

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO MORIN

**Sull'unirazionalità dell'ipersuperficie del
quarto ordine dell' S_6**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 21 (1952), p. 406-409

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__406_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULL' UNIRAZIONALITÀ DELL' IPERSUPERFICIE DEL QUARTO ORDINE DELL' S_6 .

Nota (*) di UGO MORIN (a Padova)

1. - È noto che un'ipersuperficie algebrica generale V_{r-1}^n dello spazio lineare S_r , rappresentata dunque da un'equazione

$$(1) \quad f(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0,$$

in cui f è una forma dell'ordine $n \geq 3$ è *unirazionale*; cioè che la (1) è risolvibile mediante equazioni parametriche razionali, non razionalmente invertibili:

$$(2) \quad x_i = \varphi_i(t_0, t_1, \dots, t_{r-1})$$

di r parametri omogenei se la dimensione r dello spazio ambiente è sufficientemente grande rispetto all'ordine n , ¹⁾.

Si è potuto cioè rimostrare che per la unirazionalità della V_{r-1}^n è sufficiente che r sia maggiore od uguale di un certo intero r_n , dipendente da n ; dove, per $n = 3$ è $r_3 = 3$, per $n = 4$ è $r_4 = 7$, per $n = 5$ è $r_5 = 17$ e per $n \geq 6$ r_n si determina in modo ricorrente.

Ma da quelle dimostrazioni non risulta che la condizione $r \geq r_n$ sia anche *necessaria* per l'unirazionalità della V_{r-1}^n . Sussiste dunque la possibilità di abbassare questa limitazione inferiore di r e rimane aperto il difficile problema di fissarne, per ogni n , il *minimo*. Solo per $n = 3$ si sa che questo minimo è $r = 3$.

(*) Pervenuta in Redazione il 26 giugno 1952.

¹⁾ SEGRE B., *Questions arithmétiques sur les variétés algébriques* [Colloques internationaux. Algèbre et théorie des nombres. Paris 25 Sett. 1949, Centre Nat. de la recherches scientifiques] ove trovansi citati lavori di MORIN, ROTH, PREDONZAN.

In questa nota verifico l'unirazionalità dell'ipersuperficie generale del quarto ordine anche per $r = 6$. Poichè, come noto, una curva del quarto ordine dell' S_2 ed una superficie del quarto ordine dell' S_3 non sono (in generale) uni-razionali, rimane (per $n = 4$) soltanto di riconoscere se l'ipersuperficie generale del quarto ordine dell' S_4 o dell' S_5 sono unirazionali oppure no.

Ricordiamo infine che FANO ha da tempo dimostrato che la V_3^4 generale dell' S_4 non è birazionale, ²⁾.

2. - Ricordiamo i seguenti due teoremi, dei quali avremo bisogno nel corso della nostra dimostrazione:

TEOREMA I. - Un'ipersuperficie generale del quarto ordine dell' S_r ammette, se è $r \geq 5$, degli S_3 che la segano in superficie F_2^4 con un punto triplo (monoidi), dunque *razionali*, ³⁾.

TEOREMA II. - Una V_{r-1}^m dell' S_r , $r \geq 6$, con un S_{r-3} multiplo dell'ordine $m-2$, cioè segata dagli $\infty^2 S_{r-2}$ per l' S_{r-3} (oltre che in questo spazio multiplo) in quadriche Q_{r-3} , è *birazionale*.

Ciò dipende dal fatto che queste $\infty^2 Q_{r-3}$ ammettono una superficie unisecante, ⁴⁾.

3. - Consideriamo un'ipersuperficie algebrica generale V_5^4 , del quarto ordine, dello spazio lineare S_6 ; rappresentata da un'equazione del tipo della (1), con $r = 6$. Sia F_2^4 una superficie *razionale* della V_5^4 , sua sezione con un opportuno S_3 , (n. 2).

L' S_5 tangente alla V_5^4 in un punto generico Y della F_2^4 sega la V_5^4 secondo una V_4^4 col punto doppio Y . Una generatrice generica g del cono quadrico K tangente alla V_4^4 in Y taglia ulteriormente la V_4^4 (e quindi la V_5^4) in un solo punto P . Que-

²⁾ FANO G., *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli* [Atti dell'Acc. delle Sc. di Torino, t. 44 (1909)].

³⁾ PREDONZAN A., *Sui monoidi V_{k-1}^n di S_k che appartengono alla forma generale F_{r-1}^n di S_r* [questi «Rendiconti», questo volume].

⁴⁾ BALDASSARRI M., *Su un criterio di riduzione per un sistema algebrico di varietà* [Rend. Padova t. 19 (1950)].

sti punti P generano al variare della g in K , una V_3^8 sezione di K , con la V_4^4 .

L'insieme delle generatrici g del cono K , e quindi la varietà V_3^8 , possono riferirsi prospettivamente alla quadrica \bar{Q}_3 , sezione di K con un iperpiano generico fisso \bar{S}_3 , dell' S_6 . Variando Y sulla F_2^4 otteniamo in questo modo un sistema razionale Σ_2, ∞^2 , di quadriche \bar{Q}_3 .

Fissiamo inoltre un S_3^* generico dell' S_6 e consideriamo la stella Σ_2^* degli ∞^2 S_4^* passanti per questo S_3^* . Stabiliamo ora una corrispondenza birazionale Ω tra il sistema razionale Σ_2 e la stella Σ_2^* ; in cui dunque ad una \bar{Q}_3 di Σ_2 , interpretata come elemento, corrisponde uno spazio S_4^* della stella Σ_2^* .

Introduciamo inoltre una retta S_1^* dell' S_6 da cui proiettiamo, punto per punto, una \bar{Q}_3 di Σ_2 sopra l' S_4^* ad essa corrispondente nella Ω . Otteniamo così dentro a questo S_4^* una quadrica Q_3^* , in corrispondenza birazionale colla \bar{Q}_3 (e quindi anche con la rispettiva V_3^8).

Al variare del punto Y sulla F_2^4 , quindi della V_3^8 nella V_4^4 , quindi della \bar{Q}_3 in Σ_2 , quindi della corrispondente Q_3^* insieme all' S_4^* di Σ_2^* cui essa appartiene, questa Q_3^* descrive un'ipersuperficie V_5^m dell' S_6 d'un certo ordine m . L' S_3^* , centro della stella Σ_2^* , è per la V_5^m multiplo dell'ordine $m-2$ in quanto un S_4^* generico di Σ_2^* sega la V_5^m , oltre che nell' S_3^* , soltanto in una quadrica Q_3^* .

Dunque (n. 2) la V_5^m ora ottenuta è birazionale; cioè i suoi punti P^* si possono porre in corrispondenza birazionale coi punti $P'(t_0, t_1, \dots, t_5)$ d'uno spazio lineare S'_5 .

Ad un punto generico P' dell' S'_5 , corrisponde dunque birazionalmente un punto P^* della V_5^m . A questo punto P^* , appartenente ad una determinata Q_3^* , corrisponde mediante la proiezione dalla retta S_1^* un determinato punto P sulla quadrica \bar{Q}_3 che è associata alla Q_3^* mediante la Ω .

A questo punto \bar{P} corrisponde prospettivamente una generatrice g del cono K (dal quale la \bar{Q}_3 proviene) il cui vertice è un punto Y della F_2^4 . Questa retta g incontra la V_4^4 , fuori di Y , in un solo punto P .

Il punto P della V_4^4 così ottenuto è individuato dal punto P' mediante una catena di operazioni algebriche, perciò le sue

coordinate $P(x_0, x_1, \dots, x_6)$ sono funzioni razionali del tipo delle (2), delle coordinate di $P'(t_0, t_1, \dots, t_5)$.

4. - D'altra parte, il punto P ora determinato è un punto generico della V_5^4 .

Infatti, se una retta g passa per un punto generico $P(x_0, x_1, \dots, x_r)$ della V_5^4 (di equazione (1)) ed ha con essa un contatto tripunto in un altro punto $Y(y_0, y_1, \dots, y_r)$; le coordinate di questi due punti P ed Y soddisfano al sistema delle due equazioni:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_0} x_0 + \frac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_r} x_r = 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y_0} x_0 + \frac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_r} x_r \right)^{(2)} = 0 \end{cases}$$

che rappresentano, se consideriamo P fisso ed Y variabile, le ipersuperficie polari prima e seconda di P rispetto alla V_5^4 . Esse sono degli ordini $4 - 1 = 3$ e $4 - 2 = 2$.

Seguendo queste due ipersuperficie coll' S_3 della F_2^4 inizialmente fissato (n. 3) si ottengono due superficie dell' S_3 che hanno in comune una curva dell'ordine $2 \cdot 3 = 6$. Questa curva sega a sua volta la F_2^4 in $6 \cdot 4 = 24$ punti Y_i ($i = 1, 2, \dots, 24$).

Ciascuno di questi 24 punti Y_i è dunque vertice d' un cono K (n. 3) di cui una generatrice g passa per il punto P .

Dunque, mediante le equazioni parametriche (2), ottenute col procedimento del n. 3, un punto generico P , della V_5^4 proviene da 24 punti P dell' S_5' ; cioè queste equazioni danno una rappresentazione unirazionale della V_5^4 .