RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE GRIOLI

Sul problema di De Saint-Venant nei solidi cristallini

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 21 (1952), p. 228-242

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__228_0>

SUL PROBLEMA DI DE SAINT-VENANT NEI SOLIDI CRISTALLINI

Memoria (*) *di* GIUSEPPE GRIOLI (*a Padova*)

Com' è noto, il problema di DE SAINT-VENANT dell' equilibrio di un corpo cilindrico sollecitato sulle due basi — se si eccettuano i casi semplici dell' estensione semplice e della flessione uniforme — si riconduce per i sistemi dotati di tre piani di simmetria cristallografica alla risoluzione [1]) di uno [torsione] o due problemi al contorno [flessione non uniforme] che nel caso dei corpi isotropi divengono problemi di NEUMANN.

Dalla risoluzione di tali problemi al contorno si deducono delle funzioni potenziali che per derivazione forniscono gli sforzi.

La determinazione di tali funzioni potenziali — in dipendenza della forma della sezione normale del corpo cilindrico — può riuscire non semplice e la necessaria derivazione delle serie con cui eventualmente si è costretti ad esprimerle può risultare svantaggiosa dal punto di vista numerico.

Un procedimento d' integrazione fondato sulle proprietà di media e sul teorema di MENABREA [2]) riuscirebbe certamente adatto alla determinazione dello stato tensionale senza neppure bisogno di ricorrere all' ipotesi di semplificazione solitamente ammessa nel problema di DE SAINT-VENANT ma l' accettabilità di tale ipotesi semplificatrice nel caso di corpi cilindrici suffi-

---

*) Pervenuta in Redazione il 31 maggio 1952.

1) LOVE, « The Mathematical Theory of Elasticity », pag. 324 e 344.

2) G. GRIOLI, « Proprietà di media ed integrazione del problema dell'elastostatica isoterma », Annali di Matematica pura ed applicata; Serie IV; vol. 33, 1952.

cientemente lunghi rende desiderabile un metodo d'integrazione che — al fine di semplificare i complessi sviluppi analitici — ne tenga conto.

Mostrerò appunto che anche tenendo conto del principio di approssimazione di DE SAINT-VENANT può stabilirsi un metodo d'integrazione fondato sulle proprietà di media ma non più sul teorema di MENABREA che perde la sua validità bensì su una certa proprietà di minimo che stabilirò, valida nel caso di corpi dotati di tre piani di simmetria cristallografica e avente la funzione del teorema di MENABREA.

In particolare nel caso della flessione non uniforme di un cilindro ellittico si trova che le caratteristiche di tensione non nulle sono espresse da polinomi di secondo grado come nel caso isotropo, fatto questo che non sembra a priori prevedibile dato che quelle caratteristiche — a differenza di ciò che avviene nel problema della torsione di un cilindro ellittico — non sono lineari e dipendono dalle costanti elastiche del corpo.

§ 1. - Premessa.

Sia C un corpo elastico omogeneo di forma cilindrica riferito alla sua terna centrale $Ox_1\ x_2\ x_3$. Suppongo che x_3 sia ortogonale alle sezioni normali di C e denoto con $2h$ la sua altezza, con σ la superficie laterale e con $x_1,\ x_2,\ x_3=0$ i coseni direttori della normale interna a σ. La sollecitazione esterna [equilibrata] sia assegnata e consista unicamente in forze applicate sulle basi del corpo cilindrico.

Com'è noto, il problema di DE SAINT-VENANT consiste nella ricerca di soluzioni delle equazioni indefinite di equilibrio che siano congruenti ed inoltre soddisfino alle seguenti condizioni:

a) delle sei caratteristiche di tensione, X_{rs}, $(r, s = 1, 2, 3)$, tre risultano nulle; precisamente sia

$$X_{11} = X_{22} = X_{12} = 0\,, \qquad \text{in } C; \tag{1}$$

b) risulta

$$X_{13}n_1 + X_{23}n_2 = 0\,, \qquad \text{su } \sigma; \tag{2}$$

ove $n_1,\ n_2,\ n_3 = 0$ sono i coseni direttori della normale interna a σ;

c) le X_{13}, X_{23}, X_{33} sono tali che per la porzione di solido cilindrico compreso tra una delle basi e la generica sezione di C risultano verificate le equazioni cardinali della Statica.

* * *

Denoto con A la generica sezione normale di C e con R_r, M_r, $(r = 1, 2, 3)$, le componenti del risultante e del momento risultante rispetto ad O delle forze assegnate sulla base $x_3 = h$.

Indicando con il soprassegno il valor medio in A di una qualunque funzione delle coordinate la condizione c) si traduce — com'è evidente — nelle uguaglianze

$$\overline{X}_{r3} = -\frac{R_r}{A}, \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{3}$$

$$\begin{cases} \overline{x_2 X_{33}} - \overline{x_3 X_{23}} = -\dfrac{M_1}{A}, \\ \overline{x_1 X_{33}} - \overline{x_3 X_{13}} = \dfrac{M_2}{A}, \\ \overline{x_1 X_{23}} - \overline{x_2 X_{13}} = -\dfrac{M_3}{A}. \end{cases} \tag{4}$$

* * *

Le equazioni di CAUCHY, tenuto conto delle (1), implicano la indipendenza di X_{13}, X_{23} da x_3 e la linearità rispetto ad x_3 di X_{33}. Si può dunque porre

$$X_{33} = X_{33}' x_3 + X_{33}'', \tag{5}$$

con X'_{33}, X''_{33} indipendenti da x_3.

Le (3), (4) essendo valide per ogni x_3 equivalgono — com'è facile riconoscere — alle seguenti proprietà di media

$$\overline{X}_{r3} = -\frac{R_r}{A}, \qquad (r = 1, 2), \tag{6}$$

$$\overline{X}_{33}' = 0, \quad \overline{X}_{33}'' = -\frac{R_3}{A}, \tag{7}$$

$$\overline{x_r X'_{33}} = -\frac{R_r}{A}, \qquad (r = 1, 2), \tag{8}$$

$$\overline{x_2 X_{33}''} = -\frac{M_1}{A}, \quad \overline{x_1 X_{33}''} = \frac{M_2}{A}, \tag{9}$$

$$\overline{x_1 X_{23}} - \overline{x_2 X_{13}} = -\frac{M_3}{A}. \tag{10}$$

Delle equazioni di CAUCHY rimane da considerare solo la terza che in base a (5) diviene

$$\frac{\partial X_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{23}}{\partial x_2} + X_{33}' = 0, \tag{11}$$

e il problema posto si riduce alla ricerca di quattro funzioni, X_{13}, X_{23}, X_{33}', X_{33}'' soddisfacenti alle equazioni (2), (11), alle proprietà di media (6), (7), (8), (9), (10) e tali che le corrispondenti caratteristiche di tensione [tenuto conto di (1)] risultino integrabili per la determinazione delle componenti di spostamento.

§ 2. - Le condizioni di integrabilità per le funzioni X_{13}, X_{23}, X_{33}', X_{33}'' nel caso di un corpo comunque anisotropo.

Con il fine di precisare in una forma conveniente per il seguito le condizioni di integrabilità cui devono soddisfare le funzioni X_{13}, ecc., pongo

$$X_3 = X_{33}, \quad X'_3 = X'_{33}, \quad X_3'' = X_{33}'', \quad X_4 = X_{23}, \quad X_5 = X_{13} \tag{12}$$

e denoto con m_{rs}, $(r, s = 1, 2, \dots, 6)$, i coefficienti [costanti] dell'espressione nelle X_{rs} del doppio dell'energia potenziale elastica specifica e con ε_r, $(r = 1, 2, \dots, 6)$, le sei caratteristiche di deformazione. Risulta

$$-\varepsilon_r = m_{r3} X_3 + m_{r4} X_4 + m_{r5} X_5, \qquad (r = 1, 2, \dots, 6). \tag{13}$$

In base a (13) si riconosce che tre delle sei equazioni di DE SAINT-VENANT divengono

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{dx_2^2} \sum_{s=3,4,5} m_{3s} X_s - m_{43} \frac{\partial^2 X_3}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \\ &\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \sum_{s=3,4,5} m_{3s} X_s - m_{53} \frac{\partial^2 X_3}{\partial x_1 \partial x_3} = 0, \\ &\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \sum_{s=3,4,5} m_{3s} X_s - \frac{1}{2} \left[m_{43} \frac{\partial^2 X_3}{\partial x_1 \partial x_3} + m_{53} \frac{\partial^2 X_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right] = 0. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Tenuto conto di (5) e del fatto che certamente è $m_{33} > 0$, da (14) si deduce la linearità di X_3' rispetto ad x_1, x_2. L'espressione di X_3' è pertanto [vedi (7), (8)] necessariamente

$$X_3' = -\frac{1}{A}\left(\frac{R_1}{\rho_1^2}x_1 + \frac{R_2}{\rho_2^2}x_2\right), \tag{15}$$

con

$$\rho_i^2 = \frac{1}{A}\int_A x_i^2 dA, \qquad (i = 1, 2). \tag{16}$$

Posto

$$F_r = m_{r3}X_3'' + m_{r4}X_4 + m_{r5}X_5, \quad (r = 1, 2 \dots 6), \tag{17}$$

le (14) si scrivono, in base a (15),

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2^2} = -m_{43}\frac{R_2}{A\rho_2^2}, \quad \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1^2} = -m_{53}\frac{R_1}{A\rho_1^2}, \\ &\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{1}{2A}\left[m_{43}\frac{R_1}{\rho_1^2} + m_{53}\frac{R_2}{\rho_2^2}\right], \end{aligned}\right. \tag{18}$$

mentre le tre equazioni di congruenza non ancora considerate, tradotte nelle X_r, divengono, in base a (1), (15), (17),

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 F_6}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial F_5}{\partial x_2} - \frac{\partial F_4}{\partial x_1}\right] = -\frac{2m_{13}R_2}{A\rho_2^2} + \frac{m_{63}R_1}{A\rho_1^2}, \\ &\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial F_5}{\partial x_2} - \frac{\partial F_4}{\partial x_1}\right] = \frac{2m_{23}R_1}{A\rho_1^2} - \frac{m_{63}R_2}{A\rho_2^2}, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Le (18) determinano la F_3 a meno di un polinomio di primo grado, le (19, 2), (19, 3), la differenza $\dfrac{\partial F_5}{\partial x_2} - \dfrac{\partial F_4}{\partial x_1}$ a meno di una costante. In definitiva — tenuto conto che la X_3'' rimane espressa in funzione di X_4, X_5 in base a (17) e alla conoscenza di F_3 — nel caso più generale di anisotropia le condizioni di integrabilità si riducono a due equazioni nelle X_4, X_5: la

(19, 1) e quella che si ottiene uguagliando l'espressione fornita per $\frac{\partial F_5}{\partial x_2} - \frac{\partial F_4}{d x_1}$ dall'integrazione delle (19, 2), (19, 3) a quella che si deduce dalle (17) per $r = 4{,}5$, in base alla conoscenza di X_3''.

Dalle considerazioni svolte segue *non solo la linearità di X_3' rispetto a x_1, x_2 comunque anisotropo sia il corpo ma anche quella di X_3'' se il sistema cristallino e il taglio del corpo in esso* [in relazione alla particolare terna di riferimento prescelta] *sono tali che risulti*

$$m_{34} = m_{35} = 0\,. \tag{20}$$

In tale ipotesi in base a (7, 2), (9) si ha

$$X_3'' = -\frac{1}{A}\left[R_3 - \frac{M_2}{\rho_1^2}x_1 + \frac{M_1}{\rho_2^2}x_2\right]. \tag{21}$$

§ 3. - Una proprietà di minimo della soluzione del problema di De Saint-Venant.

Nel seguito mi riferirò a quei corpi cristallini per i quali, oltre alle (20), valgono, in relazione alla prescelta terna di riferimento, le uguaglianze

$$m_{14} = m_{15} = m_{24} = m_{25} = m_{45} = m_{36} = m_{46} = m_{56} = 0. \tag{22}$$

In altri termini suppongo che C appartenga ad una sostanza cristallina avente in ogni punto tre piani di simmetria cristallografica di giacitura invariabile [sistemi rombico, esagonale, tetragonale, regolare] e sia in essa tagliato in modo che i suoi tre piani centrali coincidano [3]) con essi. Dirò in tal caso che il corpo appartiene alla classe C^*.

In tale ipotesi, in base a (20), (22), la (19, 1) diviene un' identità mentre le (19, 2), (19, 3) tenuto conto di (17), si scrivono

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\left[m_{44}\frac{\partial X_4}{\partial x_1} - m_{55}\frac{\partial X_5}{\partial x_2}\right] = 2m_{13}\frac{R_2}{A\rho_2^2}, \\ &\frac{\partial}{\partial x_2}\left[m_{44}\frac{\partial X_4}{\partial x_1} - m_{55}\frac{\partial X_5}{\partial x_2}\right] = -\,2m_{23}\frac{R_1}{A\rho_1^2} \end{aligned}\right. \tag{23}$$

---

[3]) Quanto sarà detto si mantiene valido anche per i corpi cilindrici che pur appartenendo ad una sostanza cristallina dotata di tre

e ad esse equivale il sistema di DE SAINT-VENANT, tenute presenti le (1), (5), (15), (21), se C è della classe C^*.

È facile riconoscere che le caratteristiche di tensione definite dal problema di DE SAINT-VENANT non soddisfano al teorema di MENABREA. Sussiste però un analogo teorema di minimo non più in rapporto all'energia potenziale ma ad un certo funzionale che passo a definire.

A tal fine indico con P_3 la somma di x_1^2 e di un qualunque polinomio di primo grado in x_1, x_2 e con P_4 quella di x_2^2 e di qualunque polinomio di secondo grado privo dei termini in x_2^2 e $x_1\, x_2$.

Tenuto presente che è $m_{44} > 0$, $m_{55} > 0$ e posto

$$(24)\quad I = \int_A \left\{ \frac{1}{m_{44}} \left[m_{44} X_4 - \frac{m_{13} R_2}{A \rho_2^2} P_3 \right]^2 + \frac{1}{m_{55}} \left[m_{55} X_5 - \frac{m_{23} R_1}{A \rho_1^2} P_4 \right]^2 \right\} dA,$$

dimostrerò: *Lo stato di tensione che si genera in un corpo della classe C^* nel criterio di approssimazione dello schema di De Saint-Venant è caratterizzato dalle* (1), (5) (15), (21) *e dalla coppia di caratteristiche X_4, X_5 individuata dalla condizione di rendere minimo I nell' insieme* [che dirò I*] *delle funzioni soddisfacenti alle* (2), (11) *e alle proprietà di media* (6), (10).

Per dimostrare quanto sopra basterà evidentemente assicurarsi che la condizione di minimo cui soddisfano X_4, X_5 si traduce [4]) nel sistema (23). Denoto con δX_4, δX_5 variazioni di X_4, X_5 soddisfacenti alle equazioni

$$(25)\qquad \frac{\partial \delta X_5}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta X_4}{\partial x_2} = 0, \qquad \text{in } A^*$$

$$(26)\qquad \delta X_5 n_1 + \delta X_4 n_2 = 0, \qquad \text{su } l^*$$

$$(27)\qquad \overline{\delta X_4} = \overline{\delta X_5} = 0,$$

$$(28)\qquad x_1 \overline{\delta X_4} - x_2 \overline{\delta X_5} = 0,$$

---

piani di simmetria cristallografica sono tagliati in modo che soltanto le sezioni normali coincidono con piani di simmetria cristallografica. In tal caso, però, conviene assumere piani coordinati di riferimento aventi la giacitura di tali piani di simmetria e tener conto delle lievi modifiche formali che derivano per il fatto che gli assi x_1, x_2 non sono assi centrali.

[4]) Naturalmente ammetto non solo l'esistenza ma anche l'unicità della soluzione del problema di De Saint-Venant.

ove A^* indica la sezione di C fatta con il piano $x_3 = 0$ ed l^* il suo contorno. È evidente che le δX_4, δX_5 che verificano le (25), (26), (27), (28) danno tutte e sole le variazioni che possono attribuirsi ad X_4, X_5 senza uscire dall' insieme I^*.

D' altronde è evidente che l' insieme di tutte le coppie δX_4, δX_5 soddisfacenti alla (25) si può esprimere mediante le uguaglianze

$$\delta X_4 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\,, \quad \delta X_5 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\,, \tag{29}$$

con ψ arbitraria derivabile.

In conseguenza la (26) si scrive

$$\frac{d\psi}{ds} = 0\,, \tag{30}$$

se ds è l' elemento d' arco su l^*.

Dovrà quindi essere

$$\psi \equiv \psi_0 \equiv \text{cost}\,, \qquad \text{su } l^*. \tag{31}$$

Le (27) risultano verificate, essendo, in base a (29), (31),

$$\int_{A^*} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dA^* = -\psi_0 \int_{l^*} n_i ds = 0, \qquad (i = 1, 2). \tag{32}$$

La (28) invece, tenuto conto di (29), (31) si traduce nella relazione

$$\psi_0 = \frac{1}{A} \int_{A^*} \psi dA^* \tag{33}$$

e lega ψ_0 al valore medio in A^* della ψ.

Da quanto sopra è detto si deduce che le variazioni da attribuire alle funzioni X_4, X_5 si possono esprimere mediante le (29) con la ψ soddisfacente unicamente alla condizione di essere derivabile, costante su l^* e verificante la (33).

In corrispondenza a variazioni di X_4, X_5 fornite dalle (29) I subisce una variazione espressa da

$$\delta I = 2 \int_{A^*} \left\{ \left[m_{44} X_4 - m_{13} \frac{R_2}{A\rho_2^2} P_3 \right] \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \left[m_{55} X_5 - m_{23} \frac{R_1}{A\rho_1^2} P_4 \right] \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right\} dA^*, \tag{34}$$

che può anche scriversi

$$(35)\qquad \delta I = -2\psi_0 \int_{l^*} \left\{ \left[m_{44} X_4 - m_{13} \frac{R_2}{A\rho_2^2} P_3 \right] n_1 - \left[m_{55} X_5 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - m_{23} \frac{R_1}{A\rho_1^2} P_4 \right] n_2 \right\} ds - 2 \int_{A^*} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[m_{44} X_4 - m_{13} \frac{R_2}{A\rho_2^2} P_3 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[m_{55} X_5 - m_{23} \frac{R_1}{A\rho_1^2} P_4 \right] \right\} \psi dA^* .$$

L' arbitrarietà della ψ in A mostra che la condizione di minimo per I implica l' equazione

$$(36)\qquad m_{44} \frac{\partial X_4}{\partial x_1} - m_{55} \frac{\partial X_5}{\partial x_2} - \frac{1}{A} \left[m_{13} \frac{R_2}{\rho_2^2} \frac{\partial P_3}{\partial x_1} - m_{23} \frac{R_1}{\rho_1^2} \frac{\partial P_4}{\partial x_2} \right] = 0 ,$$

dalla quale segue — com' è facile riconoscere — l' annullarsi del primo integrale del secondo membro di (35).

Si deduce che la (36) traduce pienamente la condizione di rendere minimo I. Inoltre derivando la (36) rispetto ad x_1 o ad x_2 si ottengono le (23) [si tenga presente il significato di P_3, P_4].

La coppia di funzioni X_4, X_5 minimizzanti I nell' insieme I^* verifica pertanto — se il corpo appartiene alla classe C^* — tutte le condizioni prescritte nel problema di DE SAINT-VENANT ed insieme alle (1), (5), (15), (21) ne caratterizza lo stato tensionale, c.d.d.

§ 4. - Integrazione del problema di De Saint-Venant.

La proprietà di minimo esposta nel numero precedente permette di costruire rapidamente un procedimento d' integrazione del problema di DE SAINT-VENANT.

A tal fine indico con $\{w_i\}$ la successione di tutti i monomi formati con x_1, x_2 disposti in ordine di grado non decrescente

---

[5]) Evidentemente la condizione (33) è inessenziale: basta, ad es., identificare ψ con una funzione avente valor medio nullo in A^* per riconoscere la necessità della (36).

e con $\{P_t\}$ quella di tutti i polinomi indipendenti ottenuti aggiungendo a w_t quella combinazione lineare dei monomi $w_0, w_1, \dots, w_{t-1}$ univocamente determinata [6]) dalla condizione che P_t riesca in A^* ortogonale a tali monomi [e quindi a $P_0, P_1, \dots, P_{t-1}$].

Evidentemente sarà:

$$P_0 \equiv 1 \ , \quad P_1 \equiv x_1 \ , \quad P_2 \equiv x_2 , \tag{37}$$

mentre P_3 e P_4 possono certamente essere del tipo di quelli indicati nel numero precedente.

Moltiplicando la (11) per $x_1^\eta x_2^\tau dA^*$ integrando in A^* e aggiungendovi la (2) moltiplicata per $x_1^\eta x_2^\tau ds$ e integrata su l^* si ottiene, in base a (15),

$$\eta\overline{x_1^{\eta-1}x_2^\tau X_5} + \tau\overline{x_1^\eta x_2^{\tau-1}X_4} = c_{\eta\tau} , \tag{38}$$

con

$$c_{\eta\tau} = -\frac{1}{A}\int_{A^*}\left[\frac{R_1}{\rho_1^2}x_1 + \frac{R_2}{\rho_2^2}x_2\right]x_1^\eta x_2^\tau dA^* \tag{39}$$

ed è facile riconoscere che per $\eta = 0$, $\tau = 1$ ed $\eta = 1$, $\tau = 0$ le (38) equivalgono alle (6).

Da (38) segue

$$\overline{X_5 x_1} = \frac{1}{2}c_{20} \ , \quad \overline{X_4 x_2} = \frac{1}{2}c_{02} \ , \tag{40}$$

$$\overline{X_5 x_2} + \overline{X_4 x_1} = c_{11} . \tag{41}$$

Da (10), (41) si deducono i valori di $\overline{X_5 x_2}$, $\overline{X_4 x_1}$.

Pongo

$$\left\{\begin{aligned} X_4' &= -\frac{R_2}{A} + \frac{1}{2\rho_1^2}\left(c_{11} - \frac{M_3}{A}\right)x_1 + \frac{c_{02}}{2\rho_2^2}x_2 , \\ X_5' &= -\frac{R_1}{A} + \frac{1}{2}\frac{c_{20}}{\rho_1^2}x_1 + \frac{1}{2\rho_2^2}\left(c_{11} + \frac{M_3}{A}\right)x_2 , \end{aligned}\right. \tag{42}$$

---

[6]) Il procedimento di ortogonalizzazione qui indicato è certamente possibile in base al teorema di Gram. M. PICONE, « Lezioni di Analisi funzionale », Anno accademico 1946-47, p. 250, Tumminelli, Roma.

$$X''_{rm} = \sum_{t=3}^{m} \frac{\overline{X_r P_t}}{\rho_t^2} P_t, \qquad (r = 4, 5;\ m = 3, 4, \ldots), \tag{43}$$

con

$$\rho_t^2 = \frac{1}{A} \int_{A^*} P_t^2 dA^*, \qquad (t = 3, 4 \ldots). \tag{44}$$

Le speciali proprietà di completezza [7]) cui soddisfa la successione $\{P_t\}$ assicurano che *se le coppie* $\overline{X_r P_t}$ *che intervengono nelle* (43) *sono formate con combinazioni lineari di soluzioni delle* (38) *tali che esistano i* $\lim\limits_{m \to \infty} X''_{rm}$, *posto*

$$X''_r = \lim_{m \to \infty} X''_{rm}, \qquad (r = 4, 5), \tag{45}$$

le funzioni

$$X_r = X_r' + X_r'', \qquad (r = 4, 5), \tag{46}$$

soddisfano alle proprietà di media (6), (10) *e quasiovunque alle equazioni* (2), (11).

Tuttavia mostrerò subito che la determinazione degli sviluppi (43) si fa più agevolmente sostituendo per $\eta + \tau \geq 1$ alle (38) le equivalenti proprietà di media

$$\overline{X_5 \frac{\partial P_t}{\partial x_1}} + \overline{X_4 \frac{\partial P_t}{\partial x_2}} = 0, \qquad (t = 3, 4 \ldots). \tag{47}$$

Posto

$$\alpha_{qr}^{(t)} = \frac{1}{A\rho_q^2} \int_{A^*} P_q \frac{\partial P_t}{\partial x_r} dA^*, \quad (q = 0, 1, \ldots;\ t = 3, 4, \ldots;\ r = 1, 2), \tag{48}$$

si ha, evidentemente

$$\frac{\partial P_t}{\partial x_r} = \sum_{q=0}^{t'} \alpha_{qr}^{(t)} P_q, \qquad (r = 1, 2;\ t = 3, 4, \ldots), \tag{49}$$

ove $t' + 1$ indica il numero dei polinomi P_0, P_1, ecc., il cui grado è inferiore di un' unità a quello di P_t.

---

[7]) Loco cit., in nota [2]).

In base a (49) le (47) si scrivono

$$(50)\qquad \sum_{q=0}^{t'} [\alpha_{q1}^{(t)}\overline{X_5P_q} + \alpha_{q2}^{(t)}\overline{X_4P_q}] = 0\,, \qquad (t = 3,\, 4,\, \ldots)$$

e, tenuto conto di (6), (10), (40), (41), si traducono nelle equazioni

$$(51)\qquad \sum_{q=3}^{t'} [\alpha_{q1}^{(t)}\overline{X_5P_q} + \alpha_{q2}^{(t)}\overline{X_4P_q}] = \frac{1}{A}(\alpha_{01}^{(t)}R_1 + \alpha_{02}^{(t)}R_2) - \frac{1}{2}c_{20}\alpha_{11}^{(t)} -$$
$$-\frac{1}{2}c_{02}\alpha_{12}^{(t)} - \frac{c_{11}}{2}(\alpha_{21}^{(t)} + \alpha_{12}^{(t)}) + \frac{M_3}{2A}(\alpha_{12}^{(t)} - \alpha_{21}^{(t)}), \qquad (t = 3,\, 4,\, \ldots).$$

Denoto con I_m^* l'insieme di tutte le coppie $\overline{X_rP_q}$ $(r = 4, 5)$, soddisfacenti alle (51) per $t' = 3,\, 4,\, \ldots,\, m$. *Le funzioni* X_r, $(r = 4,\, 5)$, *definite dalle* (46) *soddisfano alle proprietà di media* (6), (10) *e quasiovunque alle equazioni* (2), (11) *quando e soltanto quando gli sviluppi* (43) *vengono costruiti con coppie* $\overline{X_rP_t}$ *dell'insieme* I_m^*.

Pongo

$$(52)\qquad I_m = A\sum_{t=3}^{m}\frac{m_{44}\overline{X_4P_t}^2 + m_{55}\overline{X_5P_t}^2}{\rho_t^2} - 2\left[\frac{m_{13}R_2}{\rho_2^2}\overline{X_4P_3} + \right.$$
$$\left. + \frac{m_{23}R_1}{\rho_1^2}\overline{X_5P_4}\right].$$

È facile riconoscere che se nell'espressione (24) di I si identificano le X_r con le $X'_r + X''_{mr}$ ciò che si ottiene differisce da I_m solo per termini noti.

Per la proprietà di minimo segnalata nel numero precedente si deduce che le $X'_r + X''_{rm}$, $(r = 4, 5)$, *debbono ritenersi approssimazioni polinomiali delle* X_4, X_5 *che effettivamente si presentano nel problema di De Saint-Venant allora e soltanto allora che le* X''_{rm} *vengono costituite in base a* (43) *con quelle determinazioni degli* $\overline{X_rP_t}$ *che minimizzano* [8]) *l'espressione* (52) *di* I_m *nell'insieme* I_m^*.

---

[8]) Si riconosce — come nel problema generale d'integrazione [vedi loco cit. in nota [2])] — che le singole approssimazioni polinominali soddisfano alle condizioni d'integrabilità.

Anzi si può affermare [9]): *la soluzione del problema di De Saint-Venant per i corpi della classe C^* è espressa dalle* (1), (5), (15), (21) *e dalla coppia di caratteristiche X_4, X_5 definite in base a* (42), (43), (45), (46) *quando e soltanto quando gli $\overline{X_r P_t}$ che intervengono nelle* (43) *sono quelli che minimizzano I_m nell'insieme I_m^**.

OSSERVAZIONE: Ogniqualvolta si ha

$$R_1 = R_2 = M_3 = 0 \,, \tag{53}$$

i secondi membri delle (51) risultano nulli [vedi (39)]. Ne segue che il minimo di I_m nell' insieme I_m^* si consegue per

$$\overline{X_r P_t} = 0 \,, \qquad (r = 4, 5 \;\; t = 3, 4, \ldots) \tag{54}$$

e le X_4, X_5 risultano uguali allo zero [vedi (39)] com' era da prevedersi.

§ 5. - Il problema della torsione.

Sia

$$R_1 = R_2 = R_3 = M_1 = M_2 = 0 \;; \qquad M_3 \neq 0 \,. \tag{55}$$

Può riuscire utile osservare che in base a (37), (48) è

$$\alpha_{12}^{(t)} - \alpha_{21}^{(t)} = \frac{1}{A}\int_{A^*}\left(\frac{x_1}{\rho_1^2}\frac{\partial P_t}{\partial x_2} - \frac{x_2}{\rho_2^2}\frac{\partial P_t}{\partial x_1}\right)dA^* = - \tag{56}$$

$$- \frac{1}{2A}\int_{l^*} P_t \frac{d}{ds}\left(\frac{x_1^2}{\rho_1^2} + \frac{x_2^2}{\rho_2^2}\right)ds \,, \qquad (t = 3, 4, \ldots).$$

Pertanto le (51), tenuto conto di (39), (55) nel problema della torsione si scrivono

$$\sum_{q=3}^{t'} [\alpha_{q1}^{(t)}\overline{X_5 P_q} + \alpha_{q2}^{(t)}\overline{X_4 P_q}] = - \frac{M_3}{4A}\int_{l^*} P_t \frac{d}{ds}\left(\frac{x_1^2}{\rho_1^2} + \frac{x_2^2}{\rho_2^2}\right)ds \,, \tag{57}$$

$$(t = 3, 4, \ldots).$$

Si riconosce subito che nel caso di un cilindro ellittico le

---

[9]) Non mi preoccupo delle questioni di convergenza connesse al metodo esposto che si lasciano trattare come nel problema generale considerato in loco cit. in nota [2]).

(57) hanno nulli i secondi membri e il minimo di I_m [vedi (55)] si consegue con l'annullarsi delle $\overline{X_r P_t}$, $(r = 4, 5;\ t = 3, 4 \ldots)$. Tenuto conto delle (55) si ottiene così per X_4, X_5 la nota soluzione lineare rappresentata dalle (42), (46) per $X_r'' \equiv 0$, $(r = 4, 5)$.

§ 6. Flessione non uniforme di un cilindro ellittico.

È ben naturale che nei problemi della estensione semplice e della flessione uniforme come pure in quello della torsione di un cilindro ellittico si ottengano nel caso di corpi anisotropi le medesime soluzioni del caso isotropo data la linearità delle caratteristiche di tensione e loro conseguente indipendenza dalla natura del sistema continuo considerato. Lo stesso non può presumersi nel caso della flessione non uniforme di un cilindro ellittico dato che in tal caso, se il corpo è isotropo, lo stato tensionale — com'è noto — è rappresentato da funzioni di secondo grado nelle coordinate con coefficienti dipendenti dalle costanti elastiche del sistema.

Non mi sembra superfluo pertanto dimostrare che *il problema della flessione non uniforme di un cilindro ellittico porta a caratteristiche di tensione espresse da polinomi di secondo grado nelle coordinate non solo per i corpi isotropi ma anche per ogni corpo della classe C^*.* Sia dunque

$$R_2 = R_3 = M_1 = M_2 = M_3 = 0\,, \qquad R_1 \neq 0 \tag{58}$$

e siano a_1 e a_2 le lunghezze dei semiassi dell'ellisse che costituisce la sezione normale di C.

È facile controllare che insieme alle (37) si ha

$$P_3 = x_1^2 - \frac{a_1^2}{4}, \quad P_4 = x_2^2 + \frac{a_2^2}{3a_1^2}x_1^2 - \frac{a_2^2}{3}, \quad P_5 = x_1 x_2\,. \tag{59}$$

Posto

$$\left\{\begin{aligned} X_3 &= -\frac{4R_1}{Aa_1^2}x_1x_3\,,\\ X_4 &= \frac{4}{3a_1^2}\left(\frac{R_1}{A} - \frac{9}{a_2^2}\overline{X_5P_4}\right)P_5\,,\\ X_5 &= \frac{R_1}{A}\left(-1 + \frac{4P_3}{3a_1^2}\right) + \frac{18}{a_2^4}\overline{X_5P_4}\cdot P_4\,, \end{aligned}\right. \tag{60}$$

è facile riconoscere che la (60, 1) coincide con ciò che diviene l'espressione (5) di X_3 in base a (15), (21), (58) mentre le X_4, X_5 fornite dalle (60, 2) (60, 3) soddisfano in base a (59) alle equazioni (2) e (11), qualunque sia $\overline{X_5 P_4}$.

Ne segue che tali espressioni di X_4, X_5 verificano [tenuto conto di (39), (48), (58) le (51) per ogni t, mentre danno

$$\overline{X_4 P_3} = \overline{X_4 P_4} = \overline{X_5 P_5} = 0 , \quad \overline{X_r P_t} = 0 , \quad (r = 4, 5 ; \ t \geq 6). \tag{61}$$

Inoltre la condizione di minimo di I_m per $m = 5$ implica proprio le (61).

Si deduce che se nelle (60) si identifica $\overline{X_5 P_4}$ con quella determinazione che rende minimo I_5 le espressioni corrispondenti di X_4, X_5 minimizzano I_m nell' insieme I_m^* anche per ogni $m > 5$ e rappresentano pertanto la soluzione del problema di De Saint-Venant della flessione non uniforme.