Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Annamaria Scorza Toso

Sulla derivazione di una funzione composta

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 21 (1952), p. 198-201

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__198_0>

SULLA DERIVAZIONE DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

Nota (*) *di* ANNAMARIA SCORZA TOSO (*a Padova*)

In questa Nota mi propongo di indicare per una funzione composta del tipo $z(x(t), y(t))$ un teorema di derivazione analogo a quello dato di recente da SCORZA DRAGONI [1]) per una funzione composta del tipo $z(x, y(x))$. Questi supponeva la funzione $z(x, y)$ misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y; io dovrò supporla, se non addirittura continua, continua rispetto alle singole variabili separatamente. Per semplicità, mi limiterò poi a considerare funzioni z definite in un rettangolo R, al quale la curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ risulterà interna.

1. - *La funzione $z(x, y)$, definita nel rettangolo*

$$R: \quad a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d,$$

sia continua rispetto ad x e rispetto ad y separatamente; le funzioni

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t)$$

siano assolutamente continue nell'intervallo

$$I: \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

risultando ivi quasi ovunque

(1) $$x'^2(t) + y'^2(t) > 0\,;$$

---

*) Pervenuta in Redazione il 9 gennaio 1952.

1) G. SCORZA DRAGONI, *Un' osservazione sulla derivata di una funzione composta* [questi «Rendiconti», vol. XX (1951), pagg. 432-467], n. 1.

il punto $(x(t), y(t))$ *sia interno ad* R *per ogni* t *di* I *e per quasi tutti i* t *di* I *la funzione* $z(x, y)$ *ammetta le derivate parziali prime in quel punto. Allora la funzione composta*

$$Z(t) = z(x(t), y(t))$$

è dotata di derivata asintotica quasi ovunque in I *e questa derivata è uguale quasi ovunque a*

$$z'_x(x(t), y(t))x'(t) + z'_y(x(t), y(t))y'(t)\,;$$

di guisa che se $Z(t)$ *è quasi ovunque derivabile, sussiste quasi ovunque la solita formula di derivazione delle funzioni composte.*

Cominciamo col far vedere che nelle nostre ipotesi la funzione $Z(t)$ è misurabile. Poniamo

$$s = s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)}\, d\tau \qquad (\alpha \leq t \leq \beta)\,; \tag{2}$$

allora $s(t)$ rappresenta notariamente [2]) la lunghezza dell'arco di equazioni parametriche

$$x = x(\tau) \quad , \quad y = y(\tau) \qquad (\alpha \leq \tau \leq t).$$

Detto l il valore $s(\beta)$, la (2) può essere risoluta rispetto a t, in virtù della (1), e si esprime così t in funzione di s

$$t = t(s) \qquad (0 \leq s \leq l).$$

Posto

$$\xi(s) = x(t(s)) \quad , \quad \eta(s) = y(t(s))$$

e

$$\zeta(s) = z(\xi(s), \eta(s))$$

la funzione $\zeta(s)$ è misurabile in virtù di un teorema di BAJADA [3]) e risulta

$$Z(t) = \zeta(s(t))\,;$$

---

[2]) L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni* [Zanichelli, Bologna 1922], vol. I, n. 65.

[3]) E. BAJADA, *Sulle funzioni continue separatamente rispetto alle variabili e gli integrali curvilinei* [questi « Rendiconti », vol. XVII (1948), pagg. 201-218], pag. 211.

quindi, a norma di un noto teorema, che risale a RADEMACHER[4]), $Z(t)$ sarà una funzione misurabile di t non appena avremo dimostrato che la (2) trasforma in insiemi di misura nulla sull'asse delle s soltanto insiemi di misura nulla dell'asse delle t. Ora ciò è conseguenza immediata di teoremi noti[5]) e del fatto che la (1) è soddisfatta quasi ovunque nell'intervallo I.

Osserviamo ora che se ϑ è un numero positivo abbastanza piccolo, dato t comunque nell'intervallo I, i punti (x, y) per i quali è

$$|x - x(t)| \leq \vartheta \quad , \quad |y - y(t)| \leq \vartheta$$

sono tutti interni ad R. E nel rettangolo

$$W: \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad , \quad -\vartheta \leq u \leq \vartheta$$

definiamo le due funzioni $\gamma_1(t, u)$ e $\gamma_2(t, u)$ nel seguente modo: $\gamma_1(t_0, u)$ e $\gamma_2(t_0, u)$ siano identicamente nulle se nel punto $(x(t_0), y(t_0))$ manca anche soltanto una delle derivate parziali prime di z; escluso questo caso, porremo

$$\gamma_1(t_0, 0) = z'_x(x(t_0), y(t_0)) \quad , \quad \gamma_2(t_0, 0) = z'_y(x(t_0), y(t_0)),$$

$$\gamma_1(t_0, u) = \frac{z(x(t_0) + u, y(t_0)) - z(x(t_0), y(t_0))}{u} \qquad (u \neq 0),$$

$$\gamma_2(t_0, u) = \frac{z(x(t_0), y(t_0) + u) - z(x(t_0), y(t_0))}{u} \qquad (u \neq 0).$$

Le funzioni γ_1 e γ_2 risultano allora misurabili rispetto a t e continue rispetto ad u; e quindi quasi continue rispetto a (t, u) in modo semiregolare rispetto ad u[6]); vale a dire, si può trovare una porzione chiusa δ di I, di misura arbitrariamente prossima a $\beta - \alpha$, tale che γ_1 e γ_2 siano uniformemente con-

---

[4]) Cfr. S. SAKS, *Theory of the integral* [« Monografie Matematyczne ». Varsavia (1937)], pag. 224, § 6.

[5]) Loc. cit. ([2]), n. 62, *b*).

[6]) G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile* [questi « Rendiconti », vol. XVII (1948), pagg. 102-106].

tinue se considerate come definite soltanto nella porzione chiusa Δ di quei punti di W che hanno la prima coordinata in $\mathfrak{z}$.

Sia ora t_0 un punto di $\mathfrak{z}$ di densità lineare 1 per $\mathfrak{z}$, ed h un numero positivo tale che t_0+h appartenga a $\mathfrak{z}$, di guisa che h si può far tendere a zero mantenendolo in un insieme di densità lineare 1 nell'origine; se h è abbastanza piccolo, abbastanza piccole sono anche le quantità

$$j = x(t_0+h) - x(t_0) \quad , \quad k = y(t_0+h) - y(t_0)$$

e risulta

$$Z(t_0+h) - Z(t_0) = z(x(t_0+h),\ y(t_0+h)) - z(x(t_0),y(t_0)) =$$

$$= z(x(t_0+h), y(t_0+h)) - z(x(t_0), y(t_0+h)) + z(x(t_0), y(t_0+h)) -$$

$$- z(x(t_0), y(t_0)) = - \left\{ z(x(t_0),y(t_0+h)) - z(x(t_0+h), y(t_0+h)) \right\} +$$

$$+ z(x(t_0), y(t_0+h)) - z(x(t_0), y(t_0)) = \gamma_1(t_0+h, -j)j + \gamma_2(t_0, k)k\,;$$

e se ora si divide per h e si fa tendere h a zero, anche j e k tendono a zero e si trova appunto che la derivata asintotica di $Z(t)$ in t_0 vale $z'_x(x(t_0),\ y(t_0))x'(t_0) + z'_y(x(t_0),\ y(t_0))y'(t_0)$. Ma nelle nostre ipotesi t_0 può coincidere con quasi tutti i punti di I; donde la conclusione.

2. - Se $z(x,y)$ è continua in R rispetto al complesso delle due variabili, il teorema precedente continua a sussistere anche se le ipotesi della assoluta continuità di $x(t)$ ed $y(t)$ e della validità quasi ovunque della (1) siano sostituite da quelle che le $x(t)$, $y(t)$ siano continue e quasi ovunque derivabili. Infatti in questo caso $z(x(t),y(t))$ è addirittura una funzione continua di t ed il ragionamento precedente si può quindi riprendere inalterato a partire dalla definizione di γ_1 e γ_2.