RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCESCO STOPPELLI

# Sui fenomeni giroscopici in un solido qualsiasi

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 21 (1952), p. 25-43

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__25_0>

# SUI FENOMENI GIROSCOPICI IN UN SOLIDO QUALSIASI

*Nota* (*) *di* FRANCESCO STOPPELLI (*a Napoli*)

In questa Nota mi occupo del moto di un solido qualunque $S$ con un punto fisso $O$, soggetto a forze aventi, rispetto ad $O$, momento $\boldsymbol{M}$ di direzione qualsiasi e al quale sia stata impressa una fortissima rotazione iniziale $\omega_0 = r_0 \boldsymbol{k}$ intorno ad un asse $a$ di rotazione permanente stabile. Scopo di essa è di estendere a questo caso, con opportune modifiche, alcune considerazioni sul principio dell' effetto giroscopico contenute in una mia precedente Memoria [1]) e sopratutto di mostrare che i fenomeni giroscopici più cospicui (tenacia dell' asse di rapida rotazione, tendenza di esso a disporsi normalmente alla forza) costituiscono una proprietà specifica degli assi di rotazione permanente stabili e non dipendono ulteriormente dalla struttura di $S$ nè dalla direzione del momento $\boldsymbol{M}$.

Nella citata Memoria avevo supposto il momento $\boldsymbol{M}$ ortogonale ad $a$ ed avevo dimostrato che l' equazione fornita dal principio dell' effetto giroscopico:

$$Cr_0 \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{M} \tag{I}$$

dà un' approssimazione dell' atto di moto solo se $S$ è un giroscopio ed $\boldsymbol{M}$ è inizialmente nullo; nel caso invece che queste

*) Pervenuta in Redazione il 26 marzo 1952.

[1]) Cfr. F. STOPPELLI, *Sul principio dell' effetto giroscopico* [« Giornale di Matematiche » di Battaglini; serie IV, vol. LXXX, 1950-51, pagg. 14-38].

due condizioni non siano verificate, la (I) — sebbene non dia un' approssimazione dell' atto di moto — permette di determinare, a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto ad $\frac{1}{r_0}$, gli angoli di Eulero e quindi la posizione di $S$.

Supponiamo ora che $\boldsymbol{M}$ non sia più ortogonale ad $a$ e diciamo $(Q, \boldsymbol{F})$ un vettore che abbia momento $\boldsymbol{M}$ rispetto ad $O$, $Q'$ la proiezione ortogonale di $Q$ su $a$, $\boldsymbol{M}^*$ il momento di $(Q' \boldsymbol{F})$ rispetto ad $O$ e $\theta$, $\psi$, $\varphi$ gli angoli di Eulero. Il risultato a cui pervengo in questo lavoro è che gli angoli di Eulero $\theta$, $\psi$, $\varphi$ si possono dedurre, a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto ad $\frac{1}{r_0}$, dalla relazione:

$$C\bar{r}_0 \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{M}^* \tag{II}$$

dove si è posto:

$$\bar{r}_0 = r_0 + \left[\frac{1}{Cr}\frac{\partial M_a}{\partial \varphi}\right]_{t=0}$$

In altri termini, nei limiti dell' approssimazione considerata, le espressioni $\theta(t)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$ degli angoli di Eulero coincidono con quelle che si otterrebbero nel caso che $S$ fosse un giroscopio, avente lo stesso momento d' inerzia $C$ rispetto ad $a$ (coincidente con l' asse giroscopico), dotato di una fortissima rotazione iniziale $\omega(0) = \bar{r}_0\boldsymbol{k}$ e sollecitato dalla forza $(Q', \boldsymbol{F})$. Ciò giustifica tra l' altro quanto si è detto a principio a proposito dei fenomeni giroscopici.

Allo scopo di dare un esempio concreto a cui non sono applicabili i risultati della citata Memoria e che invece rientra nelle ipotesi del presente lavoro, ho considerato il caso particolare di un solido pesante al quale sia stata impressa una fortissima rotazione iniziale intorno ad un asse di rotazione permanente stabile non baricentrico.

L' estensione della (II) al caso di un solido libero è accennata alla fine della Nota.

## § 1. - *Trasformazioni preliminari delle equazioni del moto di un solido con un punto fisso.*

**1.** - Sia $S$ un solido qualsiasi, con un punto fisso $O$, denoteremo con:

$T(x, y, z)$ una terna principale d'inerzia di $S$ relativa al punto $O$; $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ i relativi versori ed $A, B, C$ i momenti (principali) d'inerzia;

$T'(\xi, \eta, \zeta)$ una terna fissa di origine $O$;

$\omega$ il vettore velocità angolare di $T$ rispetto a $T'$ e $p, q, r$ le sue componenti sugli assi di $T$;

$\theta, \psi, \varphi$ gli angoli di Eulero di $T$ rispetto a $T'$;

$\boldsymbol{M}$ il momento delle forze attive rispetto ad $O$ ed $\boldsymbol{M}_x, \boldsymbol{M}_y, \boldsymbol{M}_z$ le sue componenti sugli assi di $T$.

Poniamo inoltre

$$\frac{C-B}{A} = a, \quad \frac{C-A}{B} = b, \quad \frac{A-B}{C} = c$$

$$\frac{1}{A} M_x = f(t), \quad \frac{1}{B} M_y = g(t), \quad \frac{1}{C} M_z = h(t).$$

Con tali notazioni le equazioni differenziali del moto di $S$, nella forma di Eulero, si possono scrivere:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{p} + aqr = f(t) \\ \dot{q} - bpr = g(t) \\ \dot{r} - cpq = h(t) \\ \dot{\theta} = p \cos \varphi - q \operatorname{sen} \varphi \\ \dot{\psi} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \theta} (p \operatorname{sen} \varphi + q \cos \varphi) \\ \dot{\varphi} = r - \operatorname{cotg} \theta (p \operatorname{sen} \varphi + q \cos \varphi) \end{cases}$$

Supponiamo che l'asse $z$ di $T$ sia per $S$ un asse di rotazione permanente stabile; per es. che sia l'asse minore dell'ellissoide d'inerzia $E_0$ relativo ad $O$. In questa ipotesi la soluzione delle (1) determinata dalle condizioni iniziali:

$$(2)\qquad \begin{cases} p(0) = p_0 \quad , \quad q(0) = q_0 \quad , \quad r(0) = r_0 \\ \theta(0) = \theta_0 \quad , \quad \psi(0) = \psi_0 \quad , \quad \varphi(0) = \varphi_0 \end{cases}$$

è anche soluzione del seguente sistema di equazioni funzionali [2]):

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} & p = p_0 \cos \sqrt{ab}\, r_t^* - \sqrt{\frac{a}{b}}\, q_0 \operatorname{sen} \sqrt{ab}\, r_t^* + \\ & + \int_0^t f(\tau) \cos \sqrt{ab}(r_t^* - r_\tau^*) d\tau - \sqrt{\frac{a}{b}} \int_0^t g(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{ab}(r_t^* - r_\tau^*) d\tau \\ & q = \sqrt{\frac{b}{a}}\, p_0 \operatorname{sen} \sqrt{ab}\, r_t^* + q_0 \cos \sqrt{ab}\, r_t^* + \\ & + \sqrt{\frac{b}{a}} \int_0^t f(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{ab}(r_t^* - r_\tau^*) d\tau + \int_0^t g(\tau) \cos \sqrt{ab}(r_t^* - r_\tau^*) d\tau \\ & r - r_0 = c \int_0^t pq\, d\tau + \int_0^t h(\tau) d\tau \\ & \theta - \theta_0 = \int_0^t (p \cos \varphi - q \operatorname{sen} \varphi) d\tau \\ & \psi - \psi_0 = \int_0^t \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} (p \operatorname{sen} \varphi + q \cos \varphi) d\tau \\ & \varphi - \varphi_0 = \int_0^t [r - \operatorname{cotg} \theta (p \operatorname{sen} \varphi + q \cos \varphi)] d\tau \end{aligned} \right.$$

dove si è posto:

$$r_t^* = \int_0^t r(\tau) d\tau.$$

---

[2]) Cfr. loc. cit. in ([1]), pag. 19.

Se $z$ coincidesse con l' asse massimo di $E_0$ il sistema (3) equivalente a (1), (2) non muterebbe sostanzialmente mentre invece se $z$ coincidesse con l' asse medio (asse di rotazione permanente instabile) alle funzioni circolari degli argomenti $\sqrt{ab}r_t^*$ e $\sqrt{ab}(r_t^* - r_\tau^*)$ andrebbero sostituite le funzioni iperboliche. In quest' ultimo caso non sarebbero, ovviamente, valide le conseguenze che nei prossimi numeri dedurremo dalle (3).

**2.** - Consideriamo il sistema delle forze attive agenti su $S$: esso si potrà ridurre a due vettori di cui uno, $\boldsymbol{F}_1$, applicato nel punto fisso $O$. Se diciamo $(Q, \boldsymbol{F})$ l' altro vettore, sarà:

$$\boldsymbol{M} = (Q - O) \wedge \boldsymbol{F}.$$

Indichiamo con $F_\xi$, $F_\eta$, $F_\zeta$ le componenti di $\boldsymbol{F}$ sugli assi di $T'$; le componenti $F_x$, $F_y$, $F_z$, dello stesso vettore sugli assi mobili saranno [3]):

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} F_x &= u \cos\varphi + v \operatorname{sen}\varphi \\ F_y &= -u \operatorname{sen}\varphi + v \cos\varphi \\ F_z &= w \end{aligned} \right.$$

dove si è posto:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= F_\xi \cos\psi + F_\eta \operatorname{sen}\psi \\ v &= -F_\xi \operatorname{sen}\psi \cos\theta + F_\eta \cos\psi \cos\theta + F_\zeta \operatorname{sen}\theta \\ w &= (F_\xi \operatorname{sen}\psi - F_\eta \cos\psi) \operatorname{sen}\theta + F_\zeta \cos\theta \end{aligned} \right.$$

Indicando con $x$, $y$, $z$, le coordinate del punto $Q$ in $T$ e tenendo conto delle (4), si ha:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} M_x &= Af = zu \operatorname{sen}\varphi - zv \cos\varphi + yw \\ M_y &= Bg = zu \cos\varphi + zv \operatorname{sen}\varphi - xw \\ M_z &= Ch = (xv - yu)\cos\varphi - (xu + yv) \operatorname{sen}\varphi \end{aligned} \right.$$

---

[3]) Cfr. loc. cit. in [1]), pag. 20.

**3.** - Al n. 1 abbiamo scritto le equazioni del moto di $S$ in forma integrale. Da esse si deduce subito, tenendo anche conto delle (5) e (6), che, se le coordinate $x$, $y$, $z$ di $Q$ in $T$ e le componenti $F_\xi$, $F_\eta$, $F_\zeta$ di $F$ secondo gli assi fissi sono continue e limitate per $r_0 \to \infty$, le funzioni $p$, $q$, $r - r_0$. $\theta - \theta_0$, $\psi - \psi_0$, $\varphi - \varphi_0 - rt^*$ si mantengono limitate al divergere di $r_0$. Ad un'analisi più approfondita di tali funzioni, e quindi degli integrali del moto, conviene premettere alcune considerazioni sugli integrali che ricorrono nelle (3).

*a*) Indichiamo con $E$ una funzione delle sole variabili $t$, $\theta$, $\psi$, ed $r$, derivabile finchè occorra e poniamo:

$$G_1 = \frac{E}{r}, \quad G_2 = \frac{E}{r} \operatorname{sen} \varphi, \quad G_3 = \frac{E}{r} \cos \varphi$$

Tenendo conto delle (1) si ha:

$$\dot{G}_1 = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial E}{\partial t} + \left(\frac{\partial E}{\partial r} - \frac{E}{r}\right)h\right] + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial E}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial E}{\partial \psi}\dot{\psi} + \left(\frac{\partial E}{\partial r} - \frac{E}{r}\right)cpq\right]$$

$$\dot{G}_2 = \frac{E}{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{G}_1 \operatorname{sen}\varphi = E\cos\varphi - \frac{E}{r}\operatorname{cotg}\theta\,(p\operatorname{sen}\varphi + \\ + q\cos\varphi)\cos\varphi + \dot{G}_1\operatorname{sen}\varphi$$

$$\dot{G}_3 = -\frac{E}{r}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + \dot{G}_1\cos\varphi = -E\operatorname{sen}\varphi + \frac{E}{r}\operatorname{cotg}\theta(p\operatorname{sen}\varphi + \\ + q\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi + \dot{G}_1\cos\varphi$$

e queste si possono scrivere:

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{G}_1 = \dfrac{1}{r}E_1 + \dfrac{1}{r}(E_2 p + E_3 q) \\[2ex] \dot{G}_2 = E\cos\varphi + \dfrac{1}{r}E_1\operatorname{sen}\varphi + \dfrac{1}{r}(E_2 p + E_3 q)\operatorname{sen}\varphi - \\ \qquad - \dfrac{1}{r}(E_4 p + E_5 q)\cos\varphi \\[2ex] \dot{G}_3 = -E\operatorname{sen}\varphi + \dfrac{1}{r}E_1\cos\varphi + \dfrac{1}{r}(E_2 p + E_3 q)\cos\varphi + \\ \qquad + \dfrac{1}{r}(E_4 p + E_5 q)\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

dove $E_i$ è una funzione delle sole variabili $t$, $\theta$, $\psi$ ed $r$.

*b*) Poniamo:

$$(8)\quad H_1[E]=\int_0^t E \operatorname{sen} \sqrt{ab}(r_t^*-r_\tau^*)d\tau, \quad H_2[E]=\int_0^t E \cos \sqrt{ab}(r_t^*-r_\tau^*)d\tau$$

Integrando per parti si ha, per le (7):

$$(9)\left\{\begin{aligned} H_1[E] &= \frac{1}{\sqrt{ab}}\left\{\frac{E}{r}-\frac{E(0)}{r_0}\cos\sqrt{ab}\,r_t^* - H_2\left[\frac{E_1}{r}\right]-H_2\left[\frac{E_2p+E_3q}{r}\right]\right\} \\ H_2[E] &= \frac{1}{\sqrt{ab}}\left\{\frac{E(0)}{r_0}\operatorname{sen}\sqrt{ab}\,r_t^* + H_1\left[\frac{E_1}{r}\right]+H_1\left[\frac{E_2p+E_3q}{r}\right]\right\}. \end{aligned}\right.$$

*c*) Poniamo:

$$(10)\qquad I_1[E]=\int_0^t E \operatorname{sen}\varphi d\tau, \quad I_2[E]=\int_0^t E\cos\varphi d\tau$$

Queste, tenendo conto di $(1)_6$ e poi integrando per parti, diventano:

$$\begin{aligned} I_{k+1}[E] &= \int_0^t E \operatorname{sen}\left(\varphi+k\frac{\pi}{2}\right)d\tau = \\ &= \int_0^t \frac{\dot\varphi+\operatorname{cotg}\theta(p\operatorname{sen}\varphi+q\cos\varphi)}{r}E\operatorname{sen}\left(\varphi+k\frac{\pi}{2}\right)d\tau = - \\ &\qquad -\int_0^t \frac{E}{r}\frac{d}{d\tau}\cos\left(\varphi+k\frac{\pi}{2}\right)d\tau + \\ &\quad +\int_0^t \frac{E_4p+E_5q}{r}\operatorname{sen}\left(\varphi+k\frac{\pi}{2}\right)d\tau = -\frac{E}{r}\cos\left(\varphi+k\frac{\pi}{2}\right)+ \\ &\qquad +\frac{E(0)}{r_0}\cos\left(\varphi_0+k\frac{\pi}{2}\right)+\int_0^t\frac{E_1}{r}\cos\left(\varphi+k\frac{\pi}{2}\right)d\tau + \\ &+\int_0^t\frac{E_2p+E_3q}{r}\cos\left(\varphi+k\frac{\pi}{2}\right)d\tau+\int_0^t\frac{E_4p+E_5q}{r}\operatorname{sen}\left(\varphi+k\frac{\pi}{2}\right)d\tau \end{aligned}$$

cioè:

$$(11)\quad \begin{cases} I_1[E] = -\dfrac{E}{r}\cos\varphi + \dfrac{E(0)}{r_0}\cos\varphi_0 + I_2\left[\dfrac{E_1}{r}\right] + I_2\left[\dfrac{E_2 p + E_3 q}{r}\right] + \\ \qquad\qquad + I_1\left[\dfrac{E_4 p + E_5 q}{r}\right] \\ I_2[E] = \dfrac{E}{r}\operatorname{sen}\varphi - \dfrac{E(0)}{r_0}\operatorname{sen}\varphi_0 - I_1\left[\dfrac{E_1}{r}\right] - I_1\left[\dfrac{E_2 p + E_3 q}{r}\right] + \\ \qquad\qquad + I_2\left[\dfrac{E_4 p + E_5 q}{r}\right]. \end{cases}$$

*d*) Consideriamo infine gli integrali:

$$(12)\quad \begin{cases} L_1[E] = \displaystyle\int_0^t E \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\sqrt{ab}(r_t^* - r_\tau^*)d\tau, \\ L_2[E] = \displaystyle\int_0^t E \operatorname{sen}\varphi \cos\sqrt{ab}(r_t^* - r_\tau^*)d\tau, \\ L_3[E] = \displaystyle\int_0^t E \cos\varphi \operatorname{sen}\sqrt{ab}(r_t^* - r_\tau^*)d\tau, \\ L_4[E] = \displaystyle\int_0^t E \cos\varphi \cos\sqrt{ab}(r_t^* - r_\tau^*)d\tau. \end{cases}$$

Anche qui, integrando per parti, si ha:

$$\sqrt{ab}\int_0^t E \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\sqrt{ab}(r_t^* - r_\tau^*)d\tau = \int_0^t \frac{E}{r}\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial}{\partial\tau}\cos\sqrt{ab}(r_t^* - r_\tau^*)d\tau =$$

$$= \frac{E}{r}\operatorname{sen}\varphi - \frac{E(0)}{r_0}\operatorname{sen}\varphi_0 \cos\sqrt{ab}r_t^* - \int_0^t E\cos\varphi\cos\sqrt{ab}(r_t^* - r_\tau^*)d\tau -$$

$$- \int_0^t \frac{E_1}{r}\operatorname{sen}\varphi\cos\sqrt{ab}(r_t^* - r_\tau^*)d\tau -$$

$$-\int_0^t \frac{E_2 p + E_3 q}{r} \operatorname{sen} \varphi \cos \sqrt{ab}(r_t^* - r_\tau^*) d\tau +$$

$$+\int_0^t \frac{E_4 p + E_5 q}{r} \cos \varphi \cos \sqrt{ab}(r_t^* - r_\tau^*) d\tau$$

e analogamente per gli altri tre.

In definitiva si perviene al seguente sistema:

$$\left\{\begin{aligned}
-\sqrt{ab}L_4[E] &= -\frac{E(0)}{r_0}\cos\varphi_0 \operatorname{sen}\sqrt{ab}r_t^* + L_1[E] - L_3\left[\frac{E_1}{r}\right] - \\
&\quad - L_3\left[\frac{E_2 p + E_3 q}{r}\right] - L_1\left[\frac{E_4 p + E_5 q}{r}\right] \\
\sqrt{ab}L_1[E] &= \frac{E}{r}\operatorname{sen}\varphi - \frac{E(0)}{r_0}\operatorname{sen}\varphi_0 \cos\sqrt{ab}r_t^* - L_4[E] - \\
&\quad - L_2\left[\frac{E_1}{r}\right] - L_2\left[\frac{E_2 p + E_3 q}{r}\right] + L_4\left[\frac{E_4 p + E_5 q}{r}\right] \\
-\sqrt{ab}L_2[E] &= -\frac{E(0)}{r_0}\operatorname{sen}\varphi_0 \operatorname{sen}\sqrt{ab}r_t^* - L_3[E] - L_1\left[\frac{E_1}{r}\right] - \\
&\quad - L_1\left[\frac{E_2 p + E_3 q}{r}\right] + L_3\left[\frac{E_4 p + E_5 q}{r}\right] \\
\sqrt{ab}L_3[E] &= \frac{E}{r}\cos\varphi - \frac{E(0)}{r_0}\cos\varphi_0 \cos\sqrt{ab}r_t^* + L_2[E] - \\
&\quad - L_4\left[\frac{E_1}{r}\right] - L_4\left[\frac{E_2 p + E_3 q}{r}\right] - L_2\left[\frac{E_4 p + E_5 q}{r}\right]
\end{aligned}\right.$$

dal quale si ricava:

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
L_1[E] &= \frac{1}{1-ab}\left\{\frac{E(0)}{r_0}\cos\varphi_0 \operatorname{sen}\sqrt{ab}\,r_t^* + L_3\left[\frac{E_1}{r}\right] + \right.\\
&\quad + L_3\left[\frac{E_2p+E_3q}{r}\right] + L_1\left[\frac{E_4p+E_5q}{r}\right]\Big\} - \frac{\sqrt{ab}}{1-ab}\Big\{\frac{E}{r}\operatorname{sen}\varphi - \\
&\quad - \frac{E(0)}{r_0}\operatorname{sen}\varphi_0\cos\sqrt{ab}\,r_t^* - L_2\left[\frac{E_1}{r}\right] - L_2\left[\frac{E_2p+E_3q}{r}\right] + \\
&\quad \left. + L_4\left[\frac{E_4p+E_5q}{r}\right]\right\}\\
L_2[E] &= \frac{1}{1-ab}\left\{-\frac{E}{r}\cos\varphi + \frac{E(0)}{r_0}\cos\varphi_0\cos\sqrt{ab}\,r_t^* + \right.\\
&\quad + L_4\left[\frac{E_1}{r}\right] + L_4\left[\frac{E_2p+E_3q}{r}\right] + L_2\left[\frac{E_4p+E_5q}{r}\right]\Big\} + \\
&\quad + \frac{\sqrt{ab}}{1-ab}\Big\{-\frac{E(0)}{r_0}\operatorname{sen}\varphi_0\operatorname{sen}\sqrt{ab}\,r_t^* - L_1\left[\frac{E_1}{r}\right] - \\
&\quad \left. - L_1\left[\frac{E_2p+E_3q}{r}\right] + L_3\left[\frac{E_4p+E_5q}{r}\right]\right\}\\
L_3[E] &= \frac{1}{1-ab}\left\{-\frac{E(0)}{r_0}\operatorname{sen}\varphi_0\operatorname{sen}\sqrt{ab}\,r_t^* - L_1\left[\frac{E_1}{r}\right] - \right.\\
&\quad - L_1\left[\frac{E_2p+E_3q}{r}\right] + L_3\left[\frac{E_4p+E_5q}{r}\right]\Big\} + \frac{\sqrt{ab}}{1-ab}\Big\{-\frac{E}{r}\cos\varphi + \\
&\quad + \frac{E(0)}{r_0}\cos\varphi_0\cos\sqrt{ab}\,r_t^* + L_4\left[\frac{E_1}{r}\right] + L_4\left[\frac{E_2p+E_3q}{r}\right] + \\
&\quad \left. + L_2\left[\frac{E_4p+E_5q}{r}\right]\right\}\\
L_4[\mathrm{E}] &= \frac{1}{1-ab}\left\{\frac{E}{r}\operatorname{sen}\varphi - \frac{E(0)}{r_0}\operatorname{sen}\varphi_0\cos\sqrt{ab}\,r_t^* - \right.\\
&\quad - L_2\left[\frac{E_1}{r}\right] - L_2\left[\frac{E_2p+E_3q}{r}\right] + L_4\left[\frac{E_4p+E_5q}{r}\right]\Big\} - \\
&\quad - \frac{\sqrt{ab}}{1-ab}\Big\{\frac{E(0)}{r_0}\cos\varphi_0\operatorname{sen}\sqrt{ab}\,r_t^* + L_3\left[\frac{E_1}{r}\right] + \\
&\quad \left. + L_3\left[\frac{E_2p+E_3q}{r}\right] + L_1\left[\frac{E_4p+E_5q}{r}\right]\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

## § 2. - *Approssimazione degli integrali del moto nel caso di una fortissima rotazione iniziale intorno ad un asse di rotazione permanente stabile.*

**4.** - Scriviamo le prime tre equazioni del sistema (3) tenendo conto delle (6), (8), (10) e (12); si ha:

$$p = p_0 \cos \sqrt{ab}\, r_t^* - \sqrt{\frac{a}{b}}\, q_0 \operatorname{sen} \sqrt{ab}\, r_t^* + \frac{1}{A} \Big\{ L_2[zu] - L_4[zv] + H_2[yw] \Big\} - \frac{1}{B} \sqrt{\frac{a}{b}} \Big\{ L_3[zu] + L_1[zv] - H_1[xw] \Big\}$$

$$q = \sqrt{\frac{a}{b}}\, p_0 \operatorname{sen} \sqrt{ab}\, r_t^* + q_0 \cos \sqrt{ab}\, r_t^* + \frac{1}{A} \sqrt{\frac{b}{a}} \Big\{ L_1[zu] - L_3[zv] + H_1[yw] \Big\} + \frac{1}{B} \Big\{ L_4[zu] + L_2[zv] - H_2[xw] \Big\}$$

$$r = r_0 + c \int_0^t pq\, d\tau + \frac{1}{C} \Big\{ I_2[xv - yu] - I_1[xu + yv] \Big\}.$$

Supponiamo che, al divergere di $r_0$, $p_0$ *e* $q_0$ siano infinitesimi, di ordine non inferiore rispetto ad $\frac{1}{r_0}$, e che le componenti $F_\xi$, $F_\eta$, $F_\zeta$ della forza e le coordinate $x$, $y$, $z$ del suo punto di applicazione $Q$ siano funzioni delle sole variabili $t$, $\theta$, $\psi$ ed $r$, insieme alle loro derivate parziali prime e seconde, continue e limitate al divergere di $r_0$.

In queste ipotesi, le funzioni $p$, $q$, $r - r_0$ sono certamente limitate; inoltre, in base alle (9) e (13), $p$ e $q$ si potranno scrivere nella forma:

$$p = \frac{1}{r_0} p_1, \quad q = \frac{1}{r_0} q_1$$

dove $p_1$ e $q_1$ sono funzioni limitate per $r_0 \to \infty$.

Da queste osservazioni segue che le funzioni:

$$H_s\left[\frac{E_2 p + E_3 q}{r}\right], \quad I_s\left[\frac{E_2 p + E_3 q}{r}\right], \quad I_s\left[\frac{E_4 p + E_5 q}{r}\right]$$

$$L_s\left[\frac{E_2 p + E_3 q}{r}\right], \quad L_s\left[\frac{E_4 p + E_5 q}{r}\right],$$

$$H_s\left[\frac{E_1}{r}\right], \quad I_s\left[\frac{E_1}{r}\right], \quad L_s\left[\frac{E_1}{r}\right]$$

sono, al divergere di $r_0$, infinitesime di ordine non inferiore rispetto ad $\frac{1}{r_0^2}$. Perciò, a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto ad $\frac{1}{r_0}$, si ha:

$$(9')\quad \left\{\begin{aligned} H_1[E] &= \frac{1}{\sqrt{ab}}\left\{\frac{E}{r} - \frac{E(0)}{r_0}\cos\sqrt{ab}\,r_t^*\right\} \\ H_2[E] &= \frac{1}{\sqrt{ab}}\,\frac{E(0)}{r_0}\,\mathrm{sen}\sqrt{ab}\,r_t^* \end{aligned}\right.$$

$$(11')\quad \left\{\begin{aligned} I_1[E] &= -\frac{E}{r}\cos\varphi + \frac{E(0)}{r_0}\cos\varphi_0 \\ I_2[E] &= \frac{E}{r}\,\mathrm{sen}\,\varphi - \frac{E(0)}{r_0}\,\mathrm{sen}\,\varphi_0 \end{aligned}\right.$$

$$(13')\quad \left\{\begin{aligned} L_1[E] &= \frac{1}{1-ab}\,\frac{E(0)}{r_0}\cos\varphi_0\,\mathrm{sen}\sqrt{ab}\,r_t^* - \frac{\sqrt{ab}}{1-ab}\left\{\frac{E}{r}\,\mathrm{sen}\,\varphi - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{E(0)}{r_0}\,\mathrm{sen}\,\varphi_0\cos\sqrt{ab}\,r_t^*\right\} \\ L_2[E] &= \frac{1}{1-ab}\left\{-\frac{E}{r}\cos\varphi + \frac{E(0)}{r_0}\cos\varphi_0\cos\sqrt{ab}\,r_t^*\right\} - \\ &\qquad - \frac{\sqrt{ab}}{1-ab}\,\frac{E(0)}{r_0}\,\mathrm{sen}\,\varphi_0\,\mathrm{sen}\sqrt{ab}\,r_t^* \\ L_3[E] &= -\frac{1}{1-ab}\,\frac{E(0)}{r_0}\,\mathrm{sen}\,\varphi_0\,\mathrm{sen}\sqrt{ab}\,r_t + \\ &\qquad + \frac{\sqrt{ab}}{1-ab}\left\{-\frac{E}{r}\cos\varphi + \frac{E(0)}{r_0}\cos\varphi_0\cos\sqrt{ab}\,r_t^*\right\} \\ L_4[E] &= \frac{1}{1-ab}\left\{\frac{E}{r}\,\mathrm{sen}\,\varphi - \frac{E(0)}{r_0}\,\mathrm{sen}\,\varphi_0\cos\sqrt{ab}\,r_t^*\right\} - \\ &\qquad - \frac{\sqrt{ab}}{1-ab}\,\frac{E(0)}{r_0}\cos\varphi_0\,\mathrm{sen}\sqrt{ab}\,r_t^*. \end{aligned}\right.$$

**5.** - Ci possiamo calcolare ora, a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto ad $\frac{1}{r_0}$, il vettore velocità angolare $\omega$. Infatti, in base alle (9'), (11'), (13') si ha, in detto ordine di approssimazione:

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
p &= \Big\{ p_0 + \frac{2B-C}{C(A+B-C)r_0}(z_0u_0\cos\varphi_0 + z_0v_0\operatorname{sen}\varphi_0) - \\
&\qquad - \frac{x_0w_0}{(C-A)r_0}\Big\}\cos\sqrt{ab}\,r_t^* - \sqrt{\frac{a}{b}}\Big\{ q_0 - \\
&\qquad - \frac{2A-C}{C(A+B-C)r_0}(z_0u_0\operatorname{sen}\varphi_0 - z_0v_0\cos\varphi_0) - \\
&\qquad - \frac{y_0w_0}{(C-B)r_0}\Big\}\operatorname{sen}\sqrt{ab}\,r_t^* - \frac{2B-C}{C(A+B-C)r}(zu\cos\varphi + \\
&\qquad + zv\operatorname{sen}\varphi) + \frac{xw}{(C-A)r} \\
q &= \sqrt{\frac{b}{a}}\Big\{ p_0 + \frac{2B-C}{C(A+B-C)r_0}(z_0u_0\cos\varphi_0 + z_0v_0\operatorname{sen}\varphi_0) - \\
&\qquad - \frac{x_0w_0}{(C-A)r_0}\Big\}\operatorname{sen}\sqrt{ab}\,r_t^* + \Big\{ q_0 - \frac{2A-C}{C(A+B-C)r_0}(z_0u_0\operatorname{sen}\varphi_0 - \\
&\qquad - z_0v_0\cos\varphi_0) - \frac{y_0w_0}{(C-B)r_0}\Big\}\cos\sqrt{ab}\,r_t^* + \\
&\qquad + \frac{2A-C}{C(A+B-C)r}(zu\operatorname{sen}\varphi - zv\cos\varphi) + \frac{yw}{(C-B)r} \\
r &= r_0 + \frac{1}{Cr}\Big\{(xv-yu)\operatorname{sen}\varphi + (xu+yv)\cos\varphi\Big\} - \\
&\qquad - \frac{1}{Cr_0}\Big\{(x_0v_0 - y_0u_0)\operatorname{sen}\varphi_0 + (x_0u_0 + y_0v_0)\cos\varphi_0\Big\};
\end{aligned}
\right.
$$

e queste, ponendo:

$$
(15)\quad \begin{cases}
\bar{p}_0 = p_0 - \left\{ -\dfrac{2B-C}{C(A+B-C)r}(zu\cos\varphi + zv\,\mathrm{sen}\,\varphi) + \right. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \dfrac{xw}{(C-A)r} \right\}_{t=0} \\[2ex]
\bar{q}_0 = q_0 - \left\{ \dfrac{2A-C}{C(A+B-C)r}\, zu\,\mathrm{sen}\,\varphi - zv\cos\varphi) + \right. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \dfrac{yw}{(C-B)r} \right\}_{t=0} \\[2ex]
\bar{r}_0 = r_0 - \left\{ \dfrac{1}{Cr}[(xv - yu)\,\mathrm{sen}\,\varphi + (xu + yv)\cos\varphi] \right\}_{t=0} = \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = r_0 + \left\{ \dfrac{1}{Cr}\dfrac{\partial M_z}{\partial\varphi} \right\}_{t=0}
\end{cases}
$$

diventano:

$$
(14')\quad \begin{cases}
p = \bar{p}_0 \cos\sqrt{ab}\,r_t{}^* - \sqrt{\dfrac{a}{b}}\,\bar{q}_0\,\mathrm{sen}\,\sqrt{ab}\,r_t{}^* - \\
\qquad - \dfrac{2B-C}{C(A+B-C)r}(zu\cos\varphi + zv\,\mathrm{sen}\,\varphi) + \dfrac{xw}{(C-A)r} \\[2ex]
q = \sqrt{\dfrac{b}{a}}\,\bar{p}_0\,\mathrm{sen}\,\sqrt{ab}\,r_t{}^* + \bar{q}_0\cos\sqrt{ab}\,r_t{}^* + \\
\qquad + \dfrac{2A-C}{C(A+B-C)r}(zu\,\mathrm{sen}\,\varphi - zv\cos\varphi) + \dfrac{yw}{(C-B)r} \\[2ex]
r = \bar{r}_0 - \dfrac{1}{Cr}\dfrac{\partial M_z}{\partial\varphi}.
\end{cases}
$$

Infine, se indichiamo con $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ gli integrali del moto spontaneo di $S$ determinati dalle condizioni iniziali:

$$
(16)\quad \bar{p}(0)=\bar{p}_0,\ \bar{q}(0)=\bar{q}_0,\ \bar{r}(0)=\bar{r}_0,\ \theta(0)=\theta_0,\ \psi(0)=\psi_0,\ \varphi(0)=\varphi_0,
$$

le (14'), nell' ordine di approssimazione indicato sopra, si possono scrivere:

$$(14'')\quad \begin{cases} p - \bar{p} = -\dfrac{2B - C}{C(A+B-C)r}(zu \cos\varphi + zv \operatorname{sen}\varphi) + \dfrac{xw}{(C-A)r} \\[2ex] q - \bar{q} = \dfrac{2A - C}{C(A+B-C)r}(zu \operatorname{sen}\varphi - zv \cos\varphi) + \dfrac{yw}{(C-B)r} \\[2ex] r - \bar{r}_0 = -\dfrac{1}{Cr_0}\dfrac{\partial M_z}{\partial\varphi}. \end{cases}$$

Nel caso che sia $x = y = 0$ si può dare alle (14'') una forma vettoriale molto semplice: indicando con $\boldsymbol{k}_1$ il versore dell' asse di rapida rotazione nel caso del moto spontaneo di $S$ determinato dalle condizioni iniziali (16) e con $\boldsymbol{M}_1$ il vettore del piano $(x, y)$ simmetrico di $\boldsymbol{M}$ rispetto all'asse $x$, dalle (14'') si ricava:

$$(16)\qquad Cr_0\Delta\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{M} + \frac{A - B}{A + B - C}\boldsymbol{M}_1$$

dove si è posto:

$$\Delta\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{k}_1}{dt}.$$

Le (16) nel caso $A = B$, $\boldsymbol{M}(0) = 0$ danno la nota equazione del principio dell'effetto giroscopico:

$$(16')\qquad Cr_0\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{M}.$$

**6.** - Abbiamo ora quanto occorre per ricavare $\theta(t)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$ a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto ad $\dfrac{1}{r_0}$. In base alle (14'') si ha infatti:

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}
&\dot\theta = \bar p\cos\varphi - \bar q\,\mathrm{sen}\,\varphi - \frac{1}{Cr}zu + \frac{A-B}{C(A+B-C)r}(zu\cos 2\varphi +\\
&\qquad + zv\,\mathrm{sen}\,2\varphi) + \frac{1}{(C-A)r}xw\cos\varphi - \frac{1}{(C-B)r}yw\,\mathrm{sen}\,\varphi\\
&\dot\psi\,\mathrm{sen}\,\theta = \bar p\,\mathrm{sen}\,\varphi + \bar q\cos\varphi - \frac{1}{Cr}zv + \frac{A-B}{C(A+B-C)r}(zu\,\mathrm{sen}\,2\varphi -\\
&\qquad - zv\cos 2\varphi) + \frac{1}{(C-A)r}xw\,\mathrm{sen}\,\varphi + \frac{1}{(C-B)r}yw\cos\varphi\\
&\dot\varphi = r - \mathrm{cotg}\,\theta\left\{\bar p\,\mathrm{sen}\,\varphi + \bar q\cos\varphi - \frac{1}{Cr}zv +\right.\\
&\qquad + \frac{A-B}{C(A+B-C)r}(zu\,\mathrm{sen}\,2\varphi - zv\cos 2\varphi) +\\
&\qquad \left. + \frac{1}{(C-A)r}xw\,\mathrm{sen}\,\varphi + \frac{1}{(C-B)r}yw\cos\varphi\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Di qui integrando e tenendo conto delle (11′) e (13′) si ha, nel suddetto ordine di approssimazione:

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}
&\theta - \theta_0 = -\frac{1}{Cr_0}\int_0^t zu\,d\tau\\
&\psi - \psi_0 = -\frac{1}{Cr_0}\int_0^t \frac{zv}{\mathrm{sen}\,\theta}\,d\tau\\
&\varphi - \varphi_0 - \bar r_0 t = \frac{1}{Cr_0}\int_0^t zv\,\mathrm{cotg}\,\theta\,d\tau.
\end{aligned}\right.$$

Si osservi che se si calcolano $\theta$, $\psi$, $\varphi$ partendo dalle relazioni:

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}
&p = -\frac{1}{Cr}(zu\cos\varphi + zv\,\mathrm{sen}\,\varphi)\\
&q = \frac{1}{Cr}(zu\,\mathrm{sen}\,\varphi - zv\cos\varphi)\\
&r = \bar r_0 = r_0 + \left\{\frac{1}{Cr}\frac{\partial M_z}{\partial\varphi}\right\}_{t=0}
\end{aligned}\right.$$

invece che dalle (14''), si ottengono ugualmente le (18). Siccome le (19) o le equivalenti:

$$(19') \qquad \begin{cases} Cr\dfrac{dk}{dt} = \boldsymbol{M}^* = (Q' - O) \wedge \boldsymbol{F} \\ r = \bar{r}_0 \end{cases}$$

coincidono con le (16'), possiamo concludere che, a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto ad $\dfrac{1}{r_0}$, le espressioni $\theta(t)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$ degli angoli di Eulero coincidono con quelle che si otterrebbero se $S$ fosse un giroscopio, avente lo stesso momento d'inerzia $C$ rispetto a $z$ (asse giroscopico), dotato di velocità angolare iniziale $\omega(0) = \bar{r}_0 \boldsymbol{k}$ e sollecitato dalla forza $(Q', \boldsymbol{F})$ di momento $\boldsymbol{M}^*$.

Le (19) o le (19') — pur non essendo delle formule atte ad approssimare l'atto di moto[4]) di $S$ — permettono quindi di approssimarne la posizione. Da esse deduciamo che quando un solido $S$ è in rapida rotazione intorno ad un suo asse di rotazione permanente stabile, questo manifesta una « tenacia » contro forze agenti in qualsiasi punto di $S$ e che inoltre lo spostamento di tale asse per l'azione della forza $(Q, \boldsymbol{F})$ avviene in un piano normale ad $\boldsymbol{F}$.

**7.** - Applichiamo i risultati dei numeri precedenti al caso del solido pesante. Scegliendo l'asse $\zeta$ verticale orientato verso l'alto ed indicando con $\boldsymbol{P}$ il peso di $S$ si ha:

$$F_\xi = F_\eta = 0, \quad F_\zeta = -P$$

e quindi:

$$\begin{aligned} u &= O \\ v &= -P \operatorname{sen} \theta \\ w &= -P \cos \theta \end{aligned}$$

Se indichiamo con $x_0$, $y_0$, $z_0$ le coordinate del baricentro

---

[4]) Cfr. loc. cit. ([1]) pagg. 36-38.

di $S$, le (18) si possono scrivere:

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \psi = \psi_0 + \dfrac{Pz_0}{Cr_0}\displaystyle\int_0^t d\tau \\ \varphi = \varphi_0 + \bar{r}_0 t - \dfrac{Pz_0}{Cr_0}\displaystyle\int_0^t \cos\theta d\tau \end{cases}$$

Di qui, trascurando infinitesimi di ordine superiore rispetto ad $\dfrac{1}{r_0}$, si ha infine:

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \psi = \psi_0 + \dfrac{Pz_0}{Cr_0} t \\ \varphi = \varphi_0 + \left\{ r_0 + \dfrac{P \operatorname{sen}\theta_0}{Cr_0} (x_0 \operatorname{sen}\theta_0 + y_0 \cos\theta_0 - z_0 \operatorname{cotg}\theta_0) \right\} t. \end{cases}$$

Possiamo concludere perciò che, a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto ad $\dfrac{1}{r_0}$, il moto di un qualsiasi solido pesante con un punto fisso, al quale sia stata impressa una fortissima rotazione iniziale intorno ad un asse di rotazione permanente stabile, è una precessione regolare.

## § 3. - *Estensione al solido libero.*

**8.** - Supponiamo che le componenti $F_\xi$, $F_\eta$, $F_\zeta$ della forza $\boldsymbol{F}$ dipendano, oltre che da $t$, $\theta$, $\psi$ ed $r$, anche dalle funzioni $s_1(t)$, $s_2(t)$ ..., $s_n(t)$, integrali del sistema costituito dalle (1) e dalle equazioni differenziali:

$$\dot{s}_i = \dot{s}_i(t, \theta, \psi, r, s_1, \dots, s_n) \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{20}$$

I risultati precedenti valgono ancora in questo caso in quantochè le nuove ipotesi di dipendenza non comportano nessuna modifica nei calcoli fatti per ottenerli, purchè si sostituisca, nella definizione della funzione $E_1$ del n. 3, a $\frac{\partial E}{\partial t}$ l' espressione:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \sum_1^n {}_i \frac{\partial E}{\partial s_i} \dot{s}_i .$$

Queste considerazioni valgono, in particolare, per un solido libero. Infatti in tal caso le (1) sono le equazioni del moto intorno al baricentro e le (20), se si identificano le $s_i$ con le coordinate del baricentro e le loro derivate prime, quelle del moto del baricentro.