

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARNO PREDONZAN

**Sui monoidi V_{k-1}^n di S_k situati sulla forma
generale F_{r-1}^n di S_r**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 21 (1952), p. 335-344

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__335_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUI MONOIDI V_{k-1}^n DI S_k SITUATI SULLA FORMA GENERALE F_{r-1}^n DI S_r

Memoria () di ARNO PREDONZAN (a Trieste)*

1. - Nello studio di talune questioni relative all'unirazionalità di una ipersuperficie algebrica generale F_{r-1}^n , di ordine n , dello spazio lineare S_r , può interessare di conoscere come si debba scegliere, in relazione ad n , r , la dimensione k di uno spazio lineare affinché esistano degli S_k di S_r che seghino la data F_{r-1}^n secondo monoidi M_{k-1}^n .

Nel presente lavoro dimostro la seguente proposizione, che risolve compiutamente il problema ora indicato:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la generica F_{r-1}^n di S_r contenga dei monoidi M_{k-1}^n di S_k ($n \geq 2$, $k \geq 1$) è che risulti

$$(1) \quad r \geq k + \frac{1}{k+1} \left[\binom{n+k-2}{k} - k \right],$$

eccettuato solo se $n = 2$, nel qual caso la (1) deve essere sostituita dalla condizione più restrittiva

$$(2) \quad r \geq k + 1.$$

Nel primo caso il numero dei monoidi suddetti è finito se, e soltanto se, nella (1) vale l'uguaglianza; altrimenti essi costituiscono un sistema algebrico, irriducibile nel campo di razionalità dei coefficienti della F_{r-1}^n , di dimensione

$$(3) \quad D_1 = (k+1)(r-k) - \binom{n+k-2}{k} + k.$$

*) Pervenuta in Redazione il 10 maggio 1952.

Se $n = 2$, tali monoidi sono, appena sia verificata la (2), sempre infiniti e costituiscono un sistema razionale la cui dimensione vale

$$(4) \quad D_2 = (k + 1)(r - k).$$

Tratto prima (n. 2) il caso $n = 2$. Dimostro quindi (n. 3) la necessità della condizione (1) poggiando sul principio del computo delle costanti. Vengo infine a provare (nn. 4-8) la sufficienza della condizione stessa — quindi la validità della (3) — seguendo un ragionamento per assurdo che poggia ancora, in modo essenziale, sul principio suddetto applicato ad una particolare corrispondenza algebrica irriducibile considerata nel n. 4.

OSSERVAZIONE. — Nell'enunciato del teorema bisogna intendere che, se $k = 1$, le (1), (2) sono, a seconda dei due casi, necessarie e sufficienti per l'esistenza di rette di S_r che abbiano con la F_{r-1}^n un contatto di ordine $n - 2$.

2 - Se $n = 2$, il generico S_k ($1 \leq k \leq r - 1$) di S_r sega l'iperquadrica F_{r-1}^2 in un monoide del secondo ordine (iperquadrica) di S_k . La condizione $k \leq r - 1$, cioè la (2), è pertanto necessaria e sufficiente per l'esistenza su F_{r-1}^2 di monoidi M_{k-1}^2 .

Il sistema dei monoidi suddetti è, ovviamente, birazionalmente identico a quello degli S_k di S_r , quindi è **razionale** e la sua dimensione D_2 è data dalla (4).

3 - Considereremo in questo numero ed in quelli successivi, il caso $n \geq 3$. Supporremo inoltre, affinché il teorema del n. 1 abbia senso, $1 \leq k \leq r - 1$.

I monoidi M_{k-1}^n appartenenti agli S_k di S_r costituiscono, nella loro totalità, un sistema razionale, quindi **irriducibile**, Ω , di dimensione

$$(5) \quad a = (k + 1)(r - k) + \binom{n + k}{k} - \binom{n + k - 2}{k} + k - 1;$$

ciò si vede facilmente appena si osservi che la dimensione del sistema lineare degli M_{k-1}^n di S_k aventi lo stesso punto $(n - 1)$ -

uplo uguaglia

$$\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-2}{k} - 1,$$

in quanto sono in numero di $\binom{n+k-2}{k}$ le condizioni lineari, linearmente indipendenti, che si devono imporre ai coefficienti di una generica ipersuperficie di ordine n di S_k perchè un suo punto abbia per essa molteplicità $n-1$.

Scelto comunque un monoide M_{k-1}^n di Ω , l'insieme delle forme F_{r-1}^n , di ordine n , di S_r , che lo contengono risulta un sistema lineare, la cui dimensione

$$(6) \quad b = \binom{n+r}{r} - \binom{n+k}{k}$$

rimane costante al variare di M_{k-1}^n in Ω ; ciò può risultare, ad esempio, dal fatto che, assunto l' S_k di M_{k-1}^n come spazio fondamentale delle coordinate, di equazioni $x_{k+1} = \dots = x_r = 0$, l'equazione della F_{r-1}^n generica per M_{k-1}^n può scriversi nella forma

$$\sum_{i=k+1}^r x_i f_i^{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_r) + \alpha g^n(x_0, x_1, \dots, x_k) = 0,$$

dove le f_i^{n-1} sono forme generali di S_r dell'ordine $n-1$, α è una costante e $g^n = 0$ è l'equazione, dentro al considerato S_k , di M_{k-1}^n ¹⁾.

Da quanto precede si deduce che la corrispondenza algebrica che associa un monoide M_{k-1}^n di Ω ed una F_{r-1}^n di S_r , quando M_{k-1}^n è situato sulla F_{r-1}^n , è irriducibile ²⁾, e che è pure irriducibile il sistema Σ (contenuto in quello

¹⁾ Più in generale, con ragionamento analogo, può affermarsi che la dimensione del sistema lineare delle F_{r-1}^n passanti per una qualunque forma F_{k-1}^s , di ordine s , di S_k rimane costante al variare di F_{k-1}^s in S_r ed è data da

$$\binom{n+r}{r} - \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-s}{k} - 1.$$

²⁾ Ved. B. L. VAN DER WAERDEN, *Einführung in die algebraische geometrie*, (Berlin, Springer, 1939), p. 143.

lineare di tutte le F_{r-1}^n di S_r) delle F_{r-1}^n di S_r che contengono qualche M_{k-1}^n di Ω . La dimensione di Σ risulta ovviamente

$$(7) \quad c = \binom{n+r}{r} - 1 - \varepsilon, \quad \text{con } \varepsilon \geq 0,$$

avendosi $\varepsilon = 0$ se, e soltanto se, ogni F_{r-1}^n di S_r contiene qualche M_{k-1}^n di Ω .

Indicata con d la dimensione del sistema di M_{k-1} giacenti sulla generica F_{r-1}^n di Σ , a norma del principio del computo delle costanti, si ha

$$a + b = c + d,$$

dalla quale, in virtù delle (5), (6), (7), si deduce

$$(8) \quad d = (k+1)(r-k) - \binom{n+k-2}{k} + k + \varepsilon.$$

Si noti che deve risultare $d \geq 0$, valendo il segno di uguaglianza solo nel caso in cui sono in numero finito non nullo i monoidi M_{k-1}^n di Ω che appartengono alla generica F_{r-1}^n di Σ . Qualora invece si abbia $d > 0$, detti monoidi costituiscono un sistema algebrico irriducibile nel campo di razionalità dei coefficienti della F_{r-1}^n , quindi un sistema algebrico puro³⁾.

Se la generica F_{r-1}^n di S_r contiene qualche M_{k-1}^n di Ω , risulta ovviamente $\varepsilon = 0$; dalla $d \geq 0$ e avuto riguardo alle (3), (8), segue allora $D_1 \geq 0$, dalla quale discende immediatamente la (1). Resta così provata la necessità di quest'ultima condizione.

4. - Ci proponiamo ora di dimostrare, con ragionamento per assurdo, che la (1) è anche condizione sufficiente.

Sia, a questo scopo, verificata la stessa, quindi la $D_1 \geq 0$, e si supponga che la generica F_{r-1}^n di S_r non contenga M_{k-1}^n di Ω ; il che comporta $\varepsilon > 0$ e di conseguenza $d > 0$.

Detto \bar{S}_k un fissato S_k di S_r , e indicato con \bar{M}_{k-1}^n un

³⁾ Ved. B. L. VAN DER WAERDEN, *loc. cit.*, in ²⁾, pp. 141, 123.

generico M_{k-1}^n di \bar{S}_k , si consideri il sistema lineare $\bar{\Sigma}$, di dimensione b , delle F_{r-1}^n di S_r che contengono \bar{M}_{k-1}^n . Tale monoide risulta, chiaramente, generico nel sistema Ω ; la generica F_{r-1}^n di $\bar{\Sigma}$ è pertanto generica nel sistema Σ e quindi è d la dimensione del sistema algebrico puro Ω_d dei monoidi M_{k-1}^n che giacciono sulla stessa.

Al variare della F_{r-1}^n nel sistema lineare $\bar{\Sigma}$, il sistema Ω_d descrive un sistema algebrico Ω^* , eventualmente riducibile in parti di dimensione diversa, che risulta contenuto nel sistema razionale Ω di tutti i monoidi M_{k-1}^n di S_r . Sia $\bar{\Omega}$ una componente irriducibile di dimensione massima di Ω^* , la quale contiene (almeno) una componente assolutamente irriducibile di Ω_d ; ne discende che ha dimensione d il sistema dei monoidi M_{k-1}^n di $\bar{\Omega}$ che sono situati sulla generica F_{r-1}^n di $\bar{\Sigma}$.

Si consideri ora la corrispondenza algebrica π che associa ad un generico M_{k-1}^n di $\bar{\Omega}$ una F_{r-1}^n di $\bar{\Sigma}$ quando si appartengono. Come facilmente si vede, π è non degenera su $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Sigma}$ ed in essa ad elementi generici di $\bar{\Omega}$ corrispondono elementi generici di $\bar{\Sigma}$. Inoltre è costante la dimensione del sistema lineare delle F_{r-1}^n di $\bar{\Sigma}$ che risultano associate in π al generico M_{k-1}^n di $\bar{\Omega}$. Ove si osservi infine che il sistema algebrico irriducibile, interferenza di tutti i sistemi algebrici irriducibili delle F_{r-1}^n di S_r che contengono le F_{r-1}^n corrispondenti in π ai generici M_{k-1}^n di $\bar{\Omega}$, coincide col sistema $\bar{\Sigma}$, si può concludere che anche la corrispondenza π è irriducibile⁴).

5. - Supponiamo, in primo luogo, che l' S_k su cui giace il generico M_{k-1}^n di $\bar{\Omega}$ sia sghembo con l' \bar{S}_k .

Il sistema $\bar{\Omega}$, essendo contenuto nel sistema Ω di tutti i monoidi M_{k-1}^n di S_r , ha la dimensione

$$(9) \quad a_1 = a - \varepsilon_1, \quad \text{con } \varepsilon_1 \geq 0,$$

mentre invece è

$$(10) \quad b_1 = \binom{n+r}{r} - 2 \binom{n+k}{k} + 1$$

⁴) Ved. F. SEVERI, *Introduzione alla geometria algebrica, Geometria numerativa*, I (Roma, Docet, 1948), pp. 160-161.

la dimensione del sistema lineare delle F_{r-1}^n di $\bar{\Sigma}$ per il generico M_{k-1}^n di $\bar{\Omega}$.

Applicando il principio del computo delle costanti alla corrispondenza π prima considerata si ha

$$(11) \quad a_1 + b_1 = b + d,$$

da cui, in virtù delle (5), (6), (8), (9), (10), si ottiene

$$\varepsilon + \varepsilon_1 = 0,$$

il che è assurdo in base alle $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 \geq 0$.

6. - Supponiamo, in secondo luogo, che l' S_k su cui giace il generico M_{k-1}^n di $\bar{\Omega}$ sia incidente all' \bar{S}_k secondo un S_h ($h \geq 0$) non situato su \bar{M}_{k-1}^n .

Le dimensioni a_1 , b_1 , in questo caso divengono

$$(12) \quad a_2 = (k-h)(r-k) + (h+1)(k-h) + \binom{n+k}{k} - \\ - \binom{n+k-2}{k} - \binom{n+h}{h} + k - \varepsilon_2, \quad \text{con } \varepsilon_2 \geq 0,$$

$$(13) \quad b_2 = \binom{n+r}{r} - 2\binom{n+k}{k} + \binom{n+h}{h}^5,$$

mentre la (11) assume la forma

$$a_2 + b_2 = b + d,$$

dalla quale, in virtù delle (6), (8), (12), (13) e delle $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_2 \geq 0$, si ottiene

$$(14) \quad r < 2k - h,$$

limitazione che risulta manifestamente assurda.

7. - Si supponga, in terzo luogo, che l' S_h di cui al n. precedente risulti situato su \bar{M}_{k-1}^n e sul generico monoide M_{k-1}^n dell' S_k che lo determina.

⁵⁾ I valori di a_2 , b_2 si determinano facilmente appena si osservi che i monoidi di $\bar{\Omega}$ appartenenti ad uno stesso S_k devono tutti passare per la stessa forma F_{h-1}^n secondo cui l' S_h sezione di S_k con \bar{S}_k sega \bar{M}_{k-1}^n .

Le dimensioni a_1, b_1 ora divengono

$$(15) \quad a_3 = (k-h)(r-k) + \delta + \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-2}{k} - \\ - \binom{n+h}{h} + k - 1 - \varepsilon_3, \quad \text{con } \varepsilon_3 \geq 0,$$

$$(16) \quad b_3 = \binom{n+r}{r} - 2\binom{n+k}{k} + \binom{n+h}{h} + 1,$$

dove δ sta ad indicare la dimensione del sistema (più ampio, se ve n'è più di uno) degli S_h giacenti su \bar{M}_{k-1}^n . Tale dimensione soddisfa, ovviamente, alla limitazione

$$(17) \quad \delta < (h+1)(k-h),$$

in quanto il secondo membro della stessa dà la dimensione del sistema razionale di tutti gli S_h di S_k .

La (11) assume la forma

$$a_3 + b_3 = b + d,$$

e da questa, tenuto conto delle (6), (8), (15), (16), (17) e delle $\varepsilon > 0, \varepsilon_3 \geq 0$, si ricade nella limitazione assurda (14).

8. - Supponiamo, infine, che si verifichi il restante caso possibile, cioè che l' S_h in parola sia situato su \bar{M}_{k-1}^n ma non sul generico monoide M_{k-1}^n dell' S_k che lo determina.

Le dimensioni a_1, b_1 prendono i valori

$$(18) \quad a_4 = (k-h)(r-k) + \delta + \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-2}{k} + k - 1 - \varepsilon_4, \\ \text{con } \varepsilon_4 \geq 0,$$

$$(19) \quad b_4 = \binom{n+r}{r} - 2\binom{n+k}{k} + \binom{n+h}{h},$$

avendo δ ancora il significato del n. precedente.

Dalla (11), che in questo caso diviene,

$$a_4 + b_4 = b + d,$$

si deduce, avuto riguardo alle (6), (8), (18), (19) e alle $\varepsilon > 0, \varepsilon_4 \geq 0$,

$$(20) \quad (h+1)(r-k) - \binom{n+h}{h} - \delta + 1 < 0.$$

Ci proponiamo di dimostrare l'assurdità della (20) per ogni scelta di $n (\geq 3)$ e di k .

Distingueremo due casi, a seconda che la dimensione δ sia data da

$$(21) \quad \delta = (h+1)(k-h) - \binom{n+h}{h},$$

oppure da

$$(22) \quad \delta = h(k-h) - \left[\binom{n+h-1}{h-1} + \binom{n+h-2}{h-1} \right],$$

nel quale ultimo caso deve risultare $h \geq 1$ ⁶⁾.

I) In virtù della (21), la (20) si può ricondurre alla limitazione assurda (14).

II) La (20), per la (22), diviene

$$(23) \quad (h+1)(r-k) - h(k-h) - \binom{n+h-2}{h} + 1 < 0.$$

Poichè per $n=3$ la condizione (1) (che diviene $r \geq k + \frac{1}{k+1}$ e dalla quale segue $r \geq k+1$) è certo sufficiente in quanto il generico $S_k (k \leq r-1)$ di S_r tangente alla F_{r-1} la sega in un monoide M_{k-1}^3 di S_k , potremo limitarci a provare l'assurdità della (23) nel caso $n \geq 4$ (e $h \geq 1$). Distingueremo qui due sottocasi a seconda che sia $n=4$, $n \geq 5$.

a) $n=4$. — Esistono certamente, in quanto il valore di δ è dato dalla (22), degli S_k giacenti su \bar{M}_{k-1}^4 e passanti per il suo punto triplo ⁷⁾. Ciò comporta che sia

$$(24) \quad k \geq h + \frac{1}{h} \left[\binom{h+3}{h-1} + \binom{h+2}{h-1} \right].$$

Risulta poi soddisfatta la limitazione evidente

$$(25) \quad r - k \geq k - h.$$

⁶⁾ Ved. A. PREDONZAN, *Intorno ai sistemi di S_k che appartengono al monoide generale di dato ordine* [Rend. Semin. Matem. Padova, 21 (1952)] n. 1, OSS. I, III.

⁷⁾ Ved. A. PREDONZAN, *loc. cit.*, in ⁶⁾, n. 1.

La (23), in virtù della (25), diviene

$$(26) \quad k < h + \binom{h+2}{h} - 1,$$

e da questa, avuto riguardo alla (24), deriva

$$(27) \quad 4h < (5-h) \binom{h+2}{h-1}.$$

La (27) è manifestamente assurda per ogni $h \geq 5$; quindi per tali h è assurda la (23). L'assurdità di quest'ultima nei restanti casi ($1 \leq h \leq 4$) si trae direttamente dalle (24), (26); e infatti dalle stesse segue, rispettivamente, per $h=1$: $k \geq 3$, $k < 3$; per $h=2$: $k \geq 7$, $k < 7$; per $h=3$: $k \geq 12$, $k < 12$; per $h=4$: $k \geq 18$, $k < 18$.

b) $n \geq 5$. — Tenuto conto delle (1), (23), si ha

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n-2} \left[\binom{n+k-2}{n-3} - \binom{n+h-2}{n-3} \right] = \frac{1}{k+1} \binom{n+k-2}{k} - \\ & - \frac{1}{h+1} \binom{n+h-2}{h} < (r-k) + \frac{k}{k+1} - \frac{1}{h+1} [(h+1)(r-k) - \\ & - h(k-h) + 1] = \frac{k}{k+1} + \frac{h(k-h)}{h+1} - \frac{1}{h+1} < k-h+1, \end{aligned}$$

onde

$$(28) \quad \binom{n+k-2}{n-3} - \binom{n+h-2}{n-3} < (n-2)(k-h+1).$$

La (28), per $n=5$, si riduce a $(k-h)(k+h-1) < 6$, quindi è assurda per ogni scelta di h, k ($1 \leq h \leq k-2$). Ne dimostreremo ora l'assurdità per $n > 5$ con procedimento d'induzione fatto rispetto ad n . Supposto perciò che la (28) non valga per $n-1$, cioè che sia

$$(29) \quad \binom{n+k-3}{n-4} - \binom{n+h-3}{n-4} \geq (n-3)(k-h+1),$$

si tratta di dimostrare la invalidità della stessa, cioè della

$$\left[\binom{n+k-3}{n-3} - \binom{n+h-3}{n-3} \right] + \left[\binom{n+k-3}{n-4} - \binom{n+h-3}{n-4} \right] < \\ < (n-2)(k-h+1).$$

Da quest'ultima, avuto riguardo alla (29), si ottiene

$$\binom{n+k-3}{n-3} - \binom{n+h-3}{n-3} < k-h+1,$$

od anche, ove si ricordi la $h < k-1$,

$$\binom{n+k-3}{n-3} - \binom{n+k-4}{n-3} = \binom{n+k-4}{n-4} < k-h+1,$$

che, per $n > 5$, è manifestamente assurda. Si può pertanto concludere come enunciato nel n. 1.