - S_1(M,P') | \, d\sigma(M) = 0 .$$

Veniamo adesso a dimostrare che

$$(11)\quad \lim_{\zeta \to 0+} \int_{\Sigma} \{[\mathcal{S}(M) - \mathcal{S}_0] \times [T^{(1)}(M,P) - T^{(1)}(M,P')]\} \, d\sigma(M) = 0.$$

Poniamo intanto

$$\varphi_K(r, r') = \frac{r^K - r'^K}{r - r'} .$$

È ovvio che riesce

$$\varphi_K(r, r') \leq H_K (\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{K-1}{2}} .$$

Si ha:

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \left| T^{(1)}(M,P) - T^{(1)}(M,P') \right| <$$

$$H_1 \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \left\{ \left| \frac{d}{dn} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 r'}{\partial x^2} \right) \right| + \left| \frac{d}{dn} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 r'}{\partial x \partial y} \right) \right| + \right.$$

$$+ \left| \frac{d}{dn} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 r'}{\partial x \partial z} \right) \right| + 8 \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r'} \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r'} \right| + \left| \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r'} \right| + \left. \left| \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \right| \right\} .$$

D'altronde abbiamo

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \left| \frac{d}{dn} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (r - r') \right| \leq \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \left\{ \left| \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{r'} \right) \right| + \left. \left| \frac{d}{dn} \left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{x^2}{r'^2} \right) \right| \right\} \leq \left| \frac{x z_x + y z_y - z + \zeta}{r^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{x z_x + y z_y - z - \zeta}{r'^3} \right| + \left| \left(\frac{2x}{r^3} - \frac{2x}{r'^3} \right) z_x \right| +$$

$$+ \left| 3x^2 \frac{x z_x + y z_y - z + \zeta}{r^5} - 3x^2 \frac{x z_x + y z_y - z - \zeta}{r'^5} \right| \leq$$

$$\leq \left| z - x z_x - y z_y \right| \frac{|r - r'| \, \varphi_2(r, r')}{r^5 r'^5} + \zeta \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) +$$

$$+ 2 \left| x z_x \right| \frac{|r - r'| \, \varphi_2(r, r')}{r^3 r'^3} + 3x^2 \left| z - x z_x - y z_y \right| \cdot$$

$$\cdot \frac{|r - r'| \, \varphi_4(r, r')}{r^5 r'^5} + 3x^2 \zeta \left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r'^5} \right) \leq H_2 \frac{\zeta}{(\rho^2 + \zeta^2)^{3/2}} ,$$

e in modo analogo

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\left|\frac{d}{dn}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(r-r')\right| < H_3\frac{\zeta}{(\rho^2+\zeta^2)^{3/2}},$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\left|\frac{d}{dn}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}(r-r')\right| < H_4\frac{\zeta}{(\rho^2+\zeta^2)^{3/2}},$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\left\{8\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)\right|\right\} < H_5\frac{\zeta}{(\rho^2+\zeta^2)^{3/2}}.$$

Ne segue

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\left|T^{(1)}(M,P)-T^{(1)}(M,P')\right| < H_0\frac{\zeta}{(\rho^2+\zeta^2)^{3/2}}$$

e quindi la (11). Resta così dimostrata la (8_1). Con eguale procedimento si dimostra che

$$\lim_{P\to M_0\ (\text{su } n)} v(P)=V_0, \qquad \lim_{P\to M_0\ (\text{su } n)} w(P)=W_0,$$

con che rimane provata la prima delle due relazioni (8).

Veniamo alla dimostrazione della seconda.

Riesce intanto

$$(12)\begin{cases} -8\pi T_x(0,0,\zeta)=\int_C\left\{F(M)\times\left[\frac{\partial S_1(M,P)}{\partial\zeta}+\right.\right.\\ \left.\left.+\frac{\partial S_3(M,P)}{\partial\xi}\right]\right\}dc(M)+\int_\Sigma\left\{T(M)\times\left[\frac{\partial S_1(M,P)}{\partial\zeta}+\right.\right.\\ \left.\left.+\frac{\partial S_3(M,P)}{\partial\xi}\right]\right\}d\sigma(M)-\int_\Sigma\left\{S(M)\times\left[\frac{\partial T^{(1)}(M,P)}{\partial\zeta}+\right.\right.\\ \left.\left.+\frac{\partial T^{(3)}(M,P)}{\partial\xi}\right]\right\}d\sigma(M).\\ 0=\int_C\left\{F(M)\times\left[\frac{\partial S_1(M,P')}{\partial\zeta}-\frac{\partial S_3(M,P')}{\partial\xi}\right]\right\}dc(M)+\\ \int_\Sigma\left\{T(M)\times\left[\frac{\partial S_1(M,P')}{\partial\zeta}-\frac{\partial S_3(M'P')}{\partial\xi}\right]\right\}d\sigma(M)-\\ -\int_\Sigma\left\{S(M)\times\left[\frac{\partial T^{(1)}(M,P')}{\partial\zeta}-\frac{\partial T^{(3)}(M,P')}{\partial\xi}\right]\right\}d\sigma(M). \end{cases}$$

Diciamo P_0, Q_0, R_0 le componenti del vettore $\boldsymbol{T}_0$ e indichiamo con $\boldsymbol{A}$ il vettore le cui componenti sono così definite

$$A_x = \frac{1}{K} P_0 z\,, \quad A_y = \frac{1}{K} Q_0 z\,, \quad A_z = \frac{1}{L+2K} R_0 z\,.$$

Sia $\boldsymbol{B} d\sigma$ la forza superficiale che per le (5) compete allo spostamento $\boldsymbol{A}$. Si ha allora per le componenti di $\boldsymbol{B}$

$$\begin{cases} -B_x = \dfrac{L}{L+2K} R_0 \cos(n, x) + P_0 \cos(n, z)\,, \\ -B_y = \dfrac{L}{L+2K} R_0 \cos(n, x) + Q_0 \cos(n, z)\,, \\ -B_z = R_0 \cos(n, z)\,. \end{cases}$$

Applicando la (12) otteniamo

$$(13) \begin{cases} 8\pi P_0 = \displaystyle\int_\Sigma \left\{ \boldsymbol{B} \times \left[\frac{\partial \boldsymbol{S}_1(M,P)}{\partial \zeta} + \frac{\partial \boldsymbol{S}_3(M,P)}{\partial \xi} \right] \right\} d\sigma(M) - \\ \qquad - \displaystyle\int_\Sigma \left\{ \boldsymbol{A} \times \left[\frac{\partial \boldsymbol{T}^{(1)}(M,P)}{\partial \zeta} + \frac{\partial \boldsymbol{T}^{(3)}(M,P)}{\partial \xi} \right] \right\} d\sigma(M)\,, \\ 0 = \displaystyle\int_\Sigma \left\{ \boldsymbol{B} \times \left[\frac{\partial \boldsymbol{S}_1(M,P')}{\partial \zeta} - \frac{\partial \boldsymbol{S}_3(M,P')}{\partial \xi} \right] \right\} d\sigma(M) - \\ \qquad - \displaystyle\int_\Sigma \left\{ \boldsymbol{A} \times \left[\frac{\partial \boldsymbol{T}^{(1)}(M,P)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \boldsymbol{T}^{(3)}(M,P')}{\partial \xi} \right] \right\} d\sigma(M)\,. \end{cases}$$

Si ha inoltre

$$(14) \quad \begin{aligned} 0 &= \int_\Sigma \left\{ \boldsymbol{S}_0 \times \left[\frac{\partial \boldsymbol{T}^{(1)}(M,P)}{\partial \zeta} + \frac{\partial \boldsymbol{T}^{(3)}(M,P)}{\partial \xi} \right] \right\} d\sigma(M) = \\ &= \int_\Sigma \left\{ \boldsymbol{S}_0 \times \left[\frac{\partial \boldsymbol{T}^{(1)}(M,P')}{\partial \zeta} - \frac{\partial \boldsymbol{T}^{(3)}(M,P')}{\partial \xi} \right] \right\} d\sigma(M)\,. \end{aligned}$$

Per le (12), (13), (14) possiamo scrivere

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&8\pi(P_0 - T_x) = \int_C \left\{ F \times \left[\frac{\partial S_1(M,P)}{d\zeta} + \frac{\partial S_3(M,P)}{\partial \xi} + \right.\right.\\
&+ \left.\left. \frac{\partial S_1(M,P')}{\partial \zeta} - \frac{\partial S_3(M,P')}{\partial \xi} \right] \right\} dc(M) + \int_\Sigma \left\{ (T + B) \times \right.\\
&\times \left[\frac{\partial S_1(M,P)}{\partial \zeta} + \frac{\partial S_3(M,P)}{\partial \xi} + \frac{\partial S_1(M,P')}{\partial \zeta} - \right.\\
&- \left.\left. \frac{\partial S_3(M,P')}{\partial \xi} \right] \right\} d\sigma(M) - \int_\Sigma \left\{ (S - S_0 + A) \times \left[\frac{\partial T^{(1)}(M,P)}{\partial \zeta} + \right.\right.\\
&+ \left.\left. \frac{\partial T^{(3)}(M,P)}{\partial \xi} + \frac{\partial T^{(1)}(M,P')}{\partial \zeta} - \frac{\partial T^{(3)}(M,P')}{\partial \xi} \right] \right\} d\sigma(M).
\end{aligned}
\right.
$$

Occorre dimostrare che

$$
(16)\qquad \lim_{\zeta \to 0+} 8\pi(P_0 - T_x) = 0 .
$$

L'annullarsi del primo integrale al secondo membro della (15), per $\zeta \to 0$, è una nota conseguenza dei risultati della teoria del potenziale di volume.

Per il secondo integrale si ha

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial S_1(M,P)}{\partial \zeta} + \frac{\partial S_3(M,P)}{\partial \xi} + \frac{\partial S_1(M,P')}{\partial \zeta} - \frac{\partial S_3(M,P')}{\partial \xi} \right| \le \\
&\le 2 \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (r^2 + r'^2) \right| + 2 \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (r + r') \right| + \\
&+ 2 \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (r + r') \right| + 2 \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \right| + \\
&+ 2 \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \right| < H_0 \frac{\zeta}{(\rho^2 + \zeta^2)^{3/2}} ,
\end{aligned}
$$

poichè $|T + B|$ è nullo in M_0, si ha, sempre in virtù dell'osservazione premessa, che anche il secondo integrale del secondo membro della (15) è infinitesimo con ζ.

Con analoghe considerazioni si constata, dato che $|\boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}_0 + \boldsymbol{A}|$ è nullo in M_0, che anche il terzo integrale tende a zero quando $\zeta \rightarrow 0$. È quindi vera la (16). Assieme ad essa si dimostrano similmente le due relazioni

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0+} T_y = Q_0 \quad , \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0+} T_x = R_0$$

e pertanto viene acquisita la seconda della (8).

Il teorema rimane così completamente dimostrato.

In virtù di esso possiamo affermare che *il sistema di equazioni integrali* (7) *costituisce una nuova e più campatta traduzione analitica delle condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio del solido elastico C,* condizioni che venivano altrimenti espresse dalle (1) e (2) oppure dalle (4) e (5).

Facciamo adesso vedere come il sistema (7) è equivalente ad un sistema di equazioni di Fischer-Riesz.

Detto P'_0 un punto esterno al dominio limitato da Σ_0 e $P'_1, P'_2, \ldots, P'_p$ punti interni ai dominî limitati rispettivamente da $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$, indichiamo con $\{\varphi_i\}$ la successione ottenuta prendendo assieme tutti gli elementi delle $3\,(p+1)$ successioni, ciascuna delle quali è costituita da tutte le derivate di $\boldsymbol{S}_h\,(M, P')$ $(h = 1, 2, 3)$, calcolate in P'_j $(j = 0, 1, \ldots, p)$, e con $\{\psi_i\}$ quella ottenuta in modo analogo con le derivate di $\boldsymbol{T}^{(h)}(M, P')$.

Data l'analiticità in ogni insieme esterno a C delle funzioni di P' che compaiono nel sistema (7), detto sistema è equivalente al seguente del tipo di Fischer-Riesz:

$$(17) \qquad \int_\Sigma (\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \times \varphi_i)\, d\sigma - \int_\Sigma (\underline{\underline{\boldsymbol{S}}} \times \psi_i)\, d\sigma + \int_C (\boldsymbol{F} \times \varphi_i)\, dc = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

la cui considerazione permette la effettiva risoluzione dei tre problemi fondamentali dell'elasticità.

Si ha infatti:

1.) *Problema degli spostamenti.*

È noto il vettore $\boldsymbol{S}$. Le (17) forniscono allora le coordinate di Fourier del vettore incognito T rispetto al sistema $\{\varphi_i\}$.

2.) *Problema delle forze superficiali.*

È noto il vettore $\boldsymbol{T}$. Le (17) dànno in tal caso le coordinate di Fourier del vettore incognito $\boldsymbol{S}$ rispetto al sistema $\{\psi_i\}$.

3.) *Problema misto.*

Su una parte Σ' di Σ è assegnato lo spostamento $\boldsymbol{S}'$, sulla restante parte Σ'' la forza superficiale $\boldsymbol{T}''$.

Poniamo

$$\omega_i \begin{cases} = \varphi_i , & \text{su } \Sigma', \\ = -\psi_i & \text{su } \Sigma'', \end{cases}$$

$$q_i = \int_{\Sigma'} (\boldsymbol{S}' \times \psi_i)\, d\sigma - \int_{\Sigma''} (\boldsymbol{T}'' \times \varphi_i)\, d\sigma - \int_C \boldsymbol{F} \times \varphi_i)\, d c\ .$$

Consideriamo il seguente sistema di Fischer - Riesz nel vettore incognito $\boldsymbol{R}$

$$\int_{\Sigma} (\boldsymbol{R} \times \omega_i)\, d\sigma = q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) .$$

Se $\boldsymbol{R}$ è soluzione di tale sistema poniamo

$$S \begin{cases} = \boldsymbol{S}' \text{ su } \Sigma', \\ = \boldsymbol{R} \text{ su } \Sigma'', \end{cases} \qquad\qquad T \begin{cases} = \boldsymbol{R} \text{ su } \Sigma' \\ = \boldsymbol{T} \text{ su } \Sigma''. \end{cases}$$

I vettori $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{T}$ così definiti verificano le (17) e quindi le (7). Pertanto, sostituiti nelle (6), si ha che il vettore da queste definito è soluzione del problema.