RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARNO PREDONZAN

# Intorno ai sistemi di $S_k$ che appartengono al monoide generale di dato ordine

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 21 (1952), p. 278-292

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__278_0>

# INTORNO AI SISTEMI DI $S_k$ CHE APPARTENGONO AL MONOIDE GENERALE DI DATO ORDINE

*Memoria* (*) *di* ARNO PREDONZAN (*a Trieste*)

**1.** - Il problema relativo all'esistenza di spazi lineari $S_k$ sulla forma generale $F^n_{r-1}$, di dato ordine $n$, di $S_r$ è già stato risolto [1]. E' nota infatti una condizione necessaria e sufficiente perchè sulla $F^n_{r-1}$ giacciano degli $S_k$, e si conosce altresì la dimensione del sistema algebrico, irriducibile nel campo di razionalità della $F^n_{r-1}$ [2], degli $S_k$ suddetti.

Non sono state ancora trattate analoghe questioni per forme non generali aventi particolari caratteri proiettivi.

Nel presente lavoro considero monoidi generali $M^n_{r-1}$, di ordine $n$, di uno spazio lineare $S_r$, relativamente ai quali dimostro la seguente proposizione:

*Il monoide generale $M^n_{r-1}$, di ordine $n \geq 3$, di $S_r$ contiene, tuttalpiù, tre famiglie, $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ di spazi lineari $S_k$ $(k \geq 1)$.*

*La famiglia $\Sigma_1$ è costituita da quegli $S_k$ di $M^n_{r-1}$ che passano per il suo punto $(n-1)$-uplo, $O$; $\Sigma_2$ è formata dagli $S_k$ che appartengono agli $S_{k+1}$ situati su $M^n_{r-1}$ e passanti per $O$; $\Sigma_3$, infine, comprende i rimanenti $S_k$ di $M^n_{r-1}$*

(*) Pervenuta in Redazione il 10 maggio 1952.

[1]) Ved. U. MORIN, *Sull'insieme degli spazi lineari contenuti in una ipersuperficie algebrica.* [« Rend. Acc. Naz. dei Lincei », (6), 24 (1936), 188-190]; B. SEGRE, *Intorno agli $S_k$ che appartengono alle forme generali di dato ordine.* [« Rend. Acc. Naz. dei Lincei », (8), 4 (1948), 261-265, 341-346]; A. PREDONZAN, *Intorno agli $S_k$ giacenti sulla varietà intersezione completa di più forme.* [« Rend. Acc. Naz. dei Lincei », (8), 5 (1948), 238-242].

[2]) Cioè nel campo di razionalità dei coefficienti della sua equazione.

*e quelli di $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ che sono di accumulazione per gli stessi.*

*Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di dette tre famiglie* [3]) *sono, rispettivamente, date da*

$$r \geq k + \frac{1}{k}\left[\binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-1}\right], \tag{1}$$

$$r \geq k + 1 + \frac{1}{k+1}\left[\binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k}\right], \tag{2}$$

$$r \geq k + \frac{1}{k+1}\binom{n+k}{k}. \tag{3}$$

*Gli $S_k$ di $\Sigma_1$, $\Sigma_3$ sono in numero finito se, e soltanto se, nella* (1), *rispettivamente nella* (3), *vale il segno di uguaglianza; altrimenti essi costituiscono due sistemi algebrici infiniti, irriducibili nel campo di razionalità di $M^n_{r-1}$, di dimensioni rispettive*

$$D_1 = k(r-k) - \left[\binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-1}\right], \tag{4}$$

$$D_3 = (k+1)(r-k) - \binom{n+k}{k}. \tag{5}$$

*Gli $S_k$ di $\Sigma_2$ sono, appena sia verificata la* (2), *sempre infiniti. Essi costituiscono, se nella* (2) *vale l'uguaglianza, un sistema algebrico puro di dimensione $k+1$; nell'altro caso invece $\Sigma_2$ è un sistema algebrico irriducibile nel campo di razionalità di $M^n_{r-1}$. In entrambi i casi la dimensione $D_2$ di $\Sigma_2$ soddisfa alla limitazione*

$$D_2 \leq D_1 + 1, \tag{6}$$

*valendo nella* (6) *il segno di uguaglianza se, e soltanto se, il sistema $\Sigma_2$ comprende $\Sigma_1$ come parte propria. Affinchè questa eventualità si verifichi è necessario e sufficiente che sia*

$$r \geq k + 1 + \binom{n+k-1}{k} + \binom{n+k-2}{k}. \tag{7}$$

---

[3]) Qualcuna di queste può risultare, sotto opportune condizioni più avanti precisate, sottofamiglia della o delle rimanenti.

*La* (7) *è pure condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema* $\Sigma_3$ *comprenda* $\Sigma_2$ (*e di conseguenza* $\Sigma_1$) *come parte propria.*

*Infine, condizione necessaria e sufficiente perchè* $\Sigma_3$ *comprenda propriamente* $\Sigma_1$ *è che si abbia*

$$r \geq k + 1 + \binom{n+k-2}{k}. \tag{8}$$

Dopo alcune questioni introduttive trattate nel n. 2, dimostro nei nn. 3, 4 quelle parti del teorema che si riferiscono ai sistemi $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, rispettivamente. Nel n. 4 inoltre provo che la (7) è necessaria e sufficiente perchè il sistema $\Sigma_1$ sia parte propria di $\Sigma_2$. Nel n. 6 stabilisco quanto riguarda il sistema $\Sigma_3$ poggiando su un risultato del n. 5. Nei nn. 7, 8 vengo infine a provare la parte restante del teorema, cioè la necessità e la sufficienza delle condizioni (7), (8) perchè il sistema $\Sigma_3$ comprenda propriamente i sistemi $\Sigma_2$, rispettivamente $\Sigma_1$.

OSSERVAZIONE I. - Dall'enunciato del teorema sono stati esclusi i casi $k=0$, $n=2$. Il primo di essi è banale. Nel secondo il monoide è un'iperquadratica generale di $S_r$ per la quale valgono i risultati dei lavori citati in [1]). In entrambi i casi, appena il monoide contenga degli $S_k$, la dimensione del loro insieme è data dalla (5).

OSSERVAZIONE II. - Dalle (1), (2), (3), (7), (8) segue facilmente che, a seconda della scelta di $k$, $n$, $r$, possono presentarsi i seguenti casi:

*a*) Non valgono le (1), (3): il monoide non contiene allora spazi lineari $S_k$.

*b*) Vale la (1) ma non la (3): esiste solo la famiglia $\Sigma_1$.

*c*) Vale la (3) ma non la (1): esiste unicamente la famiglia $\Sigma_3$.

*d*) Valgono le (1), (3) ma non le (2), (8): non esiste $\Sigma_2$ mentre $\Sigma_1$, $\Sigma_3$ formano due famiglie distinte.

*e*) Valgono le (1), (3), (8) ma non la (2): esistono solo $\Sigma_1$, $\Sigma_3$, ma costituiscono una sola famiglia in quanto $\Sigma_1$ è sottofamiglia di $\Sigma_3$.

*f*) Valgono le (1), (2), (3) ma non la (8): esistono $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ e formano tre famiglie distinte.

*g*) Valgono le (1), (2), (3), (8) ma non la (7): esistono $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ ma solo $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ sono famiglie distinte in quanto $\Sigma_1$ risulta sottofamiglia di $\Sigma_3$.

*h*) Valgono le (1), (2), (3), (7), (8): esistono $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ ma solo quest' ultima costituisce una famiglia in quanto la stessa comprende some sottofamiglia $\Sigma_2$ e questa, a sua volta, contiene propriamente $\Sigma_1$.

OSSERVAZIONE III. - In virtù delle (4), (5) si ottiene

$$\text{(i)} \qquad D_3 = D_1 + r - k - \binom{n+k-2}{k}.$$

Dalla (i) discende che si verificano le tre possibilità $D_3 \gtreqless D_1$ a seconda che, in corrispondenza si abbia

$$\text{(ii)} \qquad r \gtreqless k + \binom{n+k-2}{k}.$$

Appena si osservi che, se nella (6) vale l' uguaglianza, deve risultare $D_3 > D_2 > D_1$, mentre invece si ha $D_1 \geq D_2$ quando nella stessa rimane verificata la limitazione superiore, si può concludere che la dimensione più grande tra quelle dei sistemi di $S_k$ che giacciono su $M^n_{r-1}$ è data da $D_3$, rispettivamente da $D_1$, a seconda che nella (ii) valga la limitazione superiore od inferiore; se invece nella stessa vale l' uguaglianza la suddetta dimensione ha il valore $D_1 = D_3$.

**2.** - Nello spazio lineare $S_r(x_0, x_1, \dots, x_r)$ si consideri il monoide generale $M^n_{r-1}$, di ordine $n \geq 3$, il cui punto di molteplicità $n-1$, $O$, sia situato nel vertice $A_r(0, 0, \dots, 0, 1)$ del simplesso fondamentale delle coordinate. L' equazione di $M^n_{r-1}$ può scriversi

$$\text{(9)} \qquad \varphi^n(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) + x_r \varphi^{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) = 0\,,$$

dove $\varphi^n$, $\varphi^{n-1}$ denotano due forme generali, degli ordini rispettivi $n$, $n-1$, nelle $x_0, x_1, \dots, x_{r-1}$.

Il monoide $M^n_{r-1}$ e il cono delle sue tangenti in $O$, segano l' iperpiano, $S'_{r-1}$, di equazione $x_r = 0$, secondo due varietà $F^n_{r-2}, G^{n-1}_{r-2}$, degli ordini $n$, $n-1$, le cui equazioni rispettive, dentro all' $S'_{r-1}$, sono date da $\varphi^n = 0$, $\varphi^{n-1} = 0$; $F^n_{r-2}$, $G^{n-1}_{r-2}$ sono pertanto due forme generali di $S'_{r-1}$, situate in posizione generica, la cui intersezione completa è una varietà $H^{n(n-1)}_{r-3}$, di ordine $n(n-1)$.

Indicato con $\Delta$ il campo di razionalità dei coefficienti della (9), da quanto precede si può dedurre che detto campo è quello di razionalità sia di $M^n_{r-1}$ che di $H^{n(n-1)}_{r-3}$.

**3.** - Sul monoide $M^n_{r-1}$ giacciono degli $S_k$ $(k \geq 1)$ per $O$ se, e soltanto se, vi sono degli $S_{k-1}$ che appartengono alla varietà $H^{n(n-1)}_{r-3}$, e la dimensione $D_1$ del loro insieme $\Sigma_1$ uguaglia quella del sistema degli $S_{k-1}$ ultimi considerati. Ciò risulta evidente ove si osservi che ogni $S_k$ di $M^n_{r-1}$ per $O$ deve anche appartenere al cono delle tangenti a $M^n_{r-1}$ in $O$, quindi l' $S_{k-1}$ sezione di $S_k$ con l' $S'_{r-1}$ deve giacere su $H^{n(n-1)}_{r-3}$; viceversa ogni $S_{k-1}$ di $H^{n(n-1)}_{r-3}$ è proiettato da $O$ secondo un $S_k$ di $M^n_{r-1}$. Da ciò discende che affinchè esistano degli $S_k$ di $\Sigma_1$ è necessario e sufficiente che sia [4]).

$$D_1 \geq 0\,, \tag{10}$$

$D_1$ essendo dato dalla (4).

Dalla (10), avuto riguardo alla (4), discende la (1), per cui resta provata la necessità e la sufficienza di quest' ultima condizione.

Gli $S_{k-1}$ giacenti su $H^{n(n-1)}_{r-3}$ — e quindi gli $S_k$ di $\Sigma_1$ — sono in numero finito se, e soltanto se, nella (10) — quindi nella (1) — vale il segno di uguaglianza; altrimenti essi costituiscono un sistema algebrico infinito, irriducibile nel campo $\Delta$, la cui dimensione uguaglia $D_1$. Si può pertanto concludere come enunciato nel n. 1 per quanto riguarda il sistema $\Sigma_1$.

---

[4]) Ved. A. PREDONZAN, *loc. cit.* in [1]). In questa nota non è detto in modo esplicito che gli $S_k$ giacenti sulla varietà intersezione completa formano, se infiniti, un sistema algebrico irriducibile nel campo di razionalità della varietà stessa; ciò però consegue immediatamente da quanto detto in B. L. VAN DER VAERDEN, *Einführung in die algebraische Geometrie* (Berlin, Springer, 1939), p. 141.

**4.** - Andiamo ora a considerare l'insieme $\Sigma_2$ (eventualmente vuoto) degli $S_k$ ($k \geq 1$) appartenenti agli $S_{k+1}$ situati su $M_{r-1}^n$ e passanti per $O$. Risulta chiaro che condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di siffatti $S_k$ è che vi siano degli $S_k$ giacenti su $H_{r-3}^{n(n-1)}$. Una tale condizione è dunque data da [5]).

$$D = (k+1)(r-k-1) - \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k} \geq 0 , \tag{11}$$

dalla quale discende la (2) e dove $D$ sta ad indicare la dimensione del sistema $\Omega$ degli $S_k$ appartenenti ad $H_{r-3}^{n(n-1)}$, quindi del sistema $\Omega^*$ degli $S_{k+1}$ per $O$ giacenti su $M_{r-1}^n$.

Il sistema $\Omega$ — quindi $\Omega^*$ — è finito se $D = 0$; invece se $D > 0$ è algebrico infinito, irriducibile nel campo $\Delta$.

Vogliamo provare che il sistema $\Sigma_2$ comprende propriamente $\Sigma_1$ se, e soltanto, risulta verificata la condizione (7), più restrittiva della (2).

È subito visto che per giungere a questo risultato basta dimostrare che la (7) è condizione necessaria e sufficiente perchè per *ogni* $S_{k-1}$ di $H_{r-3}^{n(n-1)}$ passi almeno un $S_k$ giacente sulla $H_{r-3}^{n(n-1)}$ stessa.

Si supponga, a tale scopo, verificata la (11) o l'equivalente condizione (2). Se vale la $D > 0$ il sistema $\Omega$, in quanto irriducibile nel campo $\Delta$, risulta *puro* [6]), cioè tale che in una qualunque estensione del campo suddetto si può eventualmente spezzare solo in parti della stessa dimensione.

Sia $\overline{\Omega}$ una componente *assolutamente irriducibile* di $\Omega$ nel caso $D > 0$; invece se $D = 0$, $\overline{\Omega}$ starà ad indicare un sistema comprendente un solo $S_k$ scelto tra quelli, in numero finito, che appartengono ad $\Omega$.

La totalità degli $S_{k-1}$ di $S_k$ è notoriamente un *sistema lineare* di dimensione $k$. Associando ad un $S_k$ di $\overline{\Omega}$ un $S_{k-1}$ giacente su $H_{r-3}^{n(n-1)}$ quando si appartengono, si viene a definire una *corrispondenza algebrica irriducibile* [7]) di dimensione $D + k$. Ne segue che è pure *irri-*

---

[5]) Ved. A. PREDONZAN, *loc. cit.* in [1]), [4]).

[6]) Ved. B. L. VAN DER WAERDEN, *loc. cit.* in [4]), p. 123.

[7]) Ved. B. L. VAN DER WAERDEN, *loc. cit.* in [4]), p. 143.

d u c i b i l e il sistema degli $S_{k-1}$ di $H_{r-3}^{n(n-1)}$ che appartengono a qualche $S_k$ di $\overline{\Omega}$, ed ha la dimensione

$$(12) \qquad D_1 - \varepsilon , \qquad \text{con } \varepsilon \geq 0 ,$$

essendo contenuto nel sistema, di dimensione $D_1$, di tutti gli $S_{k-1}$ giacenti su $H_{r-3}^{n(n-1)}$.

È ovvio che nella (12) si avrò $\varepsilon = 0$ se, e soltanto se, per o g n i $S_{k-1}$ situato su $H_{r-3}^{n(n-1)}$ passa qualche $S_k$ di $\Omega$.

In virtù del p r i n c i p i o d e l c o m p u t o d e l l e c o s t a n t i [8]) applicato alla corrispondenza ora considerata, si ha

$$(13) \qquad D + k = D_1 - \varepsilon + \delta',$$

$\delta'$ stando ad indicare la dimensione del sistema algebrico degli $S_k$ di $\overline{\Omega}$ passanti per un $S_{k-1}$ scelto genericamente tra quelli situati sugli $S_k$ di $\overline{\Omega}$.

Dalla (13), tenuto conto delle (4), (11), si ha

$$(14) \qquad \delta' = \delta + \varepsilon ,$$

dove si è posto

$$(15) \qquad \delta = r - k - 1 - \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-2}{k}.$$

Poichè per ipotesi la (2) è verificata, si dovrà avere $\delta' \geq 0$; risulterà quindi $\delta = \delta' \geq 0$ se, e soltanto se, per o g n i $S_{k-1}$ giacente su $H_{r-3}^{n(n-1)}$ passerà almeno un $S_k$ di $\Omega$. Dalla $\delta \geq 0$ consegue, in virtù della (15), la (7), la cui necessità e sufficienza perchè $\Sigma_2$ comprenda propriamente $\Sigma_1$ resta pertanto provata.

Ci vogliamo ora occupare della dimensione del sistema $\Sigma_2$.

Indicato con $\overline{\Omega}^*$ il sistema algebrico i r r i d u c i b i l e, di dimensione $D$, degli $S_{k+1}$ di $\Omega^*$ che si ottengono proiettando da $O$ gli $S_k$ di $\overline{\Omega}$, applichiamo il computo delle costanti alla c o r r i s p o n d e n z a a l g e b r i c a i r r i d u c i b i l e, di dimensione $D + (k+1)$, che associa un $S_{k+1}$ di $\overline{\Omega}^*$ ad un

---

[8]) Ved. B. L. VAN DER WAERDEN, *loc. cit.* in [4]), p. 141.

$S_k$ di $\Sigma_2$ quando si appartengono; si ha

$$D + k + 1 = D_2 + \delta', \tag{16}$$

dove $D_2$ sta ad indicare la dimensione del sistema algebrico irriducibile $\overline{\Sigma}_2$ degli $S_k$ di $\Sigma_2$ che giacciono sugli $S_{k+1}$ di $\overline{\Omega}^*$.

Dalla (16), avuto riguardo alle (13), (14) e tenuto conto della $\varepsilon \geq 0$, discende

$$D_2 \leq D_1 + 1 . \tag{17}$$

Nella (17) vale il segno di uguaglianza se, e soltanto se, risulta soddisfatta la (7), cioè se $\Sigma_2$ comprende propriamente $\Sigma_1$. L'altra alternativa si verifica invece quando vale la (2) ma non la (7), e allora esistono degli $S_k$ di $\Sigma_1$ per i quali non passa alcun $S_{k+1}$ per $O$ situato su $M^n_{r-1}$.

Poichè il sistema $\Omega^*$ è, quando nella (2) vale la limitazione superiore, irriducibile nel campo $\Delta$, tale risulta pure il sistema $\Sigma_2$ (e le sue componenti assolutamente irriducibili sono del tipo della $\overline{\Sigma}_2$ e si ottengono tutte in corrispondenza di quelle assolutamente irriducibili di $\Omega^*$). La dimensione di $\Sigma_2$ è ovviamente $D_2$ come quella di $\overline{\Sigma}_2$.

Se nella (2) vale invece l'uguaglianza, il sistema $\Sigma_2$, sempre di dimensione $D_2$, è p u r o, e il numero delle sue componenti irriducibili è uguale a quello, finito e non nullo, degli $S_k$ situati su $H^{n(n-1)}_{r-3}$. La dimensione $D_2$ uguaglia in questo caso quella del sistema degli $S_k$ di $S_{k+1}$ e vale pertanto $k+1$. Resta così provato quanto, nell enunciato del n. 1, si riferisce al sistema $\Sigma_2$.

**5.** - È noto che la (3) è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza sulla varietà $H^{n(n-1)}_{r-3}$ di un insieme $\Pi$, finito od infinito, di forme di ordine $n-1$, $F^{n-1}_{k-1}$, di $S_k (k \geq 1)$ [9]. Più precisamente dette forme sono in numero finito se, e soltanto se, nella (3) vale l'uguaglianza; altrimenti $\Pi$ è un sistema algebrico infinito, irriducibile nel campo $\Delta$, quindi p u r o, la cui dimensione $D_3$ è data dalla (5).

Vogliamo provare che:

---

[9]) Ved. S. GUAZZONE, *Su certe sezioni spaziali di varietà intersezioni complete di due forme di $S_r$*. [« Rend. Sem. Matem. Padova », 21 (1952)].

A. - *Se il sistema* II *è infinito, l'* $S_k$ *a cui appartiene la generica* $F_{k-1}^{n-1}$ *di una qualunque sua componente assolutamente irriducibile non è situato su* $G_{r-2}^{n-1}$. *Analoga proprietà vale per l'* $S_k$ *di ogni* $F_{k-1}^{n-1}$ *di* II *quando il sistema stesso comprende un numero finito di elementi.*

Si supponga, a tale scopo, verificata la (3) o l'equivalente condizione $D_3 \geq 0$.

Posto

$$d = (k+1)(r-k-1) - \binom{n+k-1}{k}, \tag{18}$$

la stessa, in virtù della (5), diviene

$$d = D_3 + \binom{n+k-1}{k-1} - (k+1). \tag{19}$$

Tenuto conto dell'ipotesi iniziale $n \geq 3$ (n. 2) e della $D_3 \geq 0$, dalla (19), appena sia $k \geq 2$, discende $d > 0$. Se invece $k = 1$, risulta $d \gtreqless 0$ a seconda che, in corrispondenza, si abbia $D_3 \gtreqless 1$.

La condizione $d \geq 0$ è necessaria e sufficiente perchè $G_{r-2}^{n-1}$ contenga qualche $S_k$, eccettuato soltanto se $n = 3$ e $k \geq 2$, nel qual caso la $d \geq 0$ deve venir sostituita dalla condizione più restrittiva $r - 2k - 2 \geq 0$ [10]). Tali $S_k$ sono in numero finito se, e soltanto se, $d = 0$; altrimenti essi costituiscono un sistema algebrico infinito, irriducibile nel campo di razionalità di $G_{r-2}^{n-1}$, quindi p u r o, la cui dimensione vale $d$. Da ciò si può dedurre, avuto anche riguardo alle conclusioni del precedente capoverso, che per $k = 1$, $D_3 = 0$ non esistono $S_k$ giacenti su $G_{r-2}^{n-1}$; per $k = 1$, $D_3 = 1$ detti $S_k$ sono in numero finito; nei restanti casi invece ($k \geq 2$, $D_3 \geq 0$, oppure $k = 1$, $D_3 \geq 2$), ove si osservi che la $D_3 \geq 0$ implica, per $n = 3$, la $r - 2k - 2 \geq 0$, gli $S_k$ in questione sono sempre infiniti.

Tratteremo separatamente le tre eventualità ora considerate.

a) $k = 1$, $D_3 = 0$. — Poichè non esistono $S_k$ situati su $G_{r-2}^{n-1}$ la proposizione A risulta evidente.

---

10) Ved. B. SEGRE, *loc. cit.* in 1).

b) $k=1$, $D_3=1$. — Nessuno degli $S_k$ (in numero finito $N$) che giacciono su $G_{r-2}^{n-1}$ appartiene alla varietà $H_{r-3}^{n(n-1)}$ in quanto la condizione (11) non è soddisfatta. Ove si osservi che, in questo caso, gli $S_k$ in questione sono rette e le $F_{k-}^{n-1}$ su esse giacenti si riducono a gruppi di $n-1$ punti, si può concludere che nel sistema $\infty^1$ delle $F_{k-1}^{n-1}$ situate su $H_{r-3}^{n(n-1)}$, sono in numero finito ($=n.N$) quelle il cui $S_k$ di appartenenza giace su $G_{r-2}^{n-1}$.

c) $k\geq 2$, $D_3\geq 0$, oppure $k=1$, $D_3\geq 2$. — Gli $S_k$ situati su $G_{r-2}^{n-1}$ sono infiniti e costituiscono un sistema algebrico puro $\Sigma$ di cui sia $\overline{\Sigma}$ una componente assolutamente irriducibile.

Le $F_{k-1}^{n-1}$ che appartengono agli $S_k$ di $\overline{\Sigma}$ formano un sistema algebrico irriducibile $\overline{\Phi}$ di dimensione

$$a=d+\binom{n+k-1}{k}-1. \tag{20}$$

Fissata comunque in $S'_{r-1}$ una $F_{k-1}^{n-1}$ di $S_k$ la totalità delle forme $F_{r-2}^{n}$ di $S'_{r-1}$ che la contengono risulta un sistema lineare la cui dimensione

$$b=\binom{r+n-1}{n}-\binom{n+k}{k}+k \tag{21}$$

non dipende dalla particolare scelta di $F_{k-1}^{n-1}$; ciò risulta dal fatto che, assunto l'$S_k$ a cui la considerata $F_{k-1}^{n-1}$ appartiene come spazio fondamentale delle coordinate, di equazioni $x_{k+1}=\ldots=x_{r-1}=0$, l'equazione della generica $F_{r-2}^{n}$ per la $F_{k-1}^{n-1}$ può scriversi

$$\sum_{i=k+1}^{r-1} x_i f_i^{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{r-1})+g^1(x_0, x_1, \ldots, x_k)\cdot$$
$$\cdot h^{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_k)=0,$$

dove le $f_i^{n-1}$ sono forme generali di ordine $n-1$ nelle $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}$; $g^1$ è una forma generale di primo ordine in $x_0, x_1, \ldots, x_k$; mentre $h^{n-1}=0$ è l'equazione, dentro al considerato $S_k$, della $F_{k-1}^{n-1}$ in precedenza fissata.

La corrispondenza algebrica che associa una $F_{k-1}^{n-1}$ di $\overline{\Phi}$ ad una $F_{r-2}^{n}$ di $S'_{r-1}$, quando si appartengono, è irriducibile, ed è pure irriducibile il sistema $\overline{\Psi}$ delle $F^n_{r-2}$ di $S'_{r-1}$ che contengono qualche $F^{n-1}_{k-1}$ di $\overline{\Phi}$.

Si faccia ora l'ipotesi assurda che, ove sia $D_3 > 0$, l'$S$ a cui appartiene la generica $F^{n-1}_{k-1}$ di una qualunque componente assolutamente irriducibile di $\Pi$ sia situato su $G^{n-2}_{r-1}$; mentre se $D_3 = 0$ questo accada per l'$S_k$ ambiente di almeno una $F^{n-1}_{k-1}$ di $\Pi$: ciò equivale a supporre che non sia valida la proposizione A.

La generica ipersuperficie $F^n_{r-2}$ di $S'_{r-1}$ sega $G^{n-1}_{r-2}$ in una varietà $H^{n(n-1)}_{r-3}$ che contiene, per l'ipotesi ora fatta, qualche $F^{n-1}_{k-1}$ di $\overline{\Phi}$. Ne discende che il sistema $\overline{\Psi}$ coincide con quello lineare di tutte le $F^n_{r-2}$ di $S'_{r-1}$ ed ha quindi la dimensione

$$c = \binom{r+n-1}{n} - 1. \tag{22}$$

Sempre per la stessa ipotesi assurda, ha dimensione $D_3$ il sistema delle $F^{n-1}_{k-1}$ di $\overline{\Phi}$ giacenti sulla suddetta varietà $H^{n(n-1)}_{r-3}$, e questo sistema coincide, ovviamente, con quello delle $F^{n-1}_{k-1}$ di $\overline{\Phi}$ che sono situate sulla generica $F^n_{r-2}$ di $\overline{\Psi}$.

Applicando il computo delle costanti alla corrispondenza algebrica ultima considerata si ottiene

$$a + b = c + D_3,$$

dalla quale, tenuto conto delle (19), (20), (21), (22), deriva l'assurdità $1 = 0$. La proposizione A resta così completamente provata.

**6.** - Sia $\overline{F}^{n-1}_{k-1}$ una $F^{n-1}_{k-1}$ di $\Pi$ (n. 5) il cui $S_k$ di appartenenza, diciamolo $\overline{S}_k$, non sia contenuto nella $G^{n-1}_{r-2}$.

Lo spazio, $\overline{S}_{k+1}$, che congiunge $\overline{S}_k$ con $O$ non giace su $M^n_{r-1}$ in quanto (n. 4) l'$\overline{S}_k$, non essendo situato su $G^{n-1}_{r-2}$, non può appartenere ad $H^{n(n-1)}_{r-3}$. Tale $\overline{S}_{k+1}$ sega il monoide $M^n_{r-1}$ in una ipersuperficie $V^n_k$, di ordine $n$, di $\overline{S}_{k+1}$ che si spezza nel cono $V^{n-1}_k$, di ordine $n-1$, che da $O$ proietta $\overline{F}^{n-1}_{k-1}$ ed in uno spazio $S^*_k$.

Tale $S^*_k$ non fa parte di quelli (eventuali) che appartengono a $\Sigma_2$ ma non a $\Sigma_1$ perchè, se così fosse, l'$\overline{S}_{k+1}$ dovrebbe giacere su $M^n_{r-1}$.

L' $S_k^*$ non appartiene neppure a $\Sigma_1$, cioè non passa per $O$. Se infatti questa eventualità si verificasse, la $V_k^n$ prima considerata dovrebbe avere in $O$ un punto di molteplicità $n$ (dato che $O$, essendo vertice del cono $V_k^{n-1}$, ha per lo stesso molteplicità $n-1$), il che porterebbe di conseguenza che l' $\overline{S}_{k+1}$ sarebbe tangente a $M_{r-1}^n$ in $O$, quindi risulterebbe situato sul cono delle tagenti in $O$ al monoide $M_{r-1}^n$ stesso. Ne seguirebbe l' appartenenza di $\overline{S}_k$ a $G_{r-2}^{n-1}$, il che verrebbe a contrastare con l' ipotesi fatta inizialmente sulla $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$.

Se invece $\overline{S}_k$ giace su $G_{r-2}^{n-1}$, ma non su $H_{r-3}^{n(n-1)}$, l' $S_k^*$ passa per $O$, quindi appartiene al sistema $\Sigma_1$. Tale $S_k^*$ apparterrà poi anche al sistema $\Sigma_2$ se, e soltanto se, per l' $S_{k-1}$ sezione dell' $S_k^*$ con l' $S'_{r-1}$ passerà almeno un $S_k$ situato su $H_{r-3}^{n(n-1)}$.

Infine, qualora $\overline{S}_k$ risulti situato su $H_{r-3}^{n(n-1)}$, l' $S_k^*$ rimane indeterminato in quanto il monoide $M_{r-1}^n$ contiene l' $\overline{S}_{k+1}$. Più precisamente alla $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ si possono associare tutti gli $S_k$ di $\overline{S}_{k+1}$.

Si supponga, in primo luogo, che il sistema $\Pi$ sia infinito e si indichi con $\overline{\Pi}$ una sua componente assolutamente irriducibile. Da quanto precede, e tenuto conto che (a norma della proposizione A del n. 5) la generica $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ di $\overline{\Pi}$ ha l' $S$ di appartenenza non situato su $G_{r-2}^{n-1}$, si deduce che si può costruire una corrispondenza algebrica $C$ tra le $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ di $\overline{\Pi}$ e gli $S_k$ situati su $M_{r-1}^n$ che associa alla generica $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ di $\overline{\Pi}$ un $S_k$ di $M_{r-1}^n$ non appartenente a $\Sigma_1$, $\Sigma_2$.

Il sistema algebrico $\overline{\Sigma}_3$, interferenza di tutti i sistemi algebrici irriducibili di $S_k$ di $M_{r-1}^n$ che contengono quegli $S_k$ di $M_{r-1}^n$ che corrispondono in $C$ alle generiche $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ di $\overline{\Pi}$, risulta irriducibile. Si può allora staccare [11]) dalla corrispondenza $C$ una corrispondenza irriducibile $C'$ che associa ad una generica $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ di $\overline{\Pi}$ un $S_k$ di $\overline{\Sigma}_3$ e tale che gli $S_k$ che in $C'$ sono i corrispondenti delle generiche $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ di $\overline{\Pi}$ siano proprio quelli che in $C$ corrispondevano alle $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ stesse. Il sistema $\overline{\Sigma}_3$ comprende, ovviamente, anche quegli $S_k$ di $M_{r-1}^n$ che sono di accumulazione per quelli corrispondenti in $C'$ alle $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ generiche di $\overline{\Pi}$ pur non facendo parte dell' insieme di

---

11) Ved. F. SEVERI, *Introduzione alla geometria algebrica, Geometria numerativa, I* (Roma, Docet, 1948), pp. 160-161.

questi ultimi; tali $S_k$ possono quindi appartenere anche ai sistemi $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ considerati nei precedenti numeri. È chiaro poi che i sistemi $\overline{\Sigma}_3$ e $\overline{\Pi}$ hanno la stessa dimensione $D_3$.

Poichè quanto sinora è stato detto in relazione al sistema $\overline{\Pi}$ si può integralmente ripetere per ogni altra (eventuale) componente assolutamente irriducibile di $\Pi$, si può concludere che sul monoide $M_{r-1}^n$ esiste un sistema puro, $\Sigma_3$, di $S_k$ (le cui componenti assolutamente irriducibili sono del tipo di $\overline{\Sigma}_3$ e si ottengono tutte in corrispondenza di quelle assolutamente irriducibili di $\Pi$ se, e soltanto se, il sistema $\Pi$ esiste ed è infinito. Una condizione necessaria e sufficiente perchè ciò avvenga è data dalla (3) ove si supponga valida la limitazione superiore (n. 5). In questa eventualità il sistema $\Sigma_3$ risulta, come $\Pi$, irriducibile nel campo $\Delta$ ed ha la dimensione $D_3$ data dalla (3). In esso sono contenuti tutti gli $S_k$ che giacciono su $M_{r-1}^n$ e non appartengono a $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ in quanto ciascuno degli stessi (come facilmente si vede seguendo il procedimento inverso a quello adoperato per la corrispondenza $C'$) può ottenersi come associato ad una ben determinata $F_{k-1}^{n-1}$ di $\Pi$.

Supponiamo, in secondo luogo, che le $F_{k-1}^{n-1}$ di $\Pi$ siano in numero finito. Ciò avviene (n. 5) se, e soltanto se, nella (3) vale l'uguaglianza. Poichè, a norma della proposizione A del n. 5, l'$S_k$ ambiente di ogni $F_{k-1}^{n-1}$ di $\Pi$ non giace su $G_{r-2}^{n-1}$, di conseguenza esistono degli $S_k$ situati su $M_{r-1}^n$ e non appartenenti a $\Sigma_1$, $\Sigma_2$. Tali $S_k$ sono in numero finito in quanto ognuno di essi determina, in corrispondenza, una $F_{k-1}^{n-1}$ di $\Pi$; ne vi può essere, ovviamente, una $F_{k-1}^{n-1}$ di $\Pi$ a cui si possano associare infiniti $S_k$ di $M_{r-1}^n$.

7. - Facciamo ora l'ipotesi che la $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ di cui al n. 6 appartenga alla componente irriducibile $\overline{\Pi}$ del sistema $\Pi$ e sia tale che il suo spazio ambiente $\overline{S}_k$ seghi la varietà $H_{r-3}^{n(n-1)}$ nella $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ stessa e in un $S_{k-1}$: l'$\overline{S}_k$ è di conseguenza situato su $G_{r-2}^{n-1}$ ma non su $H_{r-3}^{n(n-1)}$. Supponiamo inoltre che per il suddetto $S_{k-1}$ non passi alcun $S_k$ giacente su $H_{r-3}^{n(n-1)}$. La corrispondenza $C'$ associa alla $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ un $S_k^*$ che appartiene a $\Sigma_1$ ma non a $\Sigma_2$ ed è intersecato dall'$S'_{r-1}$ nell'$S_{k-1}$ prima conside-

rato. La $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ è, ovviamente, di accumulazione per le $F_{k-1}^{n-1}$ generiche di $\overline{\Pi}$, per cui $S_k^*$ è pure di accumulazione per gli $S_k$ di $\Sigma_3$ che corrispondono alle stesse $F_{k-1}^{n-1}$ generiche, ed appartiene perciò al sistema $\Sigma_3$.

Viceversa, se un $S_k^*$ di $\Sigma_1$ ma non di $\Sigma_2$ appartiene anche al sistema $\Sigma_3$, esso è di accumulazione per quegli $S_k$ di $\Sigma_3$ che provengono dalle generiche $F_{k-1}^{n-1}$ di una componente irriducibile (e sia ancora $\overline{\Pi}$) del sistema $\Pi$. Tale $S_k^*$ può quindi ottenersi, attraverso la corrispondenza $C'$, da qualche $F_{k-1}^{n-1}$ di $\overline{\Pi}$ il cui spazio di appartenenza, dovendo segare $H_{r-3}^{n(n-1)}$ nell' $S_{k-1}$ sezione di $S_k^*$ con $S'_{r-1}$ e nella $F_{k-1}^{n-1}$ stessa, deve giacere su $G_{r-2}^{n-1}$ ma non su $H_{r-3}^{n(n-}$ . Non vi potranno poi essere degli $S_k$ per l' $S_{k-1}$ ultimo considerato situati su $H_{r-3}^{n(n-1)}$ perchè se così fosse $S_k^*$ verrebbe ad appartenere anche a $\Sigma_2$. Ne possiamo concludere che:

I. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè un $S_k$ di $\Sigma_1$, ma non di $\Sigma_2$, appartenga al sistema $\Sigma_3$ è che per l' $S_{k-1}$, sezione dell' $S_k$ stesso con l' $S'_{r-1}$, passino degli $S_k$ situati su $G_{r-2}^{n-1}$ ma nessuno di questi giaccia su $H_{r-3}^{n(n-1)}$.*

Supponiamo, in s e c o n d o l u o g o, che la $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ di $\overline{\Pi}$ abbia l' $\overline{S}_k$ situato su $H_{r-3}^{n(n-1)}$. Tale $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ può essere dedotta da una generica $F_{k-1}^{n-1}$ di $\overline{\Pi}$ quando quest' ultima varia in un sistema continuo $\Gamma$ (di cui un estremo sia $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$) di $F_{k-1}^{n-1}$ tutte generiche in $\overline{\Pi}$ ad eccezione della $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ ora considerata. Alle generiche $F_{k-1}^{n-1}$ di $\Gamma$ corrispondono, attraverso la $C'$, dei ben determinati $S_k$ di $\Sigma_3$; quindi, al limite, quando la generica $F_{k-1}^{n-1}$ di $\Gamma$ tende, lungo il sistema $\Gamma$ stesso, alla $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$, l' $S_k$ corrispondente tende ad un $S_k^*$ ben determinato che, per il particolare modo con cui è stato ottenuto, è di accumulazione per $S_k$ generici di una componente assolutamente irriducibile di $\Sigma_3$ (quella che corrisponde a $\overline{\Pi}$) ed appartiene quindi al sistema $\Sigma_3$ stesso. L' $S_k^*$ medesimo, in quanto la $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ ha l' $\overline{S}_k$ ambiente che giace su $H_{r-3}^{n(n-1)}$, è situato sull' $S_{k+1}$ che congiunge $O$ con $\overline{S}_k$ e quindi appartiene pure al sistema $\Sigma_2$. Lo stesso $S_k^*$ sega poi l' $S'_{r-1}$ in un $S_{k-1}$ situato su $\overline{S}_k$, quindi su $H_{r-3}^{n(n-1)}$.

Inversamente, se un $S_k^*$ di $\Sigma_2$ appartiene anche al sistema $\Sigma_3$, esso deve potersi ottenere come posizione limite di $S_k$ di $\Sigma_3$ corrispondenti a generiche $F_{k-1}^{n-1}$ di una componente assolutamente irriducibile, $\overline{\Pi}$, di $\Pi$. Dovrà quindi esistere una $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ di $\overline{\Pi}$ tale che, quando la generica $F_{k-1}^{n-1}$ di $\overline{\Pi}$ tende, lungo un sistema continuo $\Gamma$ di $F_{k-1}^{n-1}$ generiche (di cui un estremo sia $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$), alla stessa, il corrispondente $S_k$ di $\Sigma_3$ tende ad $S_k^*$. Proiettando la $F_{k-1}^{n-1}$ da $O$ si otterrà una $F_k^{n-1}$ il cui $S_{k+1}$ di appartenenza dovrà, ovviamente, contenere $S_k^*$ e giacere su $M_{r-1}^n$. Tale $S_{k+1}$ sarà quindi segato da $S'_{r-1}$ secondo uno spazio $\overline{S}_k$ che sarà situato su $H_{r-3}^{n(n-1)}$ ed al quale appartengono la $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ e l' $S_{k-1}$ sezione di $S_k^*$ con l' $S'_{r-1}$. Possiamo pertanto affermare che:

II. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè un $S_k$ di $\Sigma_2$ appartenga anche al sistema $\Sigma_3$ è che esso seghi l' $S'_{r-1}$ in un $S_{k-1}$ per il quale passi almeno un $S_k$ giacente sulla varietà $H_{r-3}^{n(n-1)}$.*

**8.** - Dalle proposizioni I, II del n. 7 seguono immediatamente le due seguenti:

III. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema $\Sigma_3$ comprenda propriamente $\Sigma_1$ è che per ogni $S_{k-1}$ giacente su $H_{r-3}^{n(n-1)}$ passi almeno un $S_k$ situato su $G_{r-2}^{n-1}$.*

IV. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema $\Sigma_3$ comprenda propriamente $\Sigma_2$ è che per ogni $S_{k-1}$ giacente su $H_{r-3}^{n(n-1)}$ passi almeno un $S_k$ situato sulla varietà $H_{r-3}^{n(n-1)}$ stessa.*

Ove si osservi che l' $S_{k-1}$ generico per una componente assolutamente irriducibile del sistema degli $S_{k-1}$ giacenti su $H_{r-3}^{n(n-1)}$ è pure generico per una componente assolutamente irriducibile del sistema degli $S_{k-1}$ situati su $G_{r-2}^{n-1}$, si può affermare che la condizione della proposizione III equivale a quella che per ogni $S_{k-1}$ di $G_{r-2}^{n-1}$ passi un $S_k$ situato sulla $G_{r-2}^{n-1}$ stessa; essa è dunque data dalla (8) [12]).

La condizione della proposizione IV è infine data dalla (7) come risulta da quanto detto nel n. 4. Dallo stesso numero discende poi che, in questo caso, pure $\Sigma_2$ contiene propriamente $\Sigma_1$, cioè sul monoide $M_{r-1}^n$ vi è una sola famiglia $\Sigma_3$ di spazi lineari $S_k$ (che comprende come sottofamiglia $\Sigma_2$, la quale a sua volta contiene $\Sigma_1$).

---

[12]) Ved. B. Segre, *loc. cit.* in [1]), p. 265.