

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

STEFANO GUAZZONE

**Sulle ipersuperficie di S_k e di ordine s che appartengono
alla ipersuperficie generale di ordine n di S_r ($r > k$)**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 21 (1952), p. 243-251

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__243_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE IPERSUPERFICIE DI S_k E DI ORDINE s CHE APPARTENGONO ALLA IPERSUPERFICIE GENERALE DI ORDINE n DI S_r ($r > k$)

Nota (*) di STEFANO GUAZZONE (a Trieste)

La questione relativa all'esistenza di spazi lineari di una data dimensione $k-1$ nella ipersuperficie generale di un dato ordine n di S_r ($r > k$) ha ricevuto già la soluzione, attraverso i lavori di U. MORIN, B. SEGRE, A. PREDONZAN ¹⁾. Quest'ultimo Autore ha dato anche la condizione per l'esistenza di spazi lineari sulle varietà «intersezioni complete» di più forme. Essendomi proposto lo studio degli analoghi problemi che si presentano per varietà che non siano spazi lineari, espongo in questa Nota i risultati cui sono finora pervenuto. Essi si riassumono nella seguente proposizione.

« Condizione necessaria e sufficiente affinché la ipersuperficie generale F_{r-1}^n di ordine n , di S_r , contenga qualche ipersuperficie F_{k-1}^s di S_k di ordine s , con $2 \leq s \leq n - s$, è che

*) Pervenuta in Redazione il 20 gennaio 1952. Di un risultato parziale rispetto a quello contenuto in questo lavoro è stata fatta comunicazione dall'A. al IV Congresso dell'Unione Matematica Italiana (Taormina, 25-30 ott. 1951).

¹⁾ Ved. U. MORIN, *Sull'insieme degli spazi lineari contenuti in una ipersuperficie algebrica*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 24, p. 188, 1936; B. SEGRE, *Intorno agli S_k che appartengono alle forme generali di dato ordine*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, (8), 4, p. 261 e p. 341, 1948; A. PREDONZAN, *Intorno agli S_k che appartengono alla varietà intersezione completa di più forme*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, (8), 5, p. 238, 1948.

sia soddisfatta la relazione

$$(1) \quad r \geq k + \frac{1}{k+1} \left[\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-s}{k} - \binom{k+s}{k} + 1 \right],$$

o l'altra equivalente

$$(1') \quad \delta \geq 0$$

dove

$$(1'') \quad \delta = (r-k)(k+1) - \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-s}{k} + \binom{k+s}{k} - 1.$$

Se $\delta = 0$, F_{r-1}^n contiene un numero finito di F_{k-1}^s . Se $\delta > 0$ le F_{k-1}^s giacenti su F_{r-1}^n costituiscono un sistema algebrico infinito di dimensione δ , irriducibile nel campo di razionalità dei coefficienti di F_{r-1}^n .

OSSERVAZIONE. — Questa proposizione risolve completamente il problema relativo alla esistenza di ipersuperficie sulle forme generali maggiormente estese F_{r-1}^n . Infatti la (1) è anche necessaria e sufficiente per l'esistenza di F_{k-1}^{n-s} su F_{r-1}^n , e δ è anche la dimensione del sistema delle F_{k-1}^{n-s} ; quest'ultimo è birazionalmente identico a quello costituito dalle F_{k-1}^s . Fanno eccezione le F_{k-1}^{n-1} , la cui esistenza equivale a quella degli spazi lineari S_{k-1} , le quali F_{k-1}^{n-1} però costituiscono un sistema più volte infinito di quello degli S_{k-1} .

Dimostro anzitutto che la (1) è necessaria; indi ne provo la sufficienza, nei paragrafi 2, 3 e 4. Sia per la prima che per la seconda parte della dimostrazione mi servo di particolari corrispondenze algebriche irriducibili, definite dalla relazione di appartenenza, e che intercedono fra sistemi di ipersuperficie F_{r-1}^n e sistemi di ipersuperficie F_{k-1}^s , applicando ad esse il principio del computo delle costanti.

1. — Le F_{k-1}^s contenute negli S_k di S_r costituiscono nella loro totalità un sistema razionale, e quindi irriducibile, di dimensione:

$$(2) \quad a = (r-k)(k+1) + \binom{k+s}{k} - 1.$$

Le ipersuperficie F_{r-1}^n che passano per una qualunque fissata F_{k-1}^s costituiscono un sistema lineare di dimensione:

$$(3) \quad b = \binom{n+r}{r} - \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-s}{k} - 1.$$

Consideriamo in S_r la corrispondenza algebrica che associa fra di loro una F_{k-1}^s ed una F_{r-1}^n quando si appartengono. Per essa ad ogni elemento F_{k-1}^s della totalità irriducibile ∞^a viene associato un sistema lineare di dimensione costante, b , di F_{r-1}^n ²⁾. Si tratta dunque di una corrispondenza irriducibile ³⁾, ed irriducibile è pure il sistema di tutte le F_{r-1}^n che contengono qualche F_{k-1}^s , sistema la cui dimensione indicheremo con:

$$(4) \quad c = \binom{n+r}{n} - 1 - \varepsilon,$$

ove ε è un opportuno intero non negativo. Vale allora il principio del computo delle costanti, in base al quale il numero:

$$(5) \quad d = a + b - c$$

è la dimensione del sistema delle F_{k-1}^s contenute nella F_{r-1}^n generica della totalità ∞^a sopra citata. Confrontando la (5) con le (2), (3), (4) e (1'') si ottiene:

$$(6) \quad d = \delta + \varepsilon.$$

²⁾ L'equazione di una F_{r-1}^n passante per una qualunque fissata F_{k-1}^s può scriversi, a meno di un cambiamento di riferimento che porti lo S_k di appartenenza di F_{k-1}^s nello $S_k: x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_r = 0$, al seguente modo:

$$\sum_{k+1}^r x_i f_i^{(n-1)}(x_0 \dots x_r) + f^{(n-s)}(x_0 \dots x_k) \cdot g^{(s)}(x_0 \dots x_k) = 0;$$

e in questa equazione rimane sempre lo stesso numero di coefficienti indeterminati, comunque si fissi in precedenza la forma g (non identicamente nulla).

³⁾ Ved. F. SEVERI, *Introduzione alla Geometria Algebrica I*, Roma, 1948, p. 156. Oppure: B. L. VAN DER WAERDEN, *Einfuehrung in die Alg. Geometrie*, 1939, p. 143.

Se la F_{r-1}^n generica di S_r contiene qualche F_{k-1}^s , cioè se nella (5) $\epsilon = 0$, la (6), che diventa: $d = \delta$, ha per conseguenza:

$$(1') \quad \delta \geq 0;$$

quindi la (1') (o la (1)) è condizione necessaria affinché sia verificata dalla generica F_{r-1}^n la proprietà che ci interessa. Si osservi che in ogni caso, cioè anche se non è soddisfatta la (1), il sistema ∞^d delle F_{k-1}^s giacenti sulla generica fra le F_{r-1}^n che ne contengono qualcuna, è un sistema algebrico *irriducibile* nel corpo dei coefficienti della detta F_{r-1}^n , e quindi è un sistema « puro »⁴⁾.

2. — Facciamo vedere che la (1), per $n - s \geq s \geq 2$ è anche sufficiente ad assicurare che la generica F_{r-1}^n contiene qualche F_{k-1}^s . Facciamo vedere cioè che, con le limitazioni poste per n ed s , dalla (1) segue nella (4): $\epsilon = 0$.

Si tenga anche presente che ciò ha interesse solo per $k \geq 2$.

Si fissi in S_r un S_k , diciamo \bar{S}_k , e in \bar{S}_k si fissi, genericamente, una F_{k-1}^n spezzata in una F_{k-1}^s ed in una residua ipersuperficie di ordine $n - s$:

$$\bar{F}_{k-1}^n = \bar{F}_{k-1}^s + \bar{F}_{k-1}^{n-s}$$

Il sistema lineare Σ delle F_{r-1}^n passanti per \bar{F}_{k-1}^n , ha la dimensione:

$$(7) \quad b^* = \binom{n+r}{n} - \binom{n+k}{n}.$$

La generica F_{r-1}^n di questo sistema lineare contiene qualche F_{k-1}^s ed è generica fra le F_{r-1}^n di S_r che godono di questa proprietà. Perciò, in base al computo di costanti eseguito al n. 1, essa contiene un sistema algebrico di F_{k-1}^s di dimensione:

$$(8) \quad d = \delta + \epsilon.$$

Gli analoghi sistemi ∞^d contenuti nelle F_{r-1}^n di Σ danno luogo, presi nella loro totalità, ad un unico sistema algebrico (più ampio, in generale), di F_{k-1}^s , il sistema di *tutte* le F_{k-1}^s

⁴⁾ Ved. VAN DER WAERDEN, *op. cit.*, pp. 141 e 123.

giacenti in *tutte* le F_{r-1}^n di Σ ; sistema che eventualmente può essere riducibile, anche in parti di dimensione diversa. Or bene: si può staccare da questo sistema una componente irriducibile, che indicheremo con M , fornita delle seguenti due proprietà:

- I) La *generica* F_{r-1}^n di Σ contiene ∞^a F_{k-1}^s di M .
 II) La corrispondenza che associa una F_{r-1}^n di Σ ed una F_{k-1}^s di M quando si appartengono è irriducibile.

Infatti, sia M' il minimo sistema algebrico di F_{k-1}^s contenente tutte le F_{k-1}^s appartenenti alle F_{r-1}^n generiche di Σ , cioè il sistema costituito dalle F_{k-1}^s appartenenti alle F_{r-1}^n generiche, e dalle F_{k-1}^s « di accumulazione » di quelle. M' è tale che ogni generica F_{r-1}^n di Σ contiene ∞^a F_{k-1}^s di M' . Esiste quindi almeno una componente irriducibile di M' , diciamo M , che gode anch'essa di questa proprietà. Facciamo allora corrispondere fra di loro una F_{r-1}^n di Σ ed una F_{k-1}^s di M quando si appartengono. Si ottiene una corrispondenza algebrica, certamente non degenera su entrambe le varietà Σ ed M , e tale da far corrispondere ad elementi generici di M elementi generici di Σ (gli elementi di M che non appartengono ad elementi generici di Σ sono di accumulazione per quelli che soddisfano alla proprietà contraria, e quindi costituiscono una sottovarietà di M). Di più, questa corrispondenza è irriducibile, perchè, pensata nel verso da M a Σ , associa ad un elemento generico di M un sistema lineare di dimensione costante di F_{r-1}^n . Si può applicare allora un noto criterio di irriducibilità per le corrispondenze⁵⁾, tenendo presente che, la totalità dei sistemi lineari di F_{r-1}^n , subordinati a Σ , e aventi come varietà base (semplice) le F_{k-1}^s generiche di M , ha, come sistema minimo contenente, Σ stesso. Concludendo M soddisfa alle due proprietà richieste.

Supponiamo in primo luogo che lo S_k di appartenenza della generica F_{k-1}^s di M sia sghembo con \bar{S}_k . Allora, indicando con μ la dimensione di M , e con γ la dimensione del

⁵⁾ Ved. « Complemento II », a pag. 160 di SEVERI, *op. cit.*

sistema lineare Γ delle F_{r-1}^n passanti per una generica F_{k-1}^n di M e appartenenti a Σ , si può scrivere:

$$(8) \quad \mu = (r-k)(k+1) + \binom{k+s}{s} - 1 - \varepsilon_0, \quad (\varepsilon_0 \geq 0);$$

$$(9) \quad \gamma = b^* - \left[\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-s}{k} \right].$$

Per il principio del computo delle costanti applicato alla corrispondenza fra Σ ed M :

$$(10) \quad b^* + \delta + \varepsilon = \mu + \gamma,$$

da cui, tenendo conto delle (7), (1''), (8) e (9):

$$(11) \quad \varepsilon + \varepsilon_0 = 0,$$

cioè $\varepsilon = 0$, e dunque, nell'ipotesi fatta la (1) è sufficiente.

3. — Come seconda alternativa per il comportamento di M rispetto ad \bar{S}_k e ad \bar{F}_{k-1}^n , supponiamo che la generica F_{k-1}^n di M abbia il suo S_k di appartenenza incidente ad \bar{S}_k secondo un S_h ($h < k$), senza che questo S_h sia contenuto in \bar{F}_{k-1}^n . Allora le dimensioni di M e Γ , che adesso indichiamo con μ_1 e γ_1 , assumono le espressioni:

$$(12) \quad \mu_1 = (r-k+h+1)(k-h) + \binom{k+s}{s} - \binom{h+s}{s} - \varepsilon_1$$

con $\varepsilon_1 \geq 0$, e

$$(13) \quad \gamma_1 = b^* - \left[\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-s}{k} \right] + \left[\binom{n+h}{h} - \binom{n+h-s}{h} \right].$$

Quindi l'eguaglianza $b^* + \delta + \varepsilon = \mu_1 + \gamma_1$, che vale adesso al posto della (10), mediante le opportune sostituzioni, diventa la:

$$(14) \quad (r-2k+h)(h+1) + \varepsilon + \varepsilon_1 = \binom{n+h}{h} - \binom{n+h-s}{h} - \binom{h+s}{h} + 1$$

equivalente alla disequaglianza:

$$(15) \quad (r-2k+h)(h+1) + \varepsilon \leq \binom{n+h}{h} - \binom{n+h-s}{h} - \binom{h+s}{h} + 1.$$

Ma questa diseuguaglianza è incompatibile con le relazioni (1) e $\varepsilon \geq 1$.

Infatti è, per ogni $n \geq 2s \geq 4$, $k \geq 2$ e $h < k$:

$$(16) \quad \frac{1}{k+1} \left[\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-s}{k} - \binom{k+s}{k} \right] + \frac{1}{k+1} > \\ > \frac{1}{h+1} \left[\binom{n+h}{h} - \binom{n+h-s}{h} - \binom{h+s}{h} \right] + k - h.$$

La (16) si dimostra vera in primo luogo per $n = 2s$, nel qual caso particolare si riduce alla:

$$(17) \quad \frac{1}{k+1} \left[\binom{k+2s}{k} - 2 \binom{k+s}{k} \right] + \frac{1}{k+1} > \frac{1}{k+1} \left[\binom{h+2s}{h} - \right. \\ \left. - 2 \binom{h+s}{h} \right] + k - h.$$

La (17) ammette una verifica diretta abbastanza semplice per $s = 2$, e si dimostra vera in generale con procedimento di induzione da s ad $s + 1$.

Procedendo infine per induzione da n ad $n + 1$, si suppone vera la (16) e si dimostra che non può aversi simultaneamente:

$$(18) \quad \frac{1}{h+1} \left[\binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k+1-s}{k} - \binom{k+s}{k} \right] + \frac{1}{k+1} \leq \\ \leq \frac{1}{h+1} \left[\binom{n+h+1}{h} - \binom{n+h+1-s}{h} - \binom{h+s}{h} \right] + k - h.$$

Infatti dalle (18) e (16), sottraendo membro a membro, seguirebbe:

$$(19) \quad \frac{1}{k+1} \left[\binom{n+k}{k-1} - \binom{n+k-s}{k-1} \right] < \frac{1}{h+1} \left[\binom{n+h}{h-1} - \binom{n+h-s}{h-1} \right]$$

e quest'ultima diseuguaglianza è assurda. Così la (16) è completamente provata. L'assurdo proviene dal fatto che le ipotesi fatte sul comportamento di M rispetto ad S_k (e che implicano $h \geq 0$) o non si verificano, oppure, se si verificano, sono incompatibili con la $\varepsilon > 0$.

4. - Ammettiamo infine che l' S_h di incidenza fra \overline{S}_k e l' S_k di appartenenza della generica F_{k-1}^s di M sia contenuto in \overline{F}_{k-1}^s . Allora, essendo la \overline{F}_{k-1}^s spezzata, si possono dare a priori i seguenti quattro casi (eventualmente non escludentisi a vicenda):

- A) Il detto S_h giace in F_{k-1}^s e nella F_{k-1}^s che lo individua.
 B) » » » » » ma non nella F_{k-1}^s che lo individua.
 C) » » » » » \overline{F}_{k-1}^{s-s} e nella F_{k-1}^s che lo individua.
 D) » » » » » ma non nella F_{k-1}^s che lo individua.

In tutti i quattro casi, delle dimensioni di M e Γ si possono dare delle espressioni (che indicheremo con $\mu_a, \gamma_a; \dots; \mu_d, \gamma_d$) secondo l'elenco:

$$A) (r - k + h + 1)(k - h) - \binom{h + s}{h} + \binom{k + s}{k} - 1 - \binom{h + s}{h};$$

$$\left\{ b^* - \left[\binom{n + k}{k} - \binom{n + k - s}{k} \right] \right\} + \binom{n + h}{h}.$$

$$B) (r - k + h + 1)(k - h) - \binom{h + s}{h} + \binom{k + s}{k} - 1;$$

$$\left\{ b^* - \left[\binom{n + k}{k} - \binom{n + k - s}{k} \right] \right\} + \left[\binom{n + h}{h} - \binom{n + h - s}{h} \right].$$

$$C) (r - k + h + 1)(k - h) - \binom{n + h - s}{h} + \binom{k + s}{k} - 1 - \binom{h + s}{h};$$

$$\left\{ b^* - \left[\binom{n + k}{k} - \binom{n + k - s}{k} \right] \right\} + \binom{n + h}{h}.$$

$$D) (r - k + h + 1)(k - h) - \binom{n + h - s}{h} + \binom{k + s}{k} - 1;$$

$$\left\{ b^* - \left[\binom{n + k}{k} - \binom{n + k - s}{k} \right] \right\} + \left[\binom{n + h}{h} - \binom{n + h - s}{h} \right].$$

Dove in ogni riga compare prima l'espressione relativa ad M , poi quella relativa a Γ .

Nei casi B), C), D), le somme $\mu_b + \gamma_b \dots$ delle quantità che compaiono nelle corrispondenti righe dell'elenco sono sempre minori di $\mu_1 + \gamma_1$ (cfr. le (12) e (13)), e ciò basta ad assicurare che le relazioni, valide per il principio del computo delle costanti: $b^* + \delta + \varepsilon = \mu_b + \gamma_b$; ..., se vale la (1) sono incompatibili con $\varepsilon > 0$.

Resta da esaminare il caso A). La relazione $b^* + \delta + \varepsilon = \mu_a + \gamma_a$ mediante le opportune sostituzioni fornisce una disuguaglianza analoga alla (16) che, con semplici calcoli e tenendo conto che è adesso $k \geq 2h + 1$, si dimostra essere incompatibile con la (1) ed $\varepsilon > 0$.

Essendo state considerate tutte le alternative possibili per il comportamento di M , il teorema è completamente dimostrato.