Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Alberto Sambo

Sulla derivazione sotto il segno di integrale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 21 (1952), p. 252-255

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__252_0>

SULLA DERIVAZIONE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

Nota (*) *di* ALBERTO SAMBO (*a Padova*)

In questa nota mi propongo di far vedere che un recente risultato di VOLPATO sulla derivazione sotto il segno di integrale [1]) si può dedurre, tenendo conto di alcune osservazioni fatte dallo stesso VOLPATO, da un teorema di SCORZA-DRAGONI sulla derivazione delle funzioni composte [2]).

Il teorema di Volpato è il seguente:

« *Siano* $\alpha(y)$ *e* $\beta(y)$ *due funzioni assolutamente continue e monotone in senso stretto nell' intervallo* $c \leq y \leq d$ *tali che*

$$\alpha(y) < \beta(y) \quad \textit{per} \quad c < y < d.$$

Nell' insieme

$$B: \quad \alpha(y) \leq x \leq \beta(y) \qquad\qquad c \leq y \leq d$$

sia data una funzione $f(x, y)$ *soddisfacente alle seguenti condizioni*

1ª) *È misurabile rispetto ad* x.

2ª) *È continua rispetto ad* y.

3ª) *Esiste una funzione sommabile non negativa della sola* x, $M(x)$, *per cui*

$$I^{a}) \ |f(x, y)| < M(x)$$

$$II^{a}) \ |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < |y_1 - y_2| \cdot M(x),$$

---

*) Pervenuta in Redazione il 19 febbraio 1952.

1) M. VOLPATO, *Sulla derivazione sotto il segno di integrale* [« Rend. Acc. Naz. Lincei », Vol. XII (1952), pag. 146].

2) G. SCORZA DRAGONI, *Un' osservazione sulla derivata di una fun-*

di guisa che su quasi tutte le intersezioni di B con le parallele all'asse x esiste quasi ovunque $f_y'(x, y)$ finita.

Sotto queste condizioni la funzione

$$\Phi(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)dx$$

è in $c \vdash\!\dashv d$ *assolutamente continua e riesce quasi dappertutto*

$$\Phi'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y'(x, y)dx + \beta'(y)f(\beta(y), y) - \alpha'(y)f(\alpha(y), y).$$

Detti a e b rispettivamente il minimo di $\alpha(y)$ e il massimo di $\beta(y)$, si può addirittura supporre, come ha fatto vedere Volpato, confr. loco cit. [1]), che $f(x, y)$ soddisfaccia alle 1^a), 2^a), 3^a) nel rettangolo

$$R: \quad a \leq x \leq b \qquad c \leq y \leq d.$$

Poichè risulta

$$\Phi(y) = \int_a^{\beta(y)} f(x, y)dx - \int_a^{\alpha(y)} f(x, y)dx, \tag{1}$$

basta dimostrare che la tesi sussiste per ognuna delle funzioni di y a secondo membro della (1), per es. per la funzione

$$\Gamma(y) = \int_a^{\alpha(y)} f(t, y)dt.$$

Ora posto

$$F(x, y) = \int_a^x f(t, y)dt,$$

risulta

$$\Gamma(y) = F(\alpha(y), y).$$

---

zione composta [« Rend. Sem. Matem. dell' Univ. di Padova », Vol. XX, (1951), pagg. 462-467; pag. 462].

La funzione $\Gamma(y)$ è assolutamente continua, confr. loco cit. [1]), e quindi in $c \vdash\!\dashv d$ è quasi dappertutto derivabile.

In virtù del teorema di SCORZA-DRAGONI basta dimostrare l'esistenza quasi dappertutto in $c \vdash\!\dashv d$ delle $F_x'(\alpha(y), y)$, $F_y'(\alpha(y), y)$ per dedurre che risulta

$$\Gamma'(y) = F_y'(\alpha(y), y) + F_x'(\alpha(y), y) \, . \, \alpha'(y) \, .$$

Ora, come è noto, è

$$F_y'(x, y) = \int_a f_y'(t, y) dt$$

se y è un punto di $c \vdash\!\dashv d$ tale che sulla relativa orizzontale esista quasi dappertutto la f'_y.

Quanto alla esistenza di $F_x'(\alpha(y), y)$, essa segue da un altro teorema di SCORZA-DRAGONI [3]). Infatti detta $\bar{\alpha}(x)$ la funzione inversa di $\alpha(y)$ e a' il massimo di $\alpha(y)$, la $\bar{\alpha}(x)$ è, confr. loco cit. [1]), monotona in senso stretto ed assolutamente continua, e quindi gode della proprietà (N) di Lusin [4]). Per dimostrare l'esistenza di $F_x'(x, y)$ sui punti di $x = \alpha(y)$, per quasi tutti gli y di $c \vdash\!\dashv d$, basta dimostrare quella di $F_x'(x, y)$ sui punti di $y = \bar{\alpha}(x)$ per quasi tutti gli x di $a \vdash\!\dashv a'$. Ora è

$$\frac{F(x + h, \bar{\alpha}(x)) - F(x, \bar{\alpha}(x))}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t, \bar{\alpha}(x)) dt \, ,$$

e per il teorema di SCORZA-DRAGONI citato in [3]), risulta per quasi tutti gli x di $a \vdash\!\dashv a'$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t, \bar{\alpha}(x)) dt = f(x, \bar{\alpha}(x)) \, ,$$

epperò

$$F_x'(x, \bar{\alpha}(x)) = f(x, \bar{\alpha}(x)) \, , \tag{2}$$

---

[3]) G. SCORZA DRAGONI, *Una applicazione della quasi continuità semiregolare delle funzioni di due variabili, continue rispetto ad una variabile e misurabili rispetto all'altra* [« Rend. Acc. Naz. Lincei », Vol. XII (1952), pagg. 55-61; pag. 61].

[4]) SAKS, *Theory of the integral* [Varzava, (1937)], pag. 224.

donde

$$F_x'(\alpha(y), y) = f(\alpha(y), y),$$

per quasi tutti gli y di $c \vdash\!\dashv d$.

Raccogliendo le osservazioni fatte ed applicando il teorema di SCORZA-DRAGONI sulla derivazione delle funzioni composte, segue appunto

$$\Gamma'(y) = \int_a^{\alpha(y)} f_y'(t, y)dt + \alpha'(y) \cdot f(\alpha(y), y),$$

come volevasi dimostrare.