RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

# Costruzione dei gruppi finiti a sottogruppo di Frattini identico

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 21 (1952), p. 383-394

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__383_0>

# COSTRUZIONE DEI GRUPPI FINITI A SOTTOGRUPPO DI FRATTINI IDENTICO

*Nota* (*) *di* GIOVANNI ZACHER (*a Napoli*)

Nella presente nota dimostriamo in quale modo si può costruire un generico gruppo d'ordine finito col sottogruppo di FRATTINI [1]) identico. Per la dimostrazione partiamo da un teorema dimostrato da ORE [1] [2]) che dà una condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo d'ordine finito $G$ abbia il sottogruppo di FRATTINI identico. Da esso si deduce la seguente altra caratterizzazione espressa dal seguente teorema: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo d'ordine finito $G$ abbia il sottogruppo di* FRATTINI *identico è che $G$ sia privo di sottogruppi normali abeliani, oppure, in caso contrario, il gruppo $N$ unione di tutti i sottogruppi normali minimi abeliani di $G$ abbia un complemento in $G$, vale a dire che esista un sottogruppo $C$ di $G$ per cui risulti*

$$N \cup C = G \qquad N \cap C = 1 .$$

Usando tale teorema, mediante la teoria dell'ampliamento, risolviamo il problema enunciato.

1. - Sia $G$ un gruppo ed $H$ un suo sottogruppo. Diremo che $H$ è un sottogruppo complementato di $G$, se in $G$ esiste

---

(*) Pervenuta in Redazione il settembre 1952.

1) Dicesi sottogruppo di FRATTINI $\Phi$ di un gruppo $G$, il gruppo intersezione di tutti i sottogruppi massimi di $G$.

2) I numeri tra parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia riportata in fondo alla nota.

almeno un sottogruppo $K$ per cui valgono le due relazioni

$$G = H \cup K \qquad H \cap K = 1$$

ove 1 indica il sottogruppo identico di $G$.

$K$ si dirà un complemento di $H$, (e viceversa $H$ un complemento di $K$) in $G$.

Dimostriamo ora due lemmi che ci saranno utili in seguito.

LEMMA I: *Se $H_1$, $H_2$ sono due sottogruppi permutabili tra loro di $G$, con $H_2$ complemento di $H_1$ in $G$, se $K_2$ è un sottogruppo di $H_2$ permutabile con $H_1$, se $K_1$ è un complemento di $K_2$ permutabile con $K_2$ stesso, allora il gruppo $H_2 \cap K_1$ è un complemento di $K_2 \cup H_1$ in $G$, ossia si ha*

$$(H_1 \cup K_2) \cup (H_2 \cap K_1) = G \tag{1}$$

$$(H_1 \cup K_2) \cap (H_2 \cap K_1) = 1 \tag{2}$$

Dimostriamo anzitutto la (1).

Abbiamo

$$(H_1 \cup K_2) \cup (H_2 \cap K_1) = [H_1 \cup (H_2 \cap K_1)] \cup [K_2 \cup (H_2 \cap K_1)] \tag{3}$$

Ora per ipotesi $H_2 \supset K_2$, e $K_2$ è permutabile con $K_1$.

All'espressione $K_2 \cup (H_2 \cap K_1)$ si può quindi applicare la relazione di DEDEKIND, sicchè si ha

$$K_2 \cup (K_1 \cap H_2) = (K_2 \cup K_1) \cap H_2 .$$

Pertanto la (3) ci dà

$$\begin{aligned}(H_1 \cup K_2) \cup (H_2 \cap K_1) &= [H_1 \cup (H_2 \cap K_1)] \cup [K_1 \cup K_2) \cap H_2] = \\ &= [H_1 \cup (H_2 \cap K_1)] \cup [(G \cap H_2)] = H_1 \cup (H_2 \cap K_1) \cup H_2 = \\ &= G \cup (K_1 \cap H_2) = G\end{aligned}$$

il che dimostra la (1).

Per provare la (2) ragioniamo per assurdo. Supponiamo che l'intersezione $(H_1 \cup K_2) \cap (H_2 \cap K_1) = I$ non si riduca al sottogruppo identico. Sia allora $x$ un elemento di $I$ diverso dall'identità. Poichè $K_2$ è per ipotesi permutabile con $H_1$, sarà $x = h_1 k_2$ con $h_1$ elemento di $H_1$, $k_2$ elemento di $K_2$, ed $h_1 \neq 1$, $k_2 \neq 1$, essendo $K_1 \cap K_2 = H_1 \cap H_2 = 1$.

Ora da $x = h_1 k_2$ si ricava $h_1 = x k_1^{-1}$. Ma $x$ sta in $H_2$, perchè sta in $K_1 \cap H_2$, $k_2$ sta in $H_2$ essendo $K_2 \subseteq H_2$. Quindi $h_1$

è un elemento di $H_1$ e di $H_2$ non identico, il che contraddice alla relazione $H_1 \cap H_2 = 1$. L'assurdo cui siamo pervenuti dimostra così anche la (2); il lemma I è con ciò dimostrato.

COROLLARIO: *Se $C$ è il complemento di un sottogruppo normale $N$ di $G$, se $K$ è un sottogruppo normale di $G$ contenuto in $C$ e se $C'$ è un complemento di $K$ in $G$, allora $C \cap C'$ è un complemento di $N \cup K$ in $G$.*

Invero un sottogruppo normale di un gruppo $G$ essendo permutabile con ogni elemento di $G$, è permutabile pure con ogni sottogruppo di $G$, per cui sono soddisfatte tutte le condizioni del lemma I.

LEMMA II: *Se $N$ è un sottogruppo unione di sottogruppi normali minimi abeliani di un gruppo $G$, se $C$ è un complemento di $N$ in $G$, privo di sottogruppi normali abeliani in $G$, allora $N$ è l'unione di tutti i sottogruppi normali minimi abeliani di $G$.*

*Dimostrazione*: Procediamo per assurdo. Sia $H$ un sottogruppo normale minimo abeliano di $G$ non contenuto in $N$. Detto $h$ un elemento di $H$ non identico, consideriamo in $G$ il sistema completo $T$ di elementi coniugati individuato da $h$. Gli elementi di $T$ appartengono tutti ad $H$, essendo $H$ normale in $G$, e si ha $H = \{T\}$ perchè $H$ è un sottogruppo normale minimo di $G$. Ogni elemento $g$ di $G$ trasforma gli elementi di $T$ tra di loro subordinando una permutazione. Essendo $N \cap H = 1$, perchè $H$ è un sottogruppo normale minimo in $G$, è $N \cup H = N \times H$, per cui $N \cup H$ è un gruppo abeliano. Inoltre è $G = N \cup C = NC$, sicchè un elemento generico $h_i$ di $T$ si potrà rappresentare come prodotto di un elemento $n_i$ di $N$ ed uno $c_i$ di $C$:

$$h_i = n_i c_i$$

dove gli elementi $n_i$, $c_i$ sono univocamente determinati da $h_i$, essendo $N \cap C = 1$.

Sia ora $n$ un elemento qualsiasi di $N$. Poichè $h_i n = n h_i$ si ha

$$(n_i c_i) n = n (n_i c_i) \tag{4}$$

Ma $n n_i = n_i n$, essendo $N$ abeliano, e quindi la (4) ci dà:

$$n_i (c_i n) = (n_i c_i) n = n (n_i c_i) = n_i (n c_i)$$

ossia

(5) $$c_i n = n c_i$$

vale a dire ogni elemento di $N$ è permutabile con $c_i$.

Indichiamo con $g$ un elemento generico di $G$. Esso può porsi in modo univoco sotto la forma $g = nc$ con $n$ in $N$ e $c$ in $C$. Ne segue $g^{-1}c_i g = c^{-1}n^{-1}c_i nc = c^{-1}c_i c = c'$ con $c'$ in $C$.

In definitiva un elemento qualsiasi $g$ di $G$, trasforma $c_i$ in un elemento appartenente ancora a $C$.

Detto questo, posto $h_i = n_i c_i$, $g^{-1}h_i g = h_j$, $h_j = n_j c_j$ con $n_i$, $n_j$ in $N$, $c_i$, $c_j$ in $C$, si ha

$$g^{-1}h_i g = (g^{-1}n_i g)(g^{-1}c_i g) = n_i' c_i' = h_j = n_j c_j .$$

Ma $n_i'$ sta in $N$, essendo $N$ un sottogruppo normale, $c_i'$ sta in $C$ per quanto si è visto or ora, e quindi

$$n_i' = n_j , \quad c_i' = c_j$$

data la unicità della rappresentazione degli elementi di $G$ come prodotto di un elemneto di $N$ per un elemento di $C$.

Se allora indichiamo con $M$ l'insieme degli elementi di $C$ che figurano nella rappresentazione degli elementi di $T$ come prodotto di un elemento di $N$ ed uno di $C$, per quanto si è visto, risulta che un elemento qualsiasi $g$ di $G$ trasforma gli elementi di $M$ tra di loro. Il gruppo $\{M\}$ è quindi un sottogruppo normale di $G$ contenuto in $C$, non identico. Il gruppo $\{M\}$ è però anche abeliano, avendosi

$$h_i h_j = n_i c_i n_j c_j = h_j h_i = n_j c_j n_i c_i$$

e per la (5) quindi

$$n_i n_j c_i c_j = n_i c_i n_j c_j = h_i h_j = h_j h_i = n_j c_j n_i c_i = n_j n_i c_j c_i = n_i n_j c_j c_i ,$$

ossia

$$c_i c_j = c_j c_i .$$

L'assurdo cui siamo così pervenuti prova il lemma II.

Osserviamo che il lemma II vale pure se si toglie l'ipotesi che i gruppi normali minimi siano abeliani, ipotesi che abbiamo fatto perchè ci sarà utile in seguito.

2. - Passiamo ora allo studio di un gruppo d'ordine finito in cui il sottogruppo di Frattini $\Phi$ di $G$ è identico.

Ore in una sua bella memoria sulla teoria dei gruppi [1], tra i molti risultati ivi esposti, dimostrò il seguente teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo d'ordine finito $G$ abbia il sottogruppo di Frattini identico, è che il massimo sottogruppo normale speciale $L$ di $G$ sia identico, oppure $L$ sia l'unione di gruppi abeliani elementari [3]) e in quest'ultimo caso ogni sottogruppo normale minimo di $G$ deve avere complemento in $G$.

Notiamo che, *affinchè un gruppo finito $G$ abbia il sottogruppo di* Frattini $\Phi$ *identico è sufficiente che ogni sottogruppo abeliano normale minimo abbia complemento in $G$.*

Invero supponiamo che pure essendo soddisfatta tale condizione in $G$, il gruppo $\Phi$ non sia identico. Essendo $\Phi$ un gruppo speciale [2], esso contiene certamente un $p$-gruppo normale in $G$, e quindi anche un $p$-gruppo $H$ normale minimo in $G$. Ma un $p$-gruppo normale minimo di un gruppo $G$ d'ordine finito è sempre abeliano (come prodotto diretto di gruppli semplici d'ordine $p$). Ora $H$ come sottogruppo di $\Phi$ non può avere complemento in $G$. Infatti se $K$ è un complemento di $H$ in $G$, esso sarà certamente contenuto in un sottogruppo massimo $M$ di $G$. Ma il gruppo $\Phi$, come intersezione di tutti i sottogruppi massimi di $G$ è pure contenuto in $M$ e quindi anche $H$ è in $M$. Pertanto $H \cup K$ essendo in $M$ al pari di $H$ e $K$ non può coincidere con $G$.

L'assurdo ottenuto prova la nostra affermazione.

Tenendo ora presente il teorema di Ore enunciato poco fa, e che se in esso $L$ è identico, $G$ non ha sottogruppi normali minimi abeliani, e viceversa, possiamo dire:

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè il gruppo di* Frattini $\Phi$ *di un gruppo finito $G$ sia identico è che, se $G$ ammette sottogruppi normali minimi abeliani, ogni tale sottogruppo abbia complemento in $G$.*

---

[3]) Vale a dire un gruppo abeliano i cui elementi hanno ognuno per ordine un numero primo.

Siamo adesso in grado di dimostrare il seguente teorema:

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè il gruppo di* FRATTINI $\Phi$ *di un gruppo finito* $G$ *sia identico è che, se* $G$ *ammette sottogruppi normali abeliani, l'unione* $N$ *di tutti i sottogruppi di tal tipo abbia complemento in* $G$.

Sia dunque $G$ un gruppo finito col sottogruppo di FRATTINI $\Phi$ identico. Sia $P_1$ un sottogruppo normale minimo abeliano di $G$. Esso avrà un complemento $C_1$ in $G$. Supponiamo che $C_1$ contenga un sottogruppo $P_2$ abeliano normale minimo in $G$. Se $C_2$ è un complemento di $P_2$, in virtù del corollario del n. 1, il gruppo $C_{1,2} = C_1 \cap C_2$ è un complemento di $P_1 \times P_2$ in $G$. Se poi esiste un sottogruppo normale abeliano minimo $P_3$ contenuto in $C_{1,2}$ e $C_3$ è un suo complemento in $G$, il gruppo $C_{1,2,3} = C_{1,2} \cap C_3$ è un complemento, sempre pel corollario del n. 1, di $P_1 \times P_2 \times P_3$ in $G$. Così continuando, poichè l'ordine di $G$ è finito, dopo un numero finito di passi si arriverà ad un sottogruppo $C_{1,2,\ldots n}$ di $G$ tale che esso non contiene più alcun sottogruppo normale minimo abeliano di $G$ e che risulta il complemento di un sottogruppo $N$ di $G$ prodotto diretto di $n$ convenienti sottogruppi normali minimi abeliani: $N = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$.

Ricordando allora il lemma II del n. 1, possiamo senz' altro concludere che $N$ è unione di tutti i sottogruppi normali minimi abeliani di $G$.

La necessità della condizione risulta con ciò dimostrata.

Dimostriamo ora la sufficienza della condizione. Se $G$ non ha sottogruppi normali abeliani minimi, il suo sottogruppo di FRATTINI $\Phi$ è identico pel teorema precedente. In caso contrario, supponiamo dunque che il sottogruppo $N$ unione di tutti i sottogruppi normali minimi abeliani abbia complemento $C$ in $G$. Sia allora $P$ un sottogruppo normale minimo abeliano qualsiasi di $G$. Esso sarà contenuto in $N$. E' facile convincersi che $N$ si può rappresentare come prodotto diretto di $P$ e di un altro sottogruppo $H$ pure normale in $G$

$$N = P \times H$$

Ma allora il gruppo $H \cup C$ è un complemento di $P$ in $G$.

In definitiva ogni sottogruppo normale minimo abeliano di $G$ ha complemento in $G$. Ma ciò basta, per quanto si è detto, perchè in $G$ il sottogruppo di FRATTINI $\Phi$ sia identico.

Il nostro teorema è così completamente dimostrato.

3. - Sfruttando le conclusioni del n. 2 e facendo ricorso alla teoria dell' ampliamento di un gruppo [3], facciamo vedere in questo n°. come si possono costruire i gruppi d' ordine finito aventi il sottogruppo di FRATTINI identico, e non privi di sottogruppi normali abeliani.

Sia $G$ un gruppo d'ordine finito col sottogruppo di FRATTINI $\Phi$ identico. Sia $N$ il sottogruppo abeliano elementare di $G$ unione di tutti i sottogruppi normali abeliani minimi. Il gruppo $N$ ha allora un complemento in $C$ in $G$ e $C$ risulta privo di sottogruppi normali abeliani in $G$ (n. 2). Se diciamo $H$ il sottogruppo di $C$ unione di tutti i sottogruppi normali in $G$ e contenuti in $C$, poichè $N \cap C = 1$, sarà pure $N \cap H = 1$ e quindi $N \cup H = N \times H$; pertanto ogni elemento di $H$ è permutabile con tutti gli elementi di $N$, anzi $H$ è costituito da tutti e soli gli elementi di $C$ permutabili con ogni elemento di $N$. Invero se $F$ indica il centralizzante di $N$ in $G$, è $F_N \cap C \supseteqq H$.

Ma $F_N \cap C$ è un sottogruppo normale di $C$, essendo $F_N$ normale in $G$. Ne segue che $F_N \cap C$ è pure normale in $G$, perchè ogni elemento di $F_N \cap C$ è permutabile con ogni elemento di $N$, e il gruppo $G$ è dato dal prodotto $NC$. Quindi, per la definizione di $H$, è pure $H \supseteqq F_N \cap C$, e perciò in definitiva $H = F_N \cap C$.

Abbiamo visto che $C$ non può contenere sottogruppi abeliani normali in $G$. Dimostriamo allora che $H$ non può neppure contenere sottogruppi abeliani normali in $H$. Invero sia $L$ un sottogruppo abeliano normale minimo in $H$. Se consideriamo i suoi coniugati in $G$, essi sono tutti sottogruppi di $H$, perchè $H$ è normale in $G$ e risultano pure sottogruppi normali minimi in $H$ come corrispondenti di $L$ in convenienti automorfismi di $H$. La loro unione risulta quindi un sottogruppo normale abeliano in $G$ contenuto in $C$, il che è assurdo.

Se noi associamo ad ogni elemento $c$ di $C$ quell' automorfismo che esso subordina in $N$, trasformando i singoli elementi di $N$ mediante $c$, $C$ risulta evidentemente omomorfo ad un sottogruppo $T$ del gruppo degli automorfismi $A_N$ di $N$. In tale omomorfismo l'elemento identico è il corrispondente di tutti e soli quegli elementi di $C$ che sono permutabili con ogni elemento di $N$, sicchè risulta

$$T \cong \frac{C}{H} \tag{6}$$

Notiamo ancora che essendo $N$ prodotto diretto di sottogruppi normali minimi abeliani di $G$, $H = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_s$, ogni elemento $c$ di $C$ deve trasformare $R_i$ in sé, mentre $R_i$, essendo normale minimo in $G$, non deve contenere nessun sottogruppo che gode di analoga proprietà; tenendo conto del significato della (6), brevemente si potrà dire che $R_i$ ($i = 1, 2 \dots s$), ma nessun suo sottogruppo proprio, dev'essere ammissibile per ogni automorfismo di $T$.

Osserviamo ancora che il gruppo $\frac{G}{H}$ risulta isomorfo all'olomorfo $L$ di $T$ sopra $N$.

Perciò dimostriamo la seguente proposizione: *Se $G$, $G'$ sono due gruppi ciascuno prodotto rispettivamente di due sottogruppi $H$, $K$, $H'$, $K'$,*

$$G = HK \quad , \quad G' = H'K'$$

*con* $H \cap K = H' \cap K' = 1$, $H \cong H'$, $K \cong K'$, *posto* $h' = \varphi(h)$ *a indicare il corrispondente in $H'$ di un elemento generico $h$ di $H$ nell'isomorfismo tra $H$ e $H'$, e significato analogo per $k' = f(k)$, se da $\bar{k}\bar{h} = hk$ segue*

$$f(k)\varphi(h) = \varphi(\bar{h})f(\bar{k}) \tag{7}$$

*il gruppo $G$ è isomorfo al gruppo $G'$.*

Invero associamo all'elemento generico $hk$ di $G$ l'elemento

$$\tau(hk) = \varphi(h)f(k)\,.$$

Dimostriamo che tale corrispondenza $\tau$ è un isomorfismo. Si tratta anzitutto di una corrispondenza biunivoca giacchè per le ipotesi fatte un elemento $g$ di $G$ si può rappresentare in un solo modo come prodotto di un elemento di H e di uno di $K$, e analogamente un elemento $g'$ di $G'$ si può rappresentare in un solo modo come prodotto di un elemento di $H'$ ed uno di $K'$.

Ci resta pertanto da dimostrare che si ha per due elementi qualsiasi $g_1$, $g_2$ di G

$$\tau(g_1 g_2) = \tau(g_1)\tau(g_2)\,.$$

Sarà $g_1 = h_1 k_1$, $g_2 = h_2 k_2$, e quindi $g_1 g_2 = h_1 k_1 h_2 k_2 = h_1 \bar{h}_2 \bar{k}_1 k_2$.

Pertanto, tenendo conto che $\varphi$ ed $f$ sono isomorfismi, e della (7), si ha

$$\tau(g_1 g_2) = \tau[(h_1 \bar{h}_2)(\bar{k}_1 k_2)] = \varphi(h_1 \bar{h}_2) f(\bar{k}_1 k_2) = \varphi(h_1)\varphi(\bar{h}_2) f(\bar{k}_1) f(k_2) =$$
$$= \varphi(h_1) f(k_1) \varphi(h_2) f(k_2) = \tau(h_1 k_1)\tau(h_2 k_2) = \tau(g_1)\tau(g_2)\,. \qquad \text{c. v. d.}$$

Ritornando al gruppo $\dfrac{G}{H}$, abbiamo

$$\frac{G}{H} = \frac{N \cup H}{H} = \frac{N \cup H}{H} \cdot \frac{C}{H}\,.$$

Se $L$ è l' olomorfo di $T$ rispetto $N$, risulta $L = NT$, e se $n$, $t$ sono due elementi qualsiasi di $N$ e $T$ si ha $nt = tn'$, ove $n'$ è l' omologo di $n$ nell' automorfismo $t$ di $N$. D' altra parte è

$$\frac{N \cup H}{H} \cong N\,, \quad \frac{C}{H} \cong T$$

e risulta pure soddisfatta la (7) in quanto se $c$ è un elemento generico di $C$, l' elemento $cnc' = n'$ coincide coll' elemento in cui l'automorfismo $t$ di $N$ corrispondente all'elemento $c|H|$ di $\dfrac{C}{H}$ nell' isomorfismo tra $\dfrac{C}{H}$ e $T$ porta $n$. Quindi in base alla proposizione sopra dimostrata risulta

$$\frac{G}{H} \cong L\,.$$

Detto tutto questo, per costruire un generico gruppo $G$ d' ordine finito col sottogruppo di FRATTINI $\Phi$ identico e non privo di sottogruppi normali abeliani, si potrà procedere nel seguente modo.

Si consideri un gruppo $N$ abeliano elementare d' ordine finito qualsiasi e si scomponga $N$ in modo arbitrario nel prodotto di $n$ $p$-gruppi: $N = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$. Scegliamo quindi un sottogruppo $T$ del gruppo degli automorfismi $A_N$ di $N$ tale che $R_i (i = 1, 2 \dots n)$ sia ammissibile per ogni automorfismo appartenente a $T$, ma che non contenga alcun sottogruppo godente della stessa proprietà. Che ciò sia sempre possibile prova la seguente considerazione. Se con $A_{R_i}$, indichiamo il gruppo degli automorfismi di $R_i$, consideriamo il gruppo prodotto diretto $M = A_{R_1} \times A_{R_1} \times \dots \times A_{R_n}$. Tale gruppo è isomorfo ed un sottogruppo del gruppo degli automorfismi $A_N$.

Invero se $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ è un elemento generico di $M$ ed $e = h_1 h_2 \dots h_n$ un elemento generico di $N$ con $h_i$ in $R_i$, la trasformazione $l^\theta = h_1^{\theta_1} h_2^{\theta_2} \dots h_n^{\theta_n}$ risulta un automorfismo di $N$ che muta il gruppo $R_i$ in sè. $R_i$ contiene però nessun sottogruppo ammissibile per tutti gli elementi di $M$. Infatti ciò implicherebbe che $R_i$ contenesse un sottogruppo ammissibile per ogni elemento di $M$ del tipo $(e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, \theta_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$ con $e_j$ elemento identico di $A_{R_j}$, vale a dire per ogni automorfismo di $R_i$, il che è impossibile perchè un $p$-gruppo abeliano elementare è privo di sottogruppi caratteristici.

Prendiamo ora un gruppo $H$ soggetto alla condizione di non contenere sottogruppi normali abeliani, che è equivalente a dire privo di sottogruppi normali risolubili (invero se $H$ contiene un sottogruppo $M$ normale risolubile, fra i derivati successivi di $M$ figura uno abeliano che risulta normale in $H$ come sottogruppo caratteristico di un sottogruppo normale di $H$), e consideriamo un ampliamento qualsiasi di $H$ secondo $T$. Chiamiamo $C$ tale ampliamento, e sia $L$ l'olomorfo di $T$ rispetto a $N$. Se $c$ è un elemento generico di $C$, con $t_c$ indichiamo l'automorfismo di $N$ che corrisponde al laterale $c|H|$ nell'isomorfismo tra $\dfrac{C}{H}$ e $T$.

Consideriamo ora le coppie ordinate $(n, c)$ con $n$ elemento di $N$ e $c$ elemento di $C$ e definiamo il seguente prodotto

$$(8) \qquad (n_1, c_2)(n_2, c_2) = (n_1 n_2', c_1 c_2)$$

ove $n_2'$ è il trasformato in $n_2$ mediante l' automorfismo $t_{c_1}$.

E' facile verificare che in tal modo si viene ad ottenere un gruppo $\overline{G}$ prodotto di due sottogruppi $\overline{N}$, $\overline{C}$ isomorfi ad $N$ e $C$ con $\overline{N} \cap \overline{C} = 1$, $\overline{N}$ sottogruppo normale di $\overline{G}$, e gli elementi di $C$ permutabili con ogni elemento di $\overline{N}$ costituiscono un sottogruppo normale $\overline{H}$ di $\overline{G}$ isomorfo ad $H$, per cui si ha $\dfrac{\overline{G}}{\overline{H}} \simeq L$.

Verifichiamo che il gruppo $\overline{G}$ ha il sottogruppo di FRATTINI $\overline{\Phi}$ identico.

Invero, poichè il gruppo $\overline{N}$ ha complemento in $\overline{G}$, basterà dimostrare, per quanto si è visto al n. 2, che $\overline{N}$ è unione di tutti i sottogruppi normali minimi abeliani di $\overline{G}$.

Indichiamo con $\overline{U}$ il gruppo unione di tutti i sottogruppi normali minimi abeliani di $\overline{G}$. Dimostriamo anzitutto che $\overline{N} \subseteq \overline{U}$.

Per la (8), ogni elemento $\overline{c}$ di $\overline{C}$ determina un automorfismo in $\overline{N}$, che coincide precisamente con $t_c$ di $T$, se $c$ indica il corrispondente di $\overline{c}$ nell'isomorfismo tra $\overline{C}$ e $C$; poichè gli unici elementi di $\overline{C}$ permutabili con ogni elemento di $\overline{N}$ sono quelli di $\overline{H}$, ne segue che $\dfrac{\overline{C}}{\overline{H}}$ è isomorfo a $T$, per cui gli $n$ gruppi $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$, ..., $\overline{R}_n$, di cui $\overline{N}$ è il prodotto diretto risultano normali in $\overline{G}$, anzi normali minimi perchè non contengono sottogruppi ammissibili per tutti gli automorfismi di $T$. E' quindi $\overline{N} \subseteq \overline{U}$.

Sia ora $\overline{N} \subset \overline{U}$. Allora il gruppo $\overline{U} \cap \overline{C}$ non può essere identico. Ma $\overline{U} \cap \overline{C}$ è abeliano e normale in $\overline{C}$, perchè $\overline{U}$ lo è in $G$. Inoltre $\overline{U} \cap \overline{C}$ deve stare in $\overline{H}$ in quanto tutti e soli gli elementi di $\overline{C}$ permutabili elemento per elemento con $\overline{N}$ sono quelli di $\overline{H}$. Ma $\overline{H}$ è privo di sottogruppi abeliani normali; d'onde l'assurdo. Dunque $\overline{N} = \overline{U}$; pertanto $\overline{G}$ ha il gruppo di FRATTINI $\overline{\Phi}$ identico.

Riassumendo le considerazioni fatte al n. 3 possiamo concludere:

*Un generico gruppo d'ordine finito $G$ col sottogruppo di* FRATTINI *identico e non privo di sottogruppi normali abeliani si ottiene nel seguente modo: Preso un gruppo abeliano elementare, $N$, lo si scompone nel prodotto diretto di $p$-gruppi $N = R_1 \times R_2 \times ... \times R_n$; si assume indi un sottogruppo $T$ del*

***gruppo degli automorfismi $A_N$ di N in modo tale che $R_i$ ma nessun suo sottogruppo sia ammissibile per ogni automorfismo di N appartenente a T ($i = 1, 2, \ldots, n$) e si considera quindi l'olomorfo L di T sopra N; detto H un gruppo privo di sottogruppi abeliani normali, si effettui un ampliamento qualsiasi di H secondo T. Se per le coppie ordinate (n, c), con n elemento di N e c elemento di C, ove C indica l'ampliamento di H secondo T, si definisce il prodotto mediante la legge***

$$(n_1, c_2)(n_2, c_2) = (n_1 n_2', c_1 c_2),$$

***ove $n_2'$ è il trasformato di $n_2$ mediante l'automorfismo $t_{c_1}$ corrispondente di $c_1|H|$ nell'isomosfismo tra $\frac{C}{H}$ e T, l'insieme di tali coppie forma gruppo rispetto all'operazione ora definita, ed il gruppo così ottenuto fornisce il tipo più generale di gruppo d'ordine finito col sottogruppo di Frattini identico, e non privo di sottogruppi normali abeliani.***

***Ogni gruppo d'ordine finito privo di sottogruppi normali abeliani ha il sottogruppo di Frattini identico.***

OSSERVAZIONE: Nel caso che si tratti di costruire un gruppo risolubile $G$ d'ordine finito col sottogruppo di FRATTINI identico si deve assumere $H = 1$, in quanto, come si è detto, H dev'essere privo di sottogruppi normali risolubili, per cui $G$ si riduce all'olomorfo di $T$ sopra $N$.

BIBLIOGRAFIA

[1] O. ORE: *Contribution to the theory of groups of finite order*, « Duke Math. Journal », vol. 5 (1939), pp. 444-445.

[2] H. ZASSENHAUS: *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Teubner (1937), p. 107.

[3] *Loc. cit.* [2], pp. 89-98.