Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

B. Pini

Su certe questioni di periodicità e asintoticità per i sistemi lineari del primo ordine ai differenziali totali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 249-277

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__249_0>

SU CERTE QUESTIONI DI PERIODICITÀ E ASINTOTICITÀ PER I SISTEMI LINEARI DEL PRIMO ORDINE AI DIFFERENZIALI TOTALI

Memoria (*) *di* B. PINI (*a Bologna*).

Nel presente lavoro si prendono in considerazione sistemi completamente integrabili del tipo

$$dy = A(u, v)\, y\, du + B(u, v)\, y\, dv \tag{1}$$

(con A e B matrici-funzioni quadrate d'ordine n, y vettore-funzione incognita ad n componenti). Dapprima, nell'ipotesi di periodicità delle matrici A e B, si prova come facilmente si estenda la teoria di FLOQUET relativa a equazioni e sistemi ordinari a coefficienti periodici; indi, applicate ai coefficienti delle perturbazioni, si stabiliscono per queste delle condizioni sufficienti perchè esistano, per il sistema perturbato, integrali indipendenti asintotici a quelli di una *n-pla* fondamentale del sistema dato; ciò sarà fatto nel caso che il sistema non variato sia a coefficienti costanti ma si accennerà successivamente a quanto basta per accertare che tali risultati sono estendibili al caso che il sistema non perturbato sia a coefficienti periodici.

1. - Ricordiamo che se, su un insieme limitato misurabile $\mathcal{J}$ del piano u, v:

$A(u, v)$ e $B(u, v)$ sono matrici-funzioni limitate e misurabili;

(*) Pervenuta in Redazione il 10 ottobre 1950.

$A(u,v)$ per ogni valore di u è assolutamente continua rispetto a v;

$B(u,v)$ per ogni valore di v è assolutamente continua rispetto ad u;

le matrici $\dfrac{\partial A(u,v)}{\partial v}$, $\dfrac{\partial B(u,v)}{\partial u}$ sono sommabili su $\mathcal{J}$ e ivi verificano quasi dappertutto la condizione [di completa integrabilità di (1)]

$$\frac{\partial A}{\partial v} + A B = \frac{\partial B}{\partial u} + B A\,; \tag{2}$$

allora, intendendo per soluzione di (1) un vettore $\boldsymbol{y}$ assolutamente continuo in u e v verificante quasi-dappertutto la (1), sussiste un teorema di esistenza e di unicità e, detti $\boldsymbol{y}_i(u,v) \equiv (y_{1i}(u,v), \ldots, y_{ni}(u,v))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, n integrali linearmente indipendenti, posto $W(u,v) \equiv \| y_{hk}(u,v) \|$, l'integrale generale di (1) è dato da

$$\boldsymbol{y}(u,v) = W(u,v)\,\boldsymbol{c} \tag{3}$$

con $\boldsymbol{c}$ vettore costante arbitrario, ed è

$$det.\,W(u,v) = det.\,W(u_0,v_0) \cdot exp.\,(\gamma)\int_{(u_0,v_0)}^{(u,v)} \left[\sum_{1}^{n}{}_i\, a_{ii}(u,v)\,du + \right.$$
$$\left. + \sum_{1}^{n}{}_i\, b_{ii}(u,v)\,dv \right] \tag{4}$$

dove con γ s'intende un'arbitraria poligonale, coi lati paralleli agli assi, congiungente i due punti (u_0, v_0) e (u,v) di $\mathcal{J}$ (1).

(1) Cfr. p. es. B. Pini: *Sui sistemi di infinite equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali* [Gior. Mat. Battaglini (4) 78 (1948-49) pp. 151-167]; *Sui sistemi di equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali* [Boll. U. M. I. (3) V (1950) pp. 255-264].

2. - Il caso dei coefficienti periodici. - Supponiamo $A(u,v)$ e $B(u,v)$ periodiche in u e v di periodo ω (non è restrittivo che il periodo sia il medesimo in u e in v perchè a ciò ci si può sempre ricondurre con un cambiamento di variabili); diremo integrale *periodico di seconda specie* un integrale y di (1) al quale siano associabili due costanti ρ e σ tali che riesca

$$(5) \qquad y(u+\omega, v) = \rho\, y(u,v), \quad y(u, v+\omega) = \sigma\, y(u,v).$$

Si riconosce immediatamente che se $y_i(u,v)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, è una *n-pla* fondamentale di integrali di (1), tali sono anche le *n-ple* $y_i(u+\omega, v)$ e $y_i(u, v+\omega)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pertanto la addizione di ω a u, o a v, produce una sostituzione lineare, a modulo non nullo, sulla *n-pla* fondamentale di partenza. Sia

$$\begin{aligned} W(u+\omega, v) &= W(u,v)\, H \\ W(u, v+\omega) &= W(u,v)\, K \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} det.\, H \neq 0 \\ det.\, K \neq 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè

$$W(u,v)\, H K = W(u+\omega, v+\omega) = W(u,v)\, K H$$

segue che le matrici H e K sono permutabili. Questa semplice constazione permette di svolgere per i sistemi (1) una trattazione perfettamente simile a quella di FLOQUET [2]. Noi ci limiteremo ad accennare tale sviluppo in vista di successive applicazioni. Sia $y = W(u,v)\, \boldsymbol{c}$ un integrale periodico di seconda specie. Sarà

$$\begin{aligned} y(u+\omega, v) &= W(u,v)\, H \boldsymbol{c} = \rho\, W(u,v)\, \boldsymbol{c} \\ y(u, v+\omega) &= W(u,v)\, K \boldsymbol{c} = \sigma\, W(u,v)\, \boldsymbol{c}. \end{aligned}$$

[2] G. FLOQUET: *Sur les équations differentielles linéaires à coefficients périodiques*, [Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup. (2) XII (1883) pp. 47-89, in particolare pp. 52-60]. Cfr. G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale*, I (Bologna 1948) Cap. VI, in particolare pp. 317-330 e 360-362].

Ciò richiede l'esistenza di una coppia di numeri ρ e σ e di un vettore $\boldsymbol{c}$ per cui sia

$$(6) \qquad (H - \rho E)\,\boldsymbol{c} = 0, \quad (K - \sigma E)\,\boldsymbol{c} = 0 .$$

Nel caso più semplice che H e K abbiano i divisori elementari tutti lineari, esiste (3) una matrice invertibile $\mathcal{H}$ normalizzante contemporaneamente H e K, cioè tale che $\mathcal{H}^{-1} H \mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^{-1} K \mathcal{H}$ sono matrici diagonali; allora gli autovalori $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ (non necessariamente distinti) di H possono associarsi agli autovalori $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ di K (anch'essi non necessariamente distinti) in modo che, per ogni coppia, H e K abbiano un autovettore comune. Brevemente, posto

$$Z(u, v) = W(u, v)\,\mathcal{H}$$

si ha

$$Z(u + \omega, v) = Z(u, v)\,\mathcal{H}^{-1} H \mathcal{H}, \quad Z(u, v + \omega) = Z(u, v)\,\mathcal{H}^{-1} K \mathcal{H}$$

e quindi i vettori costituenti le colonne di $Z(u, v)$, $\boldsymbol{z}_h, h = 1, 2, \ldots, n$, sono altrettanti integrali periodici di seconda specie di (1):

$$\boldsymbol{z}_h(u + \omega, v) = \rho_h \boldsymbol{z}_h(u, v), \quad \boldsymbol{z}_h(u, v + \omega) = \sigma_h \boldsymbol{z}_h(u, v) \quad h = 1, 2, \ldots, n.$$

Posto

$$(7) \quad \begin{aligned} &\rho_h = |\rho_h|\, exp\,(i\,\theta_h), \quad \sigma_h = |\sigma_h|\, exp\,(i\,\pi_h) \quad -\pi < \theta_h, \pi_h \leq \pi \\ &m_h = lg\,\rho_h/\omega, \ n_h = lg\,\sigma_h/\omega\text{(4)}, \ \boldsymbol{g}_h(u, v) = exp(-m_h u - n_h v)\,\boldsymbol{z}_h(u, v), \end{aligned}$$

si riconosce che $\boldsymbol{g}_h(u, v)$ è periodico di periodo ω sia in u che in v, onde n integrali fondamentali di (1) saranno

$$(8) \quad \boldsymbol{z}_h(u, v) = exp\,(m_h u + n_h v)\,\boldsymbol{g}_h(u, v) \qquad h = 1, 2, \ldots, n.$$

Prima di procedere vogliamo osservare come gli autovalori di H e K, anzi i loro divisori elementari, siano indipendenti

(3) Cfr. la nota (9).

(4) S'intendono i logaritmi principali.

dalla scelta della n-*pla* fondamentale di integrali di (1); infatti, indicata con $y_i^*(u, v)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, una nuova n-*pla* fondamentale di integrali di (1) e con $W^*(u, v)$ la relativa matrice, sarà

$$W^*(u + \omega, v) = W^*(u, v) H^*, \quad W^*(u, v + \omega) = W^*(u, v) K^*,$$

$$H^* K^* = K^* H^*,$$

da cui segue, poichè $W^*(u, v) = W(u, v) M$, per una certa matrice invertibile M,

$$W^*(u + \omega, v) = W(u, v) H M, \quad W^*(u, v + \omega) = W(u, v) K M,$$

onde $$H^* = M^{-1} H M, \quad K^* = M^{-1} K M$$

e tanto basta per concludere quanto si è affermato.

Poniamoci ora nel caso generale che le matrici H e K non abbiano i divisori elementari tutti lineari. Siano $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$ gli autovalori distinti relativi alla matrice H; è noto che a ciascuno di essi, ρ_i, relativo ai divisori elementari

$$(\rho - \rho_i)^{e_0^{(i)}}, \ (\rho - \rho_i)^{e_1^{(i)}}, \ldots, \ (\rho - \rho_i)^{e_{n_i}^{(i)}}, \quad e_0^{(i)} \geq e_1^{(i)} \geq \ldots \geq e_{n_i}^{(i)}$$

restano associati gli autovalori $\bar{\sigma}_0^{(i)}, \bar{\sigma}_1^{(i)}, \ldots, \bar{\sigma}_{n_i}^{(i)}$ di K, non necessariamente distinti, multipli rispettivamente almeno degli ordini $e_0^{(i)}, e_1^{(i)}, \ldots, e_{n_i}^{(i)}$, in modo che alla coppia $\rho_i, \bar{\sigma}_h^{(i)}$, per tutti gli h per cui i $\bar{\sigma}_h^{(i)}$ sono distinti, corrisponde un solo autovettore $\alpha_h^{(i)}$ comune alle matrici H e K; se poi due o più delle $\bar{\sigma}_h^{(i)}$ coincidono, detto $\sigma^{(i)}$ il loro valore comune, alla coppia $\rho_i, \sigma^{(i)}$ corrisponde almeno un autovettore comune alle due matrici e al più un gruppo di tanti autovettori (comuni alle due matrici) linearmente indipendenti, quante sono le $\bar{\sigma}_h^{(i)}$ che coincidono (5).

(5) Cfr. l. c. in (1).

Nel seguito noi indicheremo con $\sigma_0^{(i)}, \sigma_1^{(i)}, \ldots, \sigma_{m_i}^{(i)}$ $(m_i \leq n_i)$ le $\bar{\sigma}_h^{(i)}$ stesse, con la seguente avvertenza:

Sia $\bar{\sigma}_0^{(i)}$ distinto dalle restanti $\bar{\sigma}_h^{(i)}$; allora sarà $\sigma_0^{(i)} = \bar{\sigma}_0^{(i)}$ con molteplicità $r_0^{(i)} = e_0^{(i)}$; sia $\bar{\sigma}_0^{(i)} = \bar{\sigma}_1^{(i)} = \ldots. = \bar{\sigma}_{p_i-1}^{(i)} = \sigma^{(i)}$, distinte dalle restanti; allora a ρ_i e $\sigma^{(i)}$ corrisponderanno $q_i (1 \leq q_i \leq p_i)$ autovettori linearmente indipendenti comuni ad H e K; indicheremo questo stesso autovalore $\sigma^{(i)}$ con $\sigma_0^{(i)}, \sigma_1^{(i)}, \ldots, \sigma_{q_i-1}^{(i)}$ attribuendo a ciascuno di questi ultimi certe molteplicità $r_0^{(i)}, r_1^{(i)}, \ldots, r_{q_i-1}^{(i)}$, ognuna delle quali sarà eguale a una delle $e_0^{(i)}, e_1^{(i)}, \ldots, e_{p_i-1}^{(i)}$ o alla somma di due o più di queste, con

$$\sum_{0}^{q_i-1}{}_m r_m^{(i)} = \sum_{0}^{p_i-1}{}_m e_m^{(i)},$$

ecc.

In conclusione le ρ e le σ possono associarsi nelle coppie

$$\rho_i, \sigma_i \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, \nu$$

risultando ρ_i e σ_i multiple d'ordine μ_i, rispettivamente per H e K, con $\sum_{1}^{\nu}{}_i \mu_i = n$; le ρ_i non essendo necessariamente distinte tra loro, le σ_i non essendo necessariamente distinte tra loro, e in modo che ad ogni coppia ρ_i, σ_i corrisponda un solo autovettore comune ad H e K, questi autovettori risultando linearmente indipendenti.

Allora, scegliendo come primo integrale di (1) la soluzione periodica di seconda specie $z_1(u, v)$ corrispondente a ρ_1 e σ_1, detta $W_1(u, v)$ la matrice di $z_1, y_2, \ldots, y_n$ (assumendo questa come nuova *n-pla* fondamentale, sottintendendo che in $z_1 = \sum_{1}^{n}{}_i c_i y_i$ sia $c_1 \neq 0$), sarà

$$W_1(u + \omega, v) = W_1(u, v) \cdot \begin{Vmatrix} \rho_1 & \cdot \\ O & H_1 \end{Vmatrix}, \; W_1(u, v + \omega) = W_1(u, v) \cdot \begin{Vmatrix} \sigma_1 & \cdot \\ O & K_1 \end{Vmatrix}$$

(dove i punti stanno ad indicare termini che non interessa esplicitare).

Le matrici $\begin{Vmatrix} \rho_1 & \cdot \\ O & H_1 \end{Vmatrix}$ e $\begin{Vmatrix} \sigma_1 & \cdot \\ O & K_1 \end{Vmatrix}$, che stanno al posto di H e K, sono anch'esse permutabili e hanno gli stessi autovalori e gli stessi divisori elementari di H e K, per quanto è stato osservato poco fa. Si riconosce che anche H_1 e K_1, sono permutabili e hanno gli stessi autovalori di H e K salvo che ρ_1 e σ_1 sono multipli per esse con ordine di molteplicità inferiore di una unità a quello che hanno relativamente ad H e K.

Supposto $\mu_1 > 1$, i sistemi

$$(H_1 - \rho_1 E)\, x = 0 \qquad (K_1 - \sigma_1 E)\, x = 0$$

hanno allora una soluzione comune, sia $x_2, \dots, x_n$; si riconosce che per l'intengrale $z_2(u, v) = \sum_{2}^{n}{}_k\, x_k\, y_k$ si ha

$$z_2(u + \omega, v) = \varepsilon_{21}\, z_1(u, v) + \rho_1\, z_2(u, v)\,,$$

$$z_2(u, v + \omega) = \eta_{21}\, z_1(u, v) + \sigma_1\, z_2(u, v)\,,$$

essendo ε_{21} ed η_{21} due certe costanti.

Così continuando si ottengono μ_1 integrali $z_1, z_2, \dots, z_{\mu_1}$ per cui è

$$(9) \qquad \begin{aligned} z_1(u + \omega, v) &= \rho_1\, z_1(u, v)\,, \qquad z_i(u + \omega, v) = \sum_{1}^{i-1}{}_j\, \varepsilon_{ij}\, z_j(u, v) + \rho_1 z_i \\ z_1(u, v + \omega) &= \sigma_1 z_1(u, v)\,, \qquad z_i(u, v + \omega) = \sum_{1}^{i-1}{}_j\, \eta_{ij}\, z_j(u, v) + \sigma_1 z_i \\ & \qquad\qquad i = 1, 2, \dots, \mu_1\,, \end{aligned}$$

e così si procede per le coppie $\rho_2, \sigma_2; \dots; \rho_\nu, \sigma_\nu$. Si vengono in tal modo ad individuare n integrali linearmente indipendenti di (1), suddivisi in ν gruppi; per gli integrali del primo gruppo valgono le relazioni (9), per gl'integrali dei successivi gruppi valgono relazioni analoghe.

3. - Osservazione sulla simultanea riduzione a forma canonica di due matrici permutabili. - Prima di precisare la natura analitica degli integrali or ora indicati, il che faremo al n. **5·**, facciamo le seguenti osservazioni. È noto (6) che se due matrici A e B sono permutabili, detta $\mathcal{H}$ la matrice normalizzante A, tale cioè che $\mathcal{H}^{-1} A \mathcal{H} = \mathcal{A}$ sia la forma canonica di Jordan di A, allora B è nel tipo $\mathcal{H} \mathcal{B} \mathcal{H}^{-1}$, dove

$$\mathcal{A} = \left\| \begin{matrix} \mathcal{A}_1 & & & \\ & \mathcal{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{A}_m \end{matrix} \right\| \qquad \mathcal{B} = \left\| \begin{matrix} \mathcal{B}_1 & & & \\ & \mathcal{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{B}_m \end{matrix} \right\|$$

e

$$\mathcal{A}_i = \left\| \begin{matrix} \rho_i E_{i_1} + U_{i_1} & & & \\ & \rho_i E_{i_1} + U_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \rho_i E_{i_{p_i}} + U_{i_{p_i}} \end{matrix} \right\| \mathcal{B}_i = \left\| \begin{matrix} \mathcal{B}_{11}^{(i)} \dots \mathcal{B}_{1p_i}^{(i)} \\ \dots\dots\dots \\ \mathcal{B}_{p_i 1}^{(i)} \dots \mathcal{B}_{p_i p_i}^{(i)} \end{matrix} \right\|$$

indicando con E_{i_k} la matrice unità d'ordine i_k, con U_{i_k} la matrice quadrata d'ordine i_k per cui è $u_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{per } j \neq i+1 \\ 1 & \text{»} \ j = i+1 \end{cases}$, essendo $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_{p_i}$, con $\mathcal{B}_{hk}^{(i)}$ una matrice con i_h righe e i_k colonne nella quale sono tra loro eguali i termini per cui è costante la differenza tra gl'indici e in particolare sono tutti nulli quelli per cui il primo indice è maggiore del secondo se $h \leq k$ e tutti quelli per cui la differenza tra il secondo e il primo indice è inferiore a $i_k - i_h$ se $h > k$.

Noi vogliamo qui mostrare come, sfruttando l'estensione di una certa osservazione (7), sia possibile realizzare, per mezzo di una sostituzione lineare (a modulo non nullo), la simultanea riduzione a una certa forma canonica di due matrici permutabili.

(6) Cfr. p. es. J. H. M. Wedderburn: *Lectures on Matrices* [Am. Math. Soc. Colloquium publications, vol. XVII, 1934, pp. 102 e segg.].
(7) Cfr. G. Floquet, l. c. in (2) pp. 66-68.

Si è già visto che se $W(u, v)$ è la matrice di n integrali indipendenti di (1) si ha

$$W(u+\omega, v) = W(u, v)\, H\,, \qquad W(u, v+\omega) = W(u, v)\, K$$

con H e K invertibili e permutabili. Reciprocamente, essendo H e K due matrici invertibili e permutabili qualsiasi e $W(u,v)$ una matrice-funzione sempre invertibile per cui valgano le relazioni precedenti ([8]) e per la quale si facciano opportune ipotesi di derivabilità, posto

$$A(u, v) = \frac{\partial W(u, v)}{\partial u} W^{-1}(u, v)\,, \quad B(u, v) = \frac{\partial W(u, v)}{\partial v} W^{-1}(u, v)\,,$$

si riconosce che $A(u, v)$ e $B(u, v)$ sono periodiche di periodo ω in u e in v e, di più, $\dfrac{\partial A(u, v)}{\partial v} + A(u,v)\, B(u,v) = \dfrac{\partial B(u,v)}{\partial u} +$ $+ B(u, v)\, A(u, v)$; dunque i vettori costituenti le colonne di $W(u, v)$ sono n integrali linearmente indipendenti del sistema lineare ai differenziali totali completamente integrabile e a coefficienti periodici $dy = A(u, v)\, y\, du + B(u, v)\, y\, dv$.

Ciò porta che le matrici H e K, precedentemente incontrate, a parte la loro permutabilità, possono essere qualsiasi. Da ciò, incidentalmente, possiamo dedurre un'osservazione circa la riduzione a forma canonica di due matrici permutabili.

Indicata con $Z(u, v)$ la matrice degl'integrali $z_1, z_2, \ldots, z_n$, precedentemente individuati in **2.**, si ha

$$Z(u+\omega, v) = Z(u, v)\, \mathfrak{M}\,, \quad Z(u, v+\omega) = Z(u, v)\, \mathfrak{N}$$

([8]) L'esistenza di una siffatta matrice $W(u, v)$ è sempre assicurata. Infatti, essendo H e K due matrici quadrate invertibili, allora, com'è ben noto, si possono trovare due matrici quadrate M ed N tali che $e^M = H$, $e^N = K$; queste matrici riescono inoltre permutabili se tali sono H e K. Tenendo quindi presente che, se M ed N sono due matrici (quadrate) permutabili, si ha $e^{M+N} = e^M \cdot e^N = e^N \cdot e^M$, si conclude che basterà allora porre $W(u, v) = e^{\frac{u}{\omega}M + \frac{v}{\omega}N}$.

con

$$(10)\qquad \mathfrak{M} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{M}_1 & & & \\ & \mathfrak{M}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathfrak{M}_\nu \end{Vmatrix} \qquad \mathfrak{N} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{N}_1 & & & \\ & \mathfrak{N}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathfrak{N}_\nu \end{Vmatrix}$$

e

$$(11)\qquad \mathfrak{M}_i = \begin{Vmatrix} \rho_i \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 \ \rho_i \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 \ 0 \ldots \rho_i \end{Vmatrix} \qquad \mathfrak{N}_i = \begin{Vmatrix} \sigma_i \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 \ \sigma_i \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 \ 0 \ldots \sigma_i \end{Vmatrix} \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu,$$

queste ultime entrambe d'ordine μ_i, dove i punti stanno ad indicare termini che non interessa esplicitare; beninteso, tali che $\mathfrak{M}_i$ ed $\mathfrak{N}_i$ siano permutabili.

Si ha pertanto la seguente proposizione:

Se H e K sono due matrici quadrate d'ordine n, invertibili e permutabili, con una stessa sostituzione lineare $\mathfrak{H}$, a modulo non nullo, esse possono ricondursi alla seguente forma, che diremo ancora canonica:

detti $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$ gli autovalori (non necessariamente distinti) di **H** *e K, multipli rispettivamente degli ordini $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$, da intendere nel senso specificato in* **2.**, *si ha*

$$\mathfrak{H}^{-1} H \mathfrak{H} = \begin{Vmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_\nu \end{Vmatrix} \qquad \mathfrak{H}^{-1} K \mathfrak{H} = \begin{Vmatrix} K_1 & & & \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_\nu \end{Vmatrix}$$

con H_i e K_i matrici permutabili d'ordine μ_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ *del tipo* (11) ([9]).

([9]) Daremo di ciò una dimostrazione diretta in altro luogo. Qui vogliamo solo osservare come le matrici permutabili A e B possano essere diagonalizzate con una stessa sostituzione lineare se tutti i loro divisori elementari sono lineari. In questo caso è infatti, per $i = 1, 2, \ldots m$, $\mathfrak{A}_i = \rho_i E_{i_1+i_2+\ldots+i_{p_i}}$,

4. - Comportamento asintotico degli integrali di un sistema perturbato, per variazioni nei coefficienti, di un sistema a coefficienti costanti. Consideriamo il sistema

$$dy = A\,y\,du + B\,y\,dv \tag{12}$$

nell'ipotesi che A e B siano due matrici quadrate d'ordine n, costanti, tali che $AB = BA$ (condizione di completa integrabilità). A fianco di questo consideriamo il sistema perturbato

$$dy = [A + \Phi(u, v)]\,y\,du + [B + \Psi(u, v)]\,y\,dv \tag{13}$$

sul quale facciamo, per ora, le seguenti ipotesi:

le Φ e Ψ sono matrici-funzioni limitate e misurabili su ogni insieme limitato e misurabile della regione $u \geq 0$, $v \geq 0$, la prima assolutamente continua rispetto a v per ogni $u \geq 0$, la seconda assolutamente continua rispetto ad u per ogni $v \geq 0$; le derivate $\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}$, $\dfrac{\partial \Psi}{\partial u}$, che esistono quasi-dappertutto, sono sommabili su ogni insieme limitato e misurabile della regione $u \geq 0$, $v \geq 0$, e sono legate dalla relazione (di completa integrabilità)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \Phi B + A \Psi + \Phi \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial u} + \Psi A + B \Phi + \Psi \Phi . \tag{14}$$

mentre $\mathcal{B}_i$ può essere diagonalizzata con una sostituzione $\mathcal{L}_i$, cioè $\mathcal{L}_i^{-1}\,\mathcal{B}_i\,\mathcal{L}_i = \mathcal{D}_i$ ($\mathcal{D}_i$ matrice diagonale). Segue che

$$\left\| \begin{matrix} \mathcal{L}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{L}_m^{-1} \end{matrix} \right\| \mathcal{A} \left\| \begin{matrix} \mathcal{L}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{L}_m \end{matrix} \right\| = \mathcal{A}\,.\, \left\| \begin{matrix} \mathcal{L}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{L}_m^{-1} \end{matrix} \right\| \mathcal{B} \left\| \begin{matrix} \mathcal{L}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{L}_m \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathcal{D}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{D}_m \end{matrix} \right\| = \mathcal{D}$$

essendo $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}$ diagonali.

Mantenendo le stesse notazioni del n. **3.**, salvo lo scambio di H con A e di K con B, [10] sarà

$$\mathcal{A} = \mathfrak{K}^{-1} A\, \mathfrak{K} = \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_1 & & & \\ & \mathcal{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{A}_\nu \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{B} = \mathfrak{K}^{-1} B\, \mathfrak{K} = \begin{Vmatrix} \mathcal{B}_1 & & & \\ & \mathcal{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{B}_\nu \end{Vmatrix}$$

con

$$\mathcal{A}_i = \begin{Vmatrix} \rho_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \rho_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & & & \rho_i \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{B}_i = \begin{Vmatrix} \sigma_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \sigma_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & & & \sigma_i \end{Vmatrix} \quad \text{d'ordine } \mu_i, \ \sum_1^\nu{}_i\, \mu_i = n, \quad \mathcal{A}_i \mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i \mathcal{A}_i .$$

Posto $y = \mathfrak{K} z$, si ha da (13)

$$(13') \qquad dz = (\mathcal{A} + \mathfrak{K}^{-1} \Phi\, \mathfrak{K})\, z\, du + (\mathcal{B} + \mathfrak{K}^{-1} \Psi\, \mathfrak{K})\, z\, dv .$$

Per semplicità noi ammetteremo in tutto il seguito che il sistema (13) sia già normalizzato nella forma (13′) e ci riferiremo ad esso anzichè a quest' ultimo.

Indicati con $y^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, \nu$, il vettore che ha eguali a zero le prime $\mu_1 + \mu_2 + \dots \mu_{i-1}$ e le ultime $\mu_{i+1} + \dots + \mu_\nu$ componenti, e le restanti coincidenti con quelle di y, il sistema (12) si spezza nei ν sistemi

$$(15) \qquad d\, y^{(i)} = \mathcal{A}_i\, y^{(i)}\, du + \mathcal{B}_i\, y^{(i)}\, dv \qquad i = 1, 2, \dots, \nu .$$

Indichiamo con $W_i(u, v)$, $i = 1, 2, \dots, \nu$, la matrice che ha

[10] Nella proposizione provata al n. **3.** le matrici H e K erano supposte invertibili. Non v' è però restrizione nel supporre attualmente che le matrici A e B di (12) siano invertibili perchè a ciò ci si può sempre ricondurre con una sostituzione del tipo $y = exp(\overline{\rho}\, u + \overline{\sigma}\, v)\, z$ con due opportune costanti $\overline{\rho}$ e $\overline{\sigma}$.

per colonne le componenti di μ_i integrali linearmente indipendenti di (15). Posto $y^{(i)} = exp\,(\rho_i u + \sigma_i v)\, z^{(i)}$ si ha

$$(15') \qquad dz^{(i)} = (\mathcal{A}_i - \rho_i E)\, z^{(i)}\, du + (\mathcal{B}_i - \sigma_i E)\, z^{(i)}\, dv$$

che si integra per successive quadrature. Pertanto W_i si può pensare del seguente tipo

$$(16) \quad W_i = exp\,(\rho_i u + \sigma_i v) \begin{Vmatrix} 1 & p_1^{(1)}(u,v) & p_2^{(1)}(u,v) \ldots\ldots & p_{\mu_i-1}^{(1)}(u,v) \\ 0 & 1 & p_1^{(2)}(u,v) \ldots\ldots & p_{\mu_i-2}^{(2)}(u,v) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \quad \ldots\ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

dove i $p_h(u,v)$ stanno ad indicare polinomi in u e v di grado (reale o apparente) h.

La matrice di n integrali fondamentali di (12) si potrà perciò ritenere del tipo

$$(17) \qquad W = \begin{Vmatrix} W_1 & & & \\ & W_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & W_\nu \end{Vmatrix}$$

e quindi

$$(18) \qquad W^{-1} = \begin{Vmatrix} W_1^{-1} & & & \\ & W_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & W_\nu^{-1} \end{Vmatrix}$$

con

$$(19) \quad W_i^{-1} = exp\,(-\rho_i u - \sigma_i v) \begin{Vmatrix} 1 & q_1^{(1)}(u,v) & q_2^{(1)}(u,v) \ldots & q_{\mu_i-1}^{(1)}(u,v) \\ 0 & 1 & q_1^{(2)}(u,v) \ldots & q_{\mu_i-2}^{(2)}(u,v) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \quad \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

dove i $q_h(u,v)$ stanno ad indicare polinomi in u e v di grado (reale o apparente) h.

Ciò premesso, passiamo a provare il seguente teorema:

Se, oltre alle già specificate ipotesi di completa integrabilità del sistema (18) (*e* 12)), *si ammette l'esistenza di due* n^2-*ple di funzioni non negative* $\varphi^*_{s,t}(u)$ *e* $\psi^*_{s,t}(v)$ $(s, t = 1, 2, \dots, n)$, *ciascuna delle quali sia sommabile su* $(0, +\infty)$, *tali che, posto* $\delta(u, v) = (u^2 + v^2)^{1/2}$, *sia, a meno dei punti* v *di un insieme di misura nulla*,

$$\delta^{\mu_r - 1}(u, v) \, | \varphi_{s,t}(u, v) | < \varphi^*_{s,t}(u) \,, \tag{20}$$

e, a meno dei punti u *di un insieme di misura nulla*,

$$\delta^{\mu_r - 1}(u, v) \, | \psi_{s,t}(u, v) | < \psi^*_{s,t}(v) \,, \tag{20'}$$

per $t = 1, 2, \dots, n$; $\mu_1 + \dots + \mu_{r-1} + 1 \leq s \leq \mu_1 + \dots + \mu_r$; $r = 1, 2, \dots, \nu$; *allora ad ogni integrale*

$$exp\,(\rho_i u + \sigma_i v)\, \boldsymbol{p}_j(u, v)$$

di (12) [*ove* $\boldsymbol{p}_j(u, v)$ *indica un vettore le cui componenti sono polinomi di grado al più* $j - 1$ *in* u *e* v], *si può associare un integrale di* (13) *del tipo*

$$exp\,(\rho_i u + \sigma_i v)\, [\boldsymbol{p}_j(u, v) + \delta^{j-1}(u, v)\, \boldsymbol{o}_j(u, v)]$$

ove $\boldsymbol{o}_j(u, v)$ *indica una serie di vettori totalmente convergente in ogni dominio contenuto nella regione* $u \geq U$, $v \geq V$, *con* U *e* V *sufficientemente grandi, e convergente a zero per* $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ (11).

(11) Questa proposizione, nel caso di un sistema ordinario $\boldsymbol{y}' = [A + \Phi(x)]\boldsymbol{y}$, migliora leggermente un risultato di S. Faedo: *Proprietà asintotiche delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari omogenei* [Annali di Mat. pura e applicata (4) XXVI (1947) pp. 207-215], al quale è legato questo n. 4. Si può osservare che la preventiva riduzione a forma canonica della matrice A permetterebbe di trattare la cosa più rapidamente e di conseguire spontaneamente una condizione meno restrittiva di quella indicata nel citato lavoro. Cfr. anche O. Dunkel in: *Regular singular points of a systems of*

Poichè si ha identicamente

$$d\,W = A\,W\,du + B\,W\,dv\,,$$

se si pone in (13) $y = Wz$ si ottiene

(21) $$dz = W^{-1}\,\Phi\,W z\,du + W^{-1}\,\Psi\,W z\,dv\,.$$

Il sistema (21) è anch'esso completamente integrale essendo

$$\frac{\partial\,W^{-1}\,\Phi\,Wz}{\partial v} = W^{-1}\left(-B\,\Phi + \frac{\partial\,\Phi}{\partial v} + \Phi\,B + \Phi\,\Psi\right) Wz\,,$$

$$\frac{\partial W^{-1}\,\Psi\,Wz}{\partial u} = W^{-1}\left(-A\,\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial u} + \Psi\,A + \Psi\Phi\right) Wz\,,$$

e tenendo presente la (14). Segue

$$z = c + (\gamma)\int^{(u,v)} [W^{-1}\,\Phi\,Wz\,du + W^{-1}\,\Psi\,W z\,dv]$$

con c vettore costante, ove gl' integrali curvilinei si possono scegliere in modo opportuno, uno per ogni componente di z; quindi

(22) $$y = Wc + W \cdot (\gamma)\int^{(u,v)} [\,W^{-1}\,\Phi\,y\,du + W^{-1}\,\Psi\,y\,dv]\,.$$

homogeneous linear differential equations of the first order [Proceedings of the Am. Acad. of Arts and Sciences, XXXVIII (1902-1903) pp. 341-370].

Per la bibliografia ci limitiamo a citare ancora, come quello più affine alla questione che ci interessa, il recente lavoro: *The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations* di N. LEVINSON, in Duke Math. J. 15 (1948) pp. 111-126, specificatamente pei suoi teoremi II e III.

Tradotta così la (13) in equazione integrale, applichiamo un procedimento di approssimazioni successive, ponendo

$$(23)\quad y^{(0)} = We\,, \qquad y^{(m)} = We + W\cdot(\gamma)\int^{(u,v)}[W^{-1}\Phi\, y^{(m-1)}du +$$

$$+ W^{-1}\Psi\, y^{(m-1)}dv]\,, \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

e poi

$$(24)\quad \Delta y^{(0)} = y^{(0)}\,, \qquad \Delta y^{(m)} = W\cdot(\gamma)\int^{(u,v)}[W^{-1}\Phi\,\Delta y^{(m-1)}du +$$

$$+ W^{-1}\Psi\,\Delta y^{(m-1)}dv] \qquad m = 1, 2, \ldots\ldots.$$

Per comodità di notazioni poniamo

$$\tau_i = \mu_1 + \ldots. + \mu_{i-1}\,; \quad i = 1, 2, \ldots, \nu\,; \quad \mu_0 = 0\,;$$

indichiamo con

$$y_{\tau_i+j}\,(= exp(\rho_i u + \sigma_i v)\, p_{h,\tau_i+j}(u,v)\,,\ h = 1, 2, \ldots, n)\ j = 1, 2, \ldots, \mu_i$$

gl'integrali di (15), colonne di W_i, onde p_{h,τ_i+j}, per ogni valore di h, indicherà polinomi di grado non superiore a $j-1$; dalle (18) e (19) segue

$$W^{-1}_{\tau_r+k,s} = exp\,(-\rho_r u - \sigma_r v)\, q_{s,\tau_r+k}(u,v)$$

$$k = 1, 2, \ldots, \mu_r\,; \ s = 1, 2, \ldots, n\,; \ r = 1, 2, \ldots, \nu$$

dove i $q_{s,\tau_r+k}(u,v)$ indicano, per ogni valore di s, polinomi di grado al più $\mu_r - k$, e sono tutti nulli per $s \leq \tau_r$ ed $s > \tau_{r+1}$.

Se poniamo $y^{(0)} = y_{\tau_i+j}$, il che equivale a prendere per c il vettore di componenti $c_h = \begin{cases} 1 \text{ per } h = \tau_i + j \\ 0 \ \text{»}\ h \neq \tau_i + j \end{cases}$, si ha

$$\Delta y^{(1)}_{h,\tau_i+j} = exp\,(\rho_i u + \sigma_i v)\,\delta^{j-1}(u,v) \sum_{1}^{\nu}{}_r \sum_{1}^{\mu_r}{}_k exp\,[(\rho_r - \rho_i)\,u +$$

$$+ (\sigma_r - \sigma_i)\,v]\,\delta^{1-j}(u,v)\,p_{h,\tau_r+k}(u,v)\,.$$

$$\cdot\,(\gamma_{r,k}) \int^{(u,v)}\!\!\Big\{ \sum_{\tau_r+1}^{\tau_{r+1}} \sum_{1}^{n}{}_t\, exp\,[(\rho_i - \rho_r)\,\xi +$$

(25)

$$+ (\sigma_i - \sigma_r)\,\eta]\,\varphi_{s,t}(\xi,\eta)\,q_{s,\tau_r+k}(\xi,\eta)\,p_{t,\tau_i+j}(\xi,\eta)\,d\xi +$$

$$+ \sum_{\tau_r+1}^{\tau_r+1}{}_s \sum_{1}^{n}{}_t\, exp\,[(\rho_i - \rho_r)\,\xi +$$

$$+ (\sigma_i - \sigma_r)\eta]\,\psi_{s,t}(\xi,\eta)\,q_{s,\tau_r+k}(\xi,\eta)\,p_{t,\tau_i+j}(\xi,\eta)\,d\eta\Big\}\,, h = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Sia (U, V) un punto della regione $u \geq 0, v \geq 0$; scegliamo, come curve γ d'integrazione, delle poligonali di uno dei seguenti tipi, specificandone in seguito la scelta:

a) $\quad + \gamma \equiv (U \leq \xi \leq u\,,\ \eta = V : \xi = u\,,\ V \leq \eta \leq v)$

b) $\quad - \gamma \equiv \begin{cases} (u = \xi\,, v \leq \eta \leq u\,;\ \ u \leq \xi = \eta) & \text{per } u > v \\ (u \leq \xi \leq v\,, \eta = v\,;\ \ v \leq \xi = \eta) & \text{»}\ \ v > u \end{cases}$ b')

c) $\quad - \gamma \equiv \begin{cases} (u \geq \xi \geq U\,, v = \eta\,;\ \ u = U\,, v \leq \eta) \\ (u = \xi\,, v \geq \eta \geq V\,;\ \ \xi \geq u\,, \eta = V)\,. \end{cases}$ c')

È chiaro che si potrà trovare una coppia di costanti positive C_1 e C_2 in modo che sia

$$|\,p_{h,\tau_r+k}(u,v)\,| \leq C_1\,\delta^{k-1}(u,v)$$

$$h = 1, 2, \ldots, n\,;\ r = 1, 2, \ldots, \nu\,;\ k = 1, 2, \ldots, \mu_r$$

(26)

$$|\,p_{t,\tau_i+j}(u,v)\,q_{s,\tau_r+k}(u,v)\,| \leq C_2\,\delta^{\mu_r+j-k-1}(u,v)$$

$$t = 1, 2, \ldots, n\,;\ r = 1, 2, \ldots, \nu\,;\ \tau_r < s \leq \tau_{r+1}\,;\ k = 1, 2, \ldots, \mu_r\,.$$

Allora

$$|\Delta y^{(1)}_{h,\tau_i+j}| \leq exp[R(\rho_i)u +$$

$$+ R(\sigma_i)v]\,\delta^{j-1}(u,v)C_1\,C_2\sum_{1}^{\nu}{}_r\sum_{1}^{\mu_r}{}_k exp[R(\rho_r - \rho_i)u +$$

$$(27)\quad + R(\sigma_r - \sigma_i)v]\,\delta^{k-j}(u,v)\cdot(\gamma_{r,k})\int^{(u,v)}\sum_{\tau_r+1}^{\tau_r+1}{}_s exp[R(\rho_i - \rho_r)\xi +$$

$$+ R(\sigma_i - \sigma_r)\eta]\,\delta^{\mu_r+j-k-1}(\xi,\eta)\left(\sum_{1}^{n}{}_t|\varphi_{s,t}(\xi,\eta)|\,d\xi +\right.$$

$$\left.+\sum_{1}^{n}{}_t|\psi_{s,t}(\xi,\eta)|\,d\eta\right),\qquad h = 1, 2, \ldots, n$$

dove, come di consueto, con $R(\alpha)$ s'intende la parte reale di α.

Limitiamoci ad esaminare l'espressione sotto la prima doppia sommatoria.

I. - Se $R(\rho_i - \rho_r) > 0$, $R(\sigma_i - \sigma_r) > 0$, scegliamo per $\gamma_{r,k}$, qualunque sia k, la poligonale a); l'espressione anzidetta riesce allora maggiorata da

$$exp[R(\rho_r - \rho_i)u + R(\sigma_r - \sigma_i)v]\,\delta^{k-j}(u,v)\sum_{\tau_r+1}^{\tau_r+1}{}_s\left\{\int_U^u exp[R(\rho_i - \rho_r)\xi +\right.$$

$$+ R(\sigma_i - \sigma_r)V]\,\delta^{\mu_r+j-k-1}(\xi,V)\sum_{1}^{n}{}_t|\varphi_{s,t}(\xi,V)|\,d\xi +$$

$$\left.+\int_V^v exp[R(\rho_i - \rho_r)u + R(\sigma_i - \sigma_r)\eta]\,\delta^{\mu_r+j-k-1}(u,\eta)\sum_{1}^{n}{}_t|\psi_{s,t}(u,\eta)|\,d\eta\right\};$$

ma il prodotto dell' esponenziale per una potenza di $\delta(\xi, V)$ o $\delta(u, \eta)$ cresce al crescere delle variabili, almeno per U e V abbastanza grandi, onde la precedente espressione è maggiorata da

$$\sum_{s=\tau_r+1}^{\tau_{r+1}} \frac{1}{\delta(u,v)} \left\{ \int_U^u \delta^{\mu_r}(\xi, V) \sum_1^n{}_t \, |\varphi_{s,t}(\xi, V)| \, d\xi \, + \right.$$

(28₁)

$$\left. + \int_V^v \delta^{\mu_r}(u, \eta) \sum_1^n{}_t \, |\psi_{s,t}(u, \eta)| \, d\eta \right\}.$$

II. - Se $R(\rho_i - \rho_r) < 0$, $R(\sigma_i - \sigma_r) < 0$, scegliamo per $\gamma_{r,i}$, per tutti i valori di k, la poligonale $b)$ se $v < u$, la $b')$ se $u < v$; per es. nel primo caso la precedente espressione viene maggiorata da

$$exp[R(\rho_r - \rho_i) u + R(\sigma_r - \sigma_i) v] \, \delta^{k-l}(u, v) \sum_{s=\tau_r+1}^{\tau_{r+1}} \left\{ \int_v^u exp[R(\rho_i - \rho_r) u + \right.$$

$$+ R(\sigma_i - \sigma_r) \eta] \, \delta^{\mu_r+l-k-1}(u, \eta) \sum_1^n{}_t \, |\varphi_{s,t}(u, \eta)| \, d\eta \, +$$

$$+ \int_u^{+\infty} exp[R(\sigma_i - \sigma_r) \xi + R(\rho_i - \rho_r) \xi] \, \delta^{\mu_r+l-k-1}(\xi, \xi) \sum_1^n{}_t \, (|\varphi_{s,t}(\xi, \xi)| \, +$$

$$\left. + |\psi_{s,t}(\xi, \xi)| \,) \, d\xi \right\}.$$

L' esponenziale per una potenza di $\delta(u, \eta)$ o di $\delta(\xi, \xi)$ decresce (almeno per u e v abbastanza grandi) al crescere di ξ onde la precedente espressione è maggiorata da

$$
(28_2)\qquad \sum_{\tau_r+1}^{\tau_{r+1}}{}_s \left\{ \frac{1}{\delta(u,v)} \int_v^u \delta^{\mu_r}(u,\eta) \sum_1^n{}_t \,|\varphi_{s,t}(u,\eta)|\, d\eta + \right.
$$

$$
\left. + \int_u^{+\infty} \delta^{\mu_r-1}(\xi,\xi) \sum_1^n{}_t \,(|\varphi_{s,t}(\xi,\xi)| + |\psi_{s,t}(\xi,\xi)|)\, d\xi \right\} .
$$

III. - Se $R(\rho_i - \rho_r) > 0$, $R(\sigma_i - \sigma_r) < 0$, scegliamo per $\gamma_{r,k}$, per tutti i valori di k, la poligonale c) [se fosse $R(\rho_i - \rho_r) < 0$, $R(\sigma_i - \sigma_r) > 0$ si sceglierebbe la c')]; la solita espressione è maggiorata da

$$
exp[R(\rho_r - \rho_i)u + R(\sigma_r - \sigma_i)v]\,\delta^{k-j}(u,v) \sum_{\tau_r+1}^{\tau_{r+1}}{}_s \left\{ \int_v^u exp[R(\rho_i - \rho_r)\xi + \right.
$$

$$
+ R(\sigma_i - \sigma_r)v]\,\delta^{\mu_r+j-k-1}(\xi,v) \sum_1^n{}_t \,|\varphi_{s,t}(\xi,v)|\, d\xi + \int_v^{+\infty} exp[R(\rho_i - \rho_r)U +
$$

$$
\left. + R(\sigma_i - \sigma_r)\eta]\,\delta^{\mu_r+j-k-1}(U,\eta) \sum_1^n{}_t \,|\psi_{s,t}(U,\eta)|\, d\eta \right\},
$$

che, per ragioni analoghe alle precedenti, è maggiorata da

$$
(28_3)\qquad \sum_{\tau_r+1}^{\tau_{r+1}}{}_s \left\{ \frac{1}{\delta(u,v)} \int_U^u \delta^{\mu_r}(\xi,v) \sum_1^n{}_t \,|\varphi_{s,t}(\xi,v)|\, d\xi + \right.
$$

$$
\left. + \int_v^{+\infty} \delta^{\mu_r-1}(U,\eta) \sum_1^n{}_t \,|\psi_{s,t}(U,\eta)|\, d\eta \right\} .
$$

IV. - Sia $R(\rho_i - \rho_r) = 0$, $R(\sigma_i - \sigma_r) > 0$; allora se $k \leq j - 1$ scegliamo per $\gamma_{r,k}$ la poligonale a); la solita espressione è maggiorata da

$$exp\, R(\sigma_r - \sigma_i)\, v \cdot \delta^{k-j}(u,v) \sum_{\tau_r+1}^{\tau_{r+1}}{}_s \left\{ \int_V^u exp\, R\, (\sigma_i - \right.$$

$$- \sigma_r) V \cdot \delta^{\mu_r+j-k-1}(\xi, V) \sum_1^n{}_t\ \varphi_{s,t}(\xi, V) \,|\, d\xi +$$

$$\left. + \int_V^v exp\, R(\sigma_i - \sigma_r)\, \eta \cdot \delta^{\mu_r+j-k-1}(u,\eta) \sum_1^n{}_t \,|\, \psi_{s,t}(u,\eta) \,|\, d\eta \right\} ;$$

sul secondo integrale si ragiona come in I; per quanto riguarda il primo, si ha $exp\, R(\sigma_i - \sigma_r) V < exp\, R(\sigma_i - \sigma_r)\, v$ e $\delta^{j-k-1}(\xi, V) <$ $< \delta^{j-k-1}(u, v)$, onde la precedente è maggiorata da

$$\sum_{\tau_r+1}^{\tau_{r+1}}{}_s \frac{1}{\delta(u,v)} \left\{ \int_V^u \delta^{\mu_r}(\xi, V) \sum_1^n{}_t \,|\, \varphi_{s,t}(\xi, V) \,|\, d\xi + \right.$$

$$(28_4) \qquad \left. + \int_V^v \delta^{\mu_r}(u,\eta) \sum_1^n{}_t \,|\, \psi_{s,t}(u,\eta) | \, d\eta \right\} .$$

Se invece è $k > j - 1$, allora si sceglierà per $\gamma_{j,k}$ la poligonale c') onde si ha la maggiorazione

$$exp\, R\,(\sigma_r - \sigma_i)\, v \cdot \delta^{k-j}(u, v) \sum_{\tau_r+1}^{\tau_{r+1}}{}_s \left\{ \int_V^v exp\, R\,(\sigma_i - \right.$$

$$- \sigma_r)\, \eta \cdot \delta^{\mu_r+j-k-1}(u, \eta) \sum_1^n{}_t \,|\, \psi_{s,t}(u, \eta) \; d\eta +$$

$$\left. + \int_u^{+\infty} exp\, R\,(\sigma_i - \sigma_r) V \cdot \delta^{\mu_r+j-k-1}(\xi, V) \sum_1^n{}_t \,|\, \varphi_{s,t}(\xi, V)\; d\xi \right\} .$$

sul primo integrale si ragiona come al solito; sul secondo, si ha

$exp\, R(\sigma_i - \sigma_r)\, V \cdot \delta^{j-k}(\xi, V) < exp\, R(\sigma_i - \sigma_r)\, v\ \delta^{-k}(u, v)$, essendo $j - k \leq 0$, onde si ha la maggiorante

$$\sum_{s}^{\tau_{r+1}}{}_{\tau_r+1} \left\{ \frac{1}{\delta(u,v)} \int_V^v \delta^{\mu_r}(u,\eta) \sum_{t}^{n}{}_1 \, | \psi_{s,t}(u,\eta) | \, d\eta + \right.$$

$$(28_5) \qquad \left. + \int_u^{+\infty} \delta^{\mu_r - 1}(\xi, V) \sum_{t}^{n}{}_1 \, | \varphi_{s,t}(\xi, V) | \, d\xi \right\};$$

e così via di seguito.

Ora dalle ipotesi (20) e (20′) segue che, fissato a piacere un numero positivo d, è possibile trovare un $T > 0$ tale che per $u > T$, $v > T$, sia

$$\sum_{s=\tau_r+1}^{\tau_{r+1}} \sum_{t=1}^{n} \int_T^{+\infty} \delta^{\mu_r - 1}(u, v)\, | \varphi_{s,t}(u, v) |\, du < d,$$

$$\sum_{s=\tau_r+1}^{\tau_{r+1}} \sum_{t=1}^{n} \int_T^{+\infty} \delta^{\mu_r - 1}(u, v)\, | \psi_{s,t}(u, v) |\, dv < d,$$

$$\sum_{s=\tau_r+1}^{\tau_{r+1}} \sum_{t=1}^{n} \int_T^{+\infty} \delta^{\mu_r - 1}(x, x)\, (| \varphi_{s,t}(x, x) | + | \varphi_{s,t}(x, x) |)\, dx < d$$

$$r = 1, 2, \ldots, \nu.$$

D'altra parte se $\omega(x) \geq 0$ è una funzione sommabile su $(x_0, +\infty)$, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_{x_0}^{x} x\, \omega(x)\, dx = 0 \ ^{(12)}.$$

(12) Cfr. S. Faedo, l. c. in (1) p. 211...

Tenuto conto di ciò, si vede che, prendendo U e V abbastanza grandi, si può fare in modo che le espressioni $(28_{1,2,3,4,5})$, e simili, siano tutte inferiori a d; di più esse convergeranno a 0 per $u \to +\infty$, $v \to \infty$. Sarà perciò

$$|\Delta y_h^{(1)}| < exp[R(\rho_i)u + R(\sigma_i)v]\,\delta^{j-1}(u,v)\cdot C_1 C_2 nd\,, \qquad h = 1, 2, \ldots, n;$$

dopo di ciò si ha

$$|\Delta y_h^{(2)}| < exp[R(\rho_i)u + R(\sigma_i)v]\,\delta^{j-1}(u,v)\sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\mu_r}{}_k exp[R(\rho_r - \rho_i)u +$$

$$+ R(\sigma_r - \sigma_i)v]\,\delta^{k-j}(u,v)\,nd\,C_1^2 C_2^2\cdot(\gamma_{r,k})\int \sum_{\tau_r+1}^{\tau_r+1}{}_s \sum_1^{n}{}_t exp[R(\rho_i - \rho_r)\xi +$$

$$+ R(\sigma_i - \sigma_r)\eta]\cdot\delta^{\mu_r+j-k-1}(\xi,\eta)\,(|\varphi_{s,t}(\xi,\eta)|\,d\xi + |\psi_{s,t}(\xi,\eta)|\,d\eta)$$

che, con gli stessi ragionamenti di sopra, si trova essere maggiorata da

$$exp[R(\rho_i)u + R(\sigma_i)v]\,\delta^{j-1}(u,v)\,(nd\,C_1 C_2)^2\,,\ \text{ecc.}$$

Pertanto se si sceglie d in modo che sia $nd\,C_1 C_2 < 1$, e in conseguenza si scelgono U e V, si ha

$$(29)\qquad \sum_0^{\infty}{}_m \Delta y_h^{(m)} = exp(\rho_i u + \sigma_i v)\,\delta^{j-1}(u,v)[\delta^{1-j}(u,v)p_{h,\tau_i+j}(u,v) + $$
$$+ 0_{h,\tau_i+j}(u,v)]\,, \qquad h = 1, 2, \ldots, n$$

dove $0_{h,\tau_i+j}(u,v)$ per ogni valore di h, indica una serie totalmente convergente la cui somma (i cui termini) tende a 0 per u, $v \to +\infty$. Se indichiamo con $y^*_{\tau_i+j}$ il vettore che ha per componenti le (29), essendo lecito passare al limite per $m \to \infty$ nella (23) sotto al segno di integrale, si riconosce che $y^*_{\tau_i+j}$ è una soluzione di (13) associata a y_{τ_i+j} e, in un certo senso, asintotica a questa. Dando ad i successivamente i valori $1, 2, \ldots \nu$ e a j, per ogni i, i valori $1, 2, \ldots, \mu_i$, si vengono ad individuare n soluzioni y_h^*, $h = 1, 2, \ldots, n$, di (13) (associate alle y_h, $h = 1, 2, \ldots, n$, di (12)), le quali riescono linearmente indipendenti. Infatti scriviamo la (22) per $y = y^*_{\tau_i+j}$ e $c = i_{\tau_i+j}$ come segue

$$y^*_{\tau_i+j} = W(u, v)\,(i_{\tau_i+j} + z_{\tau_i+j})\,;$$

si è provato che

$$exp\,[R(\rho_r - \rho_i) + R(\sigma_r - \sigma_i)\,v]\,\delta^{k-j}(u, v)\,|\,z_{\tau_r+k,\tau_i+j}| \underset{u,v\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ per ogni}$$

coppia $\tau_r + k$, $\tau_i + j$. Si ha

$$W^{-1}\,W^* = E + \|\, z_{hk} \,\| \qquad\qquad (W^* = \|\, y^*_{hk} \,\|)$$

e

$$det\,(E + \|\, z_{hk} \,\|) = 1 + \sum_{1}^{n}{}_{h} \sum_{\substack{1 \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_h}}^{n}{}_{i_1 i_2 \ldots i_h} \begin{vmatrix} z_{i_1 i_1} & \ldots & z_{i_1 i_h} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{i_h i_1} & \ldots & z_{i_h i_h} \end{vmatrix} \underset{u,v\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

perchè nello sviluppo di ciascuno dei determinanti interni figurano dei prodotti $\Pi\, z_{\tau_r+k,\tau_i+j}$ nei quali i primi e i secondi indici assumono complessivamente gli stessi valori, onde

$$\Pi\, z_{\tau_r+k,\tau_i+j} = \Pi\, exp\,[(\rho_r - \rho_i)u + (\sigma_r - \sigma_i)\,v]\,\delta^{k-j}(u, v)\,z_{\tau_r+k,\tau_i+j} \text{ [13]}$$

[13] Il teorema n. 4 si può facilmente estendere al caso più generale di un sistema variato non lineare (cfr. anche H. WEYL: *Comment on the preceding paper* [Am. J. of Math. LXVIII, 1946, 7-12], relativo al lavoro di N. LEVINSON: *The asymptotic behavior of a system of linear differential equations*, Ibid. 1-6). In luogo del sistema (13) si consideri il sistema

$$(13') \qquad d\,y = [A\,y + \varphi(u, v, y)]\,du + [B\,y + \psi(u, v, y)]\,dv$$

con A e B matrici costanti permutabili; in ogni dominio della regione $u \geq 0$, $v \geq 0$ φ e ψ siano funzioni vettoriali di cui la prima, per ogni u, sia assolu-

5. – Caso del sistema non variato a coefficienti periodici.

Torniamo ora agl'integrali $z_1 z_2, \ldots, z_n$ del n. **2**. Si è già visto che $z_1 = exp(m_1 u + n_1 v)\, \boldsymbol{y}_1(u, v)$.

Orbene, con un ragionamento induttivo analogo a quello tenuto da Floquet (14) (che qui per brevità omettiamo), e tenendo presente la permutabilità delle matrici $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$, si riconosce che il gruppo di cui in (9) può essere scritto nella seguente forma

$$(30) \qquad z_i = exp(m_1 u + n_1 v) \sum_{\substack{hk \\ 0 \le h+k \le i-1}} u^h v^k \boldsymbol{g}^{(i)}_{h,k}(u, v)$$

$$i = 1, 2, \ldots, \mu_1,$$

ove m_1 e n_1 sono gli esponenti caratteristici definiti in (7) e i $\boldsymbol{g}^{(i)}_{h,k}(u, v)$ sono vettori periodici in u e v di periodo ω; analogamente per i restanti $\nu - 1$ gruppi.

Chiamati, come al solito, $\boldsymbol{y}_1(u, v), \ldots, \boldsymbol{y}_n(u, v)$ tali n integrali fondamentali, la loro matrice $W(u, v)$ si può scrivere nella forma $\| W_1 W_2 \ldots W_n |$ con

$$W_i = \begin{Vmatrix} y_{1,\tau_i+1} \cdots \cdots y_{1,\tau_{i+1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n,\tau_i+1} \cdots\cdots y_{n,\tau_{+1}} \end{Vmatrix}$$

$$i = 1, 2, \ldots, \nu;\ \tau_i = \mu_1 + \ldots + \mu_{i-1};\ \mu_0 = 0,$$

tamente continua rispetto a v e la seconda, per ogni v, sia assolutamente continua rispetto ad u; siano lipschitziane in $\boldsymbol{y}$:

$$\begin{aligned} &|\varphi_i(u, v, \boldsymbol{y}) - \varphi_i(u, v, \bar{\boldsymbol{y}})| \le |\bar{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}|\, f_i(u, v) \\ &|\psi_i(u, v, \boldsymbol{y}) - \psi_i(u, v, \bar{\boldsymbol{y}})| \le |\bar{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}|\, g_i(u, v) \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$

soddisfino quasi-dappertutto le condizioni di completa integrabilità; esistano delle funzioni $F_r(u)$, $G_r(v)$ non negative $(r = 1, 2, \ldots, n)$ e sommabili su $(0, +\infty)$ tali che, quasi-dappertutto rispetto a v e, rispettivamente, rispetto ad u, sia

$$\mathfrak{z}^{\mu_r - 1}(u, v)\, f_i(u, v) \le F_r(u), \quad \mathfrak{z}^{\mu_r - 1}(u, v)\, g_i(u, v) \le G_r(v), \quad \tau_r + 1 \le i \le \tau_{r+1}$$

$$r = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Si può allora ripetere tutto quanto è stato detto al n. **4**.

(14) Cfr. G. Floquet, l. c. in (2).

Vogliamo provare che *i complementi algebrici degli elementi della colonna di posto $\tau_i + h$ in W sono dati dal prodotto dell'$exp\,[-\rho_i u - \sigma_i v]$ per dei polinomi in u e v, con coefficienti funzioni periodiche di periodo ω in u e v, di grado al più $\mu_i - h$; $h = 1, 2, \ldots, \mu_i$; $i = 1, 2, \ldots, \nu$.*

Posto

$$y = Tz \qquad \text{con } T = \begin{Vmatrix} y_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ y_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1} & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}, \qquad y_{11} \neq 0$$

si ha da (1)

$$(31) \qquad dz = T^{-1}\left(AT - \frac{\partial T}{\partial u}\right) z\, du + T^{-1}\left(BT - \frac{\partial T}{\partial v}\right) z\, dv$$

che si spezza nell'equazione

$$(32) \qquad dz_1 = \sum_2^n {}_k \frac{a_{1k}}{y_{11}} z_k\, du + \sum_2^n {}_k \frac{b_{1k}}{y_{11}} z_k\, dv$$

e nel sistema

$$(33) \qquad dz_i = \sum_2^n {}_k \left(a_{ik} - a_{1k}\frac{y_{i1}}{y_{11}}\right) z_k\, du + \sum_2^n {}_k \left(b_{ik} - b_{1k}\frac{y_{i1}}{y_{11}}\right) z_k\, dv$$
$$i = 2, 3, \ldots, n.$$

Dall'ipotesi che quasi-dappertutto sia $\frac{\partial A}{\partial v} + AB = \frac{\partial B}{\partial u} + BA$ ed essendo quasi-dappertutto $\frac{\partial^2 T}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 T}{\partial v\, \partial u}$, segue che (31) è completamente integrabile. Inoltre i coefficienti del sistema (31) sono funzioni periodiche di periodo ω in u e v; infatti, poichè le y_{i1} ($i = 1, 2, \ldots, n$) sono le componenti di una soluzione periodica di seconda specie, i rapporti di due qualsiasi di esse sono funzioni propriamente periodiche.

Ora, avendosi $W(u, v) = T(u, v)\, Z(u, v)$, segue

$$Z(u+\omega, v) = T^{-1}(u+\omega, v)\, T(u, v)\, Z(u, v)\, \mathfrak{M},$$
$$Z(u, v+\omega) = T^{-1}(u, v+\omega)\, T(u, v)\, Z(u, v)\, \mathfrak{N}.$$

D'altra parte, essendo

$$T^{-1}(u, v) = \begin{Vmatrix} 1/y_{11} & 0 \dots\dots & 0 \\ -y_{21}/y_{11} & 1 \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ -y_{n1}/y_{11} & 0 \dots\dots & 1 \end{Vmatrix}$$

si ha

$$T^{-1}(u+\omega, v)\, T(u, v) = \begin{Vmatrix} 1/\rho_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T^{-1}(u, v+\omega)\, T(u, v) = \begin{Vmatrix} 1/\sigma_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

e poichè

$$Z = \begin{Vmatrix} 1 & z_{12} \dots & z_{1n} \\ 0 & z_{22} \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & z_{n2} \dots & z_{nn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & \cdot \\ 0 & Z_1 \end{Vmatrix}$$

si ha

$$Z(u+\omega, v) = \begin{Vmatrix} 1 & \cdot \\ 0 & Z_1(u+\omega, v) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1/\rho_1 & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \cdot \\ 0 & Z_1(u, v) \end{Vmatrix} \mathfrak{M} =$$
$$= \begin{Vmatrix} 1/\rho_1 & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \cdot \\ 0 & Z_1(u, v) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \rho_1 & \cdot \\ 0 & \mathfrak{M}^1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & \cdot \\ 0 & Z_1(u, v)\, \mathfrak{M}^1 \end{Vmatrix}$$

e quindi

$$Z_1(u + \omega, v) = Z_1(u, v)\,\mathfrak{M}^1 ;$$

analogamente si trova

$$Z_1(u, v + \omega) = Z_1(u, v)\,\mathfrak{N}^1$$

(con $\mathfrak{N}^1$ rispetto ad $\mathfrak{N}$ analogo di $\mathfrak{M}^1$ rispetto ad $\mathfrak{M}$). Segue che le matrici $\mathfrak{M}^1$ ed $\mathfrak{N}^1$ sono ancora permutabili e hanno gli stessi autovalori di $\mathfrak{M}$ ed $\mathfrak{N}$ salvo che ρ_1 e σ_1 sono multipli di ordine minore di una unità rispetto a quello che erano relativamente ad $\mathfrak{M}$ ed $\mathfrak{N}$. Giunti a questo punto si può ripetere un ragionamento fatto da Faedo ([15]) che porta a concludere quanto si è affermato.

Poichè la presenza, attualmente, di coefficienti periodici, anzichè costanti, nelle $p_{h.\tau_r+k}$, $q_{s.\tau_r+k}$ (per adoperare le notazioni già usate) permette ancora di effettuare delle maggiorazioni come le (27) e di ripetere tal quale tutti i ragionamenti fatti nella seconda parte del n. **4**, si conclude che: *il teorema colà dimostrato sussiste invariato anche se il sistema di partenza, anzichè essere a coefficienti costanti, è a coefficienti periodici (beninteso che ora, al posto degli autovalori delle matrici A e B, figurano gli esponenti caratteristici definiti in* (7)).

([15]) Cfr. S. Faedo, l. c. in ([10]), pp. 210-211.

Quando il presente lavoro era già alla stampa, sono venuto a conoscenza di due recentissime note di E. Levi dal titolo « *Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee* » [Rend. Acc. Naz. Lincei (8) VIII (1950) pp. 465-470 e (8) IX (1950) pp. 26-31] in cui si dà un teorema che perfeziona il risultato di S. Faedo citato in ([11]) ma che può ulteriormente perfezionarsi come abbiamo indicato in ([11]) stesso.

Precisamente, riferendosi al sistema

$$y' = [A + \Phi(x)]\,y$$

S. Faedo ha provato l'esistenza di una *n-pla* fondamentale di integrali asintotici (in senso analogo a quello indicato nelle pagine che precedono) agli integrali di una *n-pla* fondamentale relativa al sistema $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, sotto la condizione che sia

$$\int_0^{+\infty} x^{\nu-1} \, |\varphi_{h,k}(x)| \, dx < +\infty \,, \qquad h, k = 1, 2, \ldots, n,$$

se ν è il massimo tra gli ordini di molteplicità degli autovalori di A.

La condizione data da E. Levi è la medesima ove per ν s' intenda il massimo tra gli esponenti dei divisori elementari relativi alla matrice A.

Orbene, se ci riferiamo al sistema normalizzato, ove A sia nella forma canonica di Jordan

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{Vmatrix} \text{ con } A_i = \begin{Vmatrix} \rho_i E_{i_1} + U_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_i E_{i_{p_i}} + U_{i_{p_i}} \end{Vmatrix} \begin{matrix} i_1 + i_2 + \ldots + i_{p_i} = \mu_i \\ \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m = n \,, \end{matrix}$$

si riconosce (come caso particolare dei risultati conseguiti nelle pagine che precedono) che i ragionamenti di S. Faedo e le relative conseguenze restano immutati qualora si facciano le ipotesi meno restrittive

$$\int_0^{+\infty} x^{i_j - 1} \, |\varphi_{h,k}(x)| \, dx < +\infty$$

per $k = 1, 2, \ldots, n$; $h = \tau_{i-1} + i_1 + \ldots + i_{j-1} + 1, \ldots, \tau_{i-1} + i_1 + \ldots + i_j$; $j = 1, 2, \ldots, p_i$; $i = 1, 2, \ldots, m$ (essendo, per ogni i, $i_0 = 0$).