

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

E. MORGANTINI

**Sulla ricerca delle soluzioni intere di un tipo
notevole di equazioni diofantee**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 21 (1952), p. 44-57

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__44_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLA RICERCA DELLE SOLUZIONI INTERE DI UN TIPO NOTEVOLE DI EQUAZIONI DIOFANTEE

Nota (*) di E. MORGANTINI (a Padova)

1. - Una parte del metodo usato dall'A. ¹⁾ per la ricerca e la rappresentazione parametrica delle soluzioni intere delle equazioni riconducibili al tipo:

$$(1) \quad \sum_1^r a_i x_i^2 = \sum_1^r a_i y_i^{2m_i} \quad (m_i \geq 1),$$

si può applicare anche alle equazioni diofantee del tipo più generale:

$$(2) \quad \sum_1^r a_i x_i^{m_i} = \sum_1^s b_j y_j^{n_j} \quad (m_i \geq 1, \quad n_j \geq 1),$$

dove a_i, b_j ($i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s$) sono interi assegnati che si possono supporre *primi fra loro*.

È chiaro che se una data equazione diofantea si può scrivere nella forma (2), ciò di solito si può fare in più modi diversi, ad es. trasportandone i termini da un membro all'altro. Di questi modi però conviene scegliere il più opportuno, soprattutto in base alla ripartizione degli esponenti, che, come vedremo, giuoca un ruolo essenziale nelle considerazioni seguenti.

(*) Pervenuto in Redazione il 29 dicembre 1951.

¹⁾ Cfr. E. MORGANTINI, *Sulla risoluzione dell'equazione diofantea* $\sum_i a_i x_i^2 = \sum_i a_i y_i^{2m_i}$ (Annali Triestini (IV), Vol. XXI, Trieste, 1951).

Pensate le variabili x_i, y_j come coordinate cartesiane non omogenee in due spazi affini reali X_r, Y_s , rispettivamente ad r ed s dimensioni, si considerino le regioni poliedriche R ed R' dei due spazi caratterizzate da una data ripartizione dei segni (« *segnatura* ») delle coordinate x_i, y_j dei loro punti. Allora ogni soluzione della (2) intera e con la data segnatura ha per immagine una coppia di punti $P = (x_1, \dots, x_r)$, $P' = (y_1, \dots, y_s)$, di coordinate intere, appartenenti rispettivamente alle regioni R, R' e « *coniugati* » nella corrispondenza algebrica W rappresentata dalla (2).

Affinchè nelle regioni R ed R' esistano coppie di punti P, P' coniugati in W , è chiaro essere anzitutto *necessario* che in quelle regioni non siano definiti di segno opposto i due polinomi A_x, B_y , primo e rispettivamente secondo membro della (2).

Dopo di chè in ciascuna delle regioni R, R' si può costruire in modo opportuno (n. 2) una congruenza di parabole razionali \mathcal{A}, \mathcal{B} (che in casi particolari si riducono addirittura alle rette uscenti dalle rispettive origini O, O'), delle quali ne passa una soltanto per ogni punto di coordinate intere della rispettiva regione, diverso dall'origine delle coordinate. In tutti i punti (reali) di una fissata coppia di parabole \mathcal{A}, \mathcal{B} , contenuti nelle regioni R, R' , i due polinomi A_x e B_y mantengono lo stesso segno (n. 3).

Il metodo usato per la ricerca delle soluzioni intere della (2) aventi una data segnatura consiste (com'è possibile, data la scelta opportuna delle curve \mathcal{A}, \mathcal{B}) nel determinare successivamente, dapprima tutte le coppie di punti coniugati P, P' che giacciono su di una fissata coppia di parabole \mathcal{A}, \mathcal{B} (nn. 3, 4), quindi nel far variare in tutti i modi possibili la coppia \mathcal{A}, \mathcal{B} .

* * *

Anche dalla sua esposizione schematica risulta chiaro che questo metodo « *di esplorazione* » sarà realmente efficace quando $r \cdot s \geq 2$, e soprattutto *allorchè esistono coppie di punti coniugati su ogni coppia \mathcal{A}, \mathcal{B} di parabole* appartenenti a quelle coppie di subregioni $\overline{R}, \overline{R}'$ di R, R' in cui $A_x B_y \geq 0$.

Scelte le parabole \mathcal{A} , \mathcal{B} com'è precisato al n. 2, risulta che questo è il caso quando, posto:

$$(3) \quad m = m_1 m_2 \dots m_r, \quad n = n_1 n_2 \dots n_s$$

e detti $p \geq 1$, $q \geq 1$ i M.C.D. dei due gruppi d'interi:

$$(4) \quad p\mu_i = \frac{m}{m_i} \quad (i = 1, \dots, r), \quad q\nu_j = \frac{n}{n_j} \quad (j = 1, \dots, s)$$

risultano *primi fra loro* i due interi m' ed n' definiti dalle posizioni:

$$(5) \quad m' = \frac{m}{p} = \mu_i m_i, \quad n' = \frac{n}{q} = \nu_j n_j \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s)$$

Allora le soluzioni intere della (2) aventi la segnatura pre-scelta sono tutte e solo quelle fornite (ciascuna una sola volta) o dalle formule (13), (13'), (13'') del n. 3, oppure dalle formule (24) del n. 6, al variare dei parametri interi che vi compaiono. Di questi parametri, quelli α_i , β_j che individuano la coppia \mathcal{A} , \mathcal{B} sono vincolati dalla diseuguaglianza $A_\alpha B_\beta \geq 0$.

* * *

Il metodo di esplorazione suddetto risulta invece inefficace (data la scelta qui fatta del tipo delle parabole esploranti) quando, pur essendo possibile la scelta degli interi α_i , β_j in modo da avere $A_\alpha B_\beta \geq 0$, gli interi m' ed n' forniti dalle (5) non risultano primi fra loro. In tal caso con questo metodo non si può di solito stabilire neppure se la (2) ha o non ha soluzioni intere.

Infatti allora, non solo non esistono coppie di punti coniugati P , P' su *ogni* coppia di parabole \mathcal{A} , \mathcal{B} tali che $A_\alpha B_\beta \geq 0$, ma neppure si può dire a priori se esistano e quali siano tra queste le coppie di parabole « *utili* ». La loro determinazione equivarrebbe infatti alla risoluzione della stessa equazione diofantea di partenza (2), o per lo meno alla determinazione delle sue radici « *primitive* ».

Questo è ad es. il caso quando, pur essendo possibile soddisfare alla $A_\alpha B_\beta \geq 0$, si ha:

$$m_i = M, \quad n_j = N \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s),$$

e gli interi $m' = M$, $n' = N$ non sono primi fra loro.

In particolare questo metodo di esplorazione non si può dunque applicare alla dimostrazione della verità o meno dell'ultimo teorema di FERMAT ($M = N$, $r = 2$, $s = 1$)²).

* * *

Convieni però aggiungere che molte delle equazioni diofantee che si incontrano nella vastissima letteratura sull'argomento sono casi particolari della (2), ai quali si può utilmente applicare il procedimento di esplorazione descritto in questa nota³).

Ad es. tutte quelle del tipo:

$$ax^m = \sum_{j=1}^s b_j y_j^{n_j} \quad (a \geq 1, m \geq 1, n_j \geq 1, (m, n') = 1),$$

²) Per la bibliografia relativa cfr. ad es.: M. CIPOLLA, *Teoria dei numeri. Analisi indeterminata* (Enciclop. delle Matem. elementari, Vol. I, P. I^a, Milano, Hoepli, 1930), n. 50, p. 341; L. E. DICKSON, *History of the theory of numbers*, Vol. II (New York, Stechert, 1934), Chap. XXVI, p. 731-776; TH. SKOLEM, *Diophantische Gleichungen* (Berlin, Springer, 1938), Kap. V, n. 12, p. 83; M. T. NAGELL, *L'analyse indéterminée de degré supérieur* (Paris, Gauthier-Villars, 1929), p. 21.

³) Limitandoci soltanto ai casi in cui $mn > 1$ ed ai lavori più recenti, possiamo ad es. citare le seguenti:

$x_1^m + x_2^m \pm x_3^m = 0$, della cui risolubilità o meno con funzioni razionali intere di una variabile si sono occupati, in alcuni casi, P. V. WELMINE [Mat. Sbornik (Mat. Soc. Moscow), XXIV (1903), p. 633] e più in generale P. MONTEL [Annales sc. de l'éc. norm. sup. (3) XXXIII (1916), p. 298] ed A. KORSSELT [Arkiv Math. Phys., (3) XXV (1916-17), p. 89].

F. FERRARI [Suppl. al Periodico di Matem. XI. (1908), p. 40] si è occupato, per $n = m \pm 1$, dell'equazione: $x_1^m + x_2^m = y_1^n$, della quale ha anche dato delle soluzioni intere, quando $(m, n) = 1$, L. AUBBY [L'intermédiaire des math., XXI (1914), p. 19]. Della stessa equazione, per $m = 2$, $n = 3$ si sono recentemente occupati D. H. POTTS [Bull. Calcutta Math. Soc., XXXIII (1946), p. 21] ed E. ROSENTHALL (Duke math. J., XV (1948), p. 921], quest'ultimo anche per il caso $m = 3$, $n = 2$, determinandone tutte le soluzioni intere.

L'equazione $x_1^3 - x_2^2 = y_1^n$ è stata risolta da A. GERARDIN [Sphinx-Oedipe, IX (1934), p. 136], quando $2 \leq n \leq 8$.

B. PETTINEO [Matematiche, Catania, I (1946), p. 180] e D. H. POTTS [Bull. Calcutta Math. Soc., XLII (1950), p. 99] si sono occupati della equazione: $x_1^2 + x_2^2 = by_1^n$.

che derivano dai classici problemi di partizione e rappresentazione ⁴⁾.

2. - Poichè tanto gli interi positivi μ_i ($i = 1, \dots, r$) quanto quelli ν_j ($j = 1, \dots, s$) definiti dalle (4) risultano primi fra loro, si potranno determinare al modo noto ⁵⁾ degli interi ν'_i, ν'_j , anch'essi rispettivamente primi fra loro e tali che:

$$(6) \quad \sum_1^r \mu_i \nu'_i = 1, \quad \sum_1^s \nu_j \nu'_j = 1.$$

Si considerino quindi le due congruenze ∞^r e, rispettivamente, ∞^s di parabole razionali \mathcal{A}, \mathcal{B} , definite negli spazi affini X_r, Y_s , di cui al n. 1 dalle equazioni parametriche rispettive:

$$(7) \quad \begin{aligned} x_i &= \alpha_i u^{\mu_i} & (i = 1, \dots, r), \\ y_j &= \beta_j v^{\nu_j} & (j = 1, \dots, s); \end{aligned}$$

C. GEORGIOPOULOS [Bull. Soc. Math. Grèce, XXIV (1948), p. 13] ha risolto le equazioni: $x_1^3 + 4x_2^3 = y_1^3$, $x_1^3 + 2x_2^3 = y_1^3$.

C. A. MEBIUS [Göteborgs Kungl. Vetenskaps- och Vitterhets-Samhälles Handlingar, (6) B, III (1945), n. 6] si è occupato dell'equazione $x_1^3 + x_2^3 - x_3^3 - x_4^3 = y_1$.

E. T. BELL [Amer. Math. Monthly, LVI (1949), p. 1] ed R. C. CAMPBELL [Bull. Amer. Math. Soc., LV (1949), p. 442] hanno risolto rispettivamente le equazioni: $x_1^2 - x_2^2 = y_1^3 - y_2^3$, $x_1^2 + x_2^2 = y_1^3 + y_2^3$.

K. F. ROTH [J. London Math. Soc., XXIV (1949), p. 4] si è occupato dell'equazione: $x_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

⁴⁾ Cfr. L. E. DICKSON, l. cit. ²⁾, Chap.s III-X, XX-XXIII; in particolare le equazioni:

$$x_1^2 = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2, \quad x_1^m = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2$$

di L. EULER e T. PÉPIN (Cfr. TH. SKOLEM, l. cit. ²⁾, § 3, n. 12). Alle precedenti indicazioni bibliografiche debbo aggiungere, sebbene non abbia potuto prendere visione del lavoro originale, che anche E. T. BELL [Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., XXX (1944), p. 355-59] ha ideato un metodo mediante il quale, come con quello di esplorazione qui descritto, un sistema diofanteo razionale si può ridurre al tipo moltiplicativo [Cfr. Mathem. Reviews, VI (1945), p. 57].

⁵⁾ Cfr. ad es. M. CIPOLLA, l. cit. ²⁾, nn. 16-19.

Le curve \mathcal{A} e quelle \mathcal{B} si muovono, al variare dei parametri non tutti nulli α_i, β_j , nelle rispettive congruenze. Su di una \mathcal{A} e su di una \mathcal{B} fissate, il punto variabile $P = (x_1, \dots, x_r)$ o $P' = (y_1, \dots, y_s)$ si muove poi al variare del parametro u o rispettivamente di quello v .

Dalle (7), (7') conseguono, per le (5), le relazioni:

$$(8) \quad \frac{x_1^{m_1}}{\alpha_1^{m_1}} = \frac{x_2^{m_2}}{\alpha_2^{m_2}} = \dots = \frac{x_r^{m_r}}{\alpha_r^{m_r}} = u^{m'},$$

$$(8') \quad \frac{y_1^{n_1}}{\beta_1^{n_1}} = \frac{y_2^{n_2}}{\beta_2^{n_2}} = \dots = \frac{y_s^{n_s}}{\beta_s^{n_s}} = v^{n'},$$

che si possono ritenere valide anche quando qualcuna delle costanti α_i, β_j è nulla, purchè allora si pongano uguali a zero anche le corrispondenti variabili x_i, y_j .

Dalle espressioni (7), (7') delle sole coordinate non identicamente nulle dei punti P, P' si trae, per le (6):

$$(9) \quad u = \left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{\mu_1'} \cdot \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^{\mu_2'} \dots \left(\frac{x_r}{\alpha_r}\right)^{\mu_r'},$$

$$(9') \quad v = \left(\frac{y_1}{\beta_1}\right)^{\nu_1'} \cdot \left(\frac{y_2}{\beta_2}\right)^{\nu_2'} \dots \left(\frac{y_s}{\beta_s}\right)^{\nu_s'},$$

Ciò dimostra che è birazionale la corrispondenza tra i punti P, P' delle parabole \mathcal{A}, \mathcal{B} ed i valori dei rispettivi parametri u, v .

Tra le infinite curve \mathcal{A} consideriamo solo quelle i cui parametri α_i sono *interi non tutti nulli aventi una data segnatura S, primi fra loro, oppure tali che, detto $\rho > 1$ un loro fattore comune intero, non accada che α_i sia divisibile per ρ^{μ_i}* .

Sia R la regione di X_r i cui punti hanno la segnatura data S . Per un punto \bar{P} di coordinate intere della regione R passa allora *una ed una sola* $\bar{\mathcal{A}}$ di queste curve \mathcal{A} , e precisamente quella i cui parametri α_i , soddisfacenti alle condizioni predette, sono *determinati*, a norma delle (7), (8) dalle relazioni:

$$\rho^{\mu_i} \bar{\alpha}_i = \bar{x}_i \quad (\rho \geq 1; i = 1, \dots, r).$$

Date le condizioni cui sono sottoposti gli interi $\bar{\alpha}_i$, tutti e solo i punti interi di $\bar{\mathcal{A}}$ contenuti nella regione R sono quelli

corrispondenti biunivocamente ai *valori interi e positivi* del parametro u . Che ad un valore intero e positivo di u corrisponda un punto P di coordinate intere della regione R è evidente conseguenza delle (7). Ma viceversa dalle stesse (7) risulta anche che un punto P , intero, di \mathcal{A} , non può provenire da un valore frazionario di u , col denominatore $\rho > 1$. Altrimenti le $\bar{\alpha}_i$ sarebbero divisibili per ρ^{m_i} contrariamente a quanto supposto.

Quello che s'è detto per le curve \mathcal{A} si può ripetere, parola per parola, per le curve \mathcal{B} , delle quali considereremo solo quelle i cui parametri β_j sono interi non tutti nulli aventi una data segnatura S' , primi fra loro, oppure tali che, detto $\sigma > 1$ un loro fattore comune, non accada che β_j sia divisibile per σ^{n_j} . Cosicchè anche di queste curve \mathcal{B} ne passerà una sola per ogni punto \bar{P} di coordinate intere della regione R' dei punti di Y , aventi la segnatura S' . I punti di coordinate intere appartenenti a questa \mathcal{B} e ad R' saranno poi tutti e solo quelli corrispondenti ai valori interi e positivi del parametro v .

3. - Fissati, come si è precisato al n. 2, i parametri interi α_i , β_j ($i=1, \dots, r$; $j=1, \dots, s$), cioè fissata una coppia di parabole \mathcal{A} , \mathcal{B} nelle regioni R ed R' , si ha per le (7), (7'), (8), (8'):

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_x = \sum_1^r \alpha_i x_i^{m_i} = u^{m'} \sum_1^r \alpha_i \alpha_i^{m_i} = u^{m'} A_\alpha, \\ B_y = \sum_1^s \beta_j y_j^{n_j} = v^{n'} \sum_1^s \beta_j \beta_j^{n_j} = v^{n'} B_\beta. \end{array} \right.$$

Le (10) dimostrano intanto che mentre i punti $P=(x_1, \dots, x_r)$, $P'=(y_1, \dots, y_s)$, al variare dei parametri $u > 0$ e $v > 0$, si muovono nelle regioni R , R' e sulle parabole \mathcal{A} , \mathcal{B} , i segni di A_x , B_y restano costantemente uguali a quelli di A_α , B_β . Dunque gli interi α_i , β_j , oltre che con le avvertenze di cui al n. 2, vanno scelti anche in modo che sia:

$$(11) \quad A_\alpha B_\beta \geq 0.$$

Supponiamo che ciò sia possibile, altrimenti saremmo sicu-

ri che la (2) non possiede soluzioni intere della segnatura fissata.

Allora la ricerca delle soluzioni intere della (2), aventi la data segnatura e le cui immagini sono coppie di punti P, P' appartenenti alle parabole fissate \mathcal{A}, \mathcal{B} , è ricondotta per le (10) alla ricerca delle soluzioni intere e positive dell'equazione ⁶⁾ nelle incognite u, v :

$$(12) \quad u^m A_x = v^n B_\beta.$$

Liberiamoci subito dai casi particolari in cui: $A_x B_\beta = 0$. È chiaro che allora sono soluzioni intere della (2) tutte quelle fornite dalle formule seguenti, comunque si scelgano i parametri interi e positivi u, v :

$$(13) \quad \begin{cases} x_i = \alpha_i u^{\mu_i} & (i = 1, \dots, r) \\ y_j = \beta_j v^{\nu_j} & (j = 1, \dots, s) \end{cases}, \text{ se } A_x = B_\beta = 0,$$

$$(13') \quad \begin{cases} x_i = \alpha_i u^{\mu_i} & (i = 1, \dots, r) \\ y_j = 0 & (j = 1, \dots, s) \end{cases}, \text{ se } A_x = 0, B_\beta \neq 0$$

$$(13'') \quad \begin{cases} x_i = 0 & (i = 1, \dots, r) \\ y_j = \beta_j v^{\nu_j} & (j = 1, \dots, s) \end{cases}, \text{ se } A_x \neq 0, B_\beta = 0.$$

Nei tre casi accade rispettivamente che sulla coppia prescelta di parabole \mathcal{A}, \mathcal{B} sono coppie di punti coniugati in W :

- 1) tutte le ∞^2 coppie possibili P, P' di punti interi di \mathcal{A}, \mathcal{B} ;
- 2) tutte le ∞^1 coppie in cui P è intero e arbitrario su \mathcal{A} mentre P' coincide l'origine O_y dello spazio Y_s ;
- 3) tutte le ∞^1 coppie O_x, P' , dove O_x è l'origine dello spazio X_r e P' un punto intero arbitrario di \mathcal{B} .

4. - Supponiamo quindi che sia:

$$(11') \quad A_x B_\beta > 0.$$

⁶⁾ Del tipo « *moltiplicativo* », cfr. TH. SKOLEM, l. cit. ²⁾, Kap. IV, § 1, con particolare riguardo al metodo di M. WARD ivi esposto ai nn. 2, 3.

Detto c l'intero il cui valor assoluto è il M.C.D. dei due interi A_α , B_β e posto, com'è possibile:

$$(14) \quad a > 0, b > 0, \quad ca = A_\alpha, \quad cb = B_\beta,$$

la (12) si scrive:

$$(12') \quad au^{m'} = bv^{n'},$$

dove a e b sono due interi positivi e primi fra loro.

Siano ρ_1, \dots, ρ_h ; $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ i loro eventuali fattori primi, distinti e maggiori di 1. Sarà:

$$(15) \quad a = 1 \cdot \rho_1^{p_1} \dots \rho_h^{p_h}, \quad b = 1 \cdot \sigma_1^{q_1} \dots \sigma_k^{q_k}.$$

Cosicchè, se u e v sono due interi positivi e soddisfacenti alla (12'), dovrà essere:

$$(15') \quad \begin{cases} u = 1 \cdot \rho_1^{\xi_1} \dots \rho_h^{\xi_h} \sigma_1^{\xi_1'} \dots \sigma_k^{\xi_k'} u_1 & (u_1 > 0), \\ v = 1 \cdot \rho_1^{\eta_1} \dots \rho_h^{\eta_h} \sigma_1^{\eta_1'} \dots \sigma_k^{\eta_k'} v_1 & (v_1 > 0), \end{cases}$$

essendo gli interi positivi u_1 e v_1 primi con a , b , e quindi:

$$(16) \quad \rho_i^{p_i + m'\xi_i} = \rho_i^{n'\eta_i} \quad (i = 1, \dots, h),$$

$$(16') \quad \sigma_j^{m'\xi_j'} = \sigma_j^{n'\eta_j' + q_j} \quad (j = 1, \dots, k),$$

ossia, giacchè gli interi ρ_i , σ_j sono maggiori di 1, gli interi positivi ξ_i , η_i , ξ_j' , η_j' dovranno essere tali che

$$(17) \quad -m'\xi_i + n'\eta_i = p_i \quad (i = 1, \dots, h),$$

$$(17') \quad m'\xi_j' - n'\eta_j' = q_j \quad (j = 1, \dots, k).$$

Se $a = 1$ non esistono fattori $\rho_i > 1$, cioè si può supporre che nelle (15), (15') sia $p_i = \xi_i = \eta_i = 0$ ($i = 1, \dots, h$) cosicchè le (16) sono sempre soddisfatte e non ha luogo la considerazione delle (17).

Analogamente, se $b = 1$, non esistono fattori $\sigma_j > 1$, cioè si può supporre che sia $q_j = \xi_j' = \eta_j' = 0$ ($j = 1, \dots, k$), cosicchè sono sempre soddisfatte le (16') e non ha luogo la considerazione delle (17').

In ogni caso dalle (15), (15'), (12'), tenendo eventualmente conto delle (17), (17'), si ricava:

$$(12'') \quad u_1^{m'} = v_1^{n'}.$$

Cosicchè gli interi positivi u_1 e v_1 , primi con a e con b , hanno gli stessi fattori primi. Sia $t_1 > 1$ uno di questi. Se u_1, v_1 sono divisibili rispettivamente per t_1^x, t_1^y , e non per t_1^{x+1}, t_1^{y+1} , sarà:

$$t_1^{m'x} = t_1^{n'y}.$$

Dunque gli interi positivi x, y sono vincolati dalla relazione:

$$(18) \quad m'x = n'y.$$

Se l'intero $l \geq 1$ è il M.C.D. di m', n' e si ha

$$(18') \quad lm'' = m', \quad ln'' = n',$$

con m'', n'' interi, positivi e primi fra loro, dalla (18) si ricava

$$m''x = n''y,$$

da cui:

$$x = \rho n'' \quad , \quad y = \rho m'',$$

dove ρ è un intero ≥ 1 . Pertanto:

$$u_1 = (t_1^\rho)^{n''} u_2 \quad , \quad v_1 = (t_1^\rho)^{m''} v_2,$$

dove gli interi positivi u_2, v_2 sono primi con t_1 , e tali che $u_2^{m''} = v_2^{n''}$. Riapplicando ad essi il ragionamento applicato ad u_1, v_1 e così procedendo, si giunge infine a provare che:

$$(19) \quad u_1 = t^{n''} \quad , \quad v_1 = t^{m''},$$

dove $t \geq 1$ è un intero *arbitrario primo con a e con b* .

Viceversa, se ξ_i, η_i ($i = 1, \dots, h$), ξ_j', η_j' ($j = 1, \dots, k$) sono degli interi *positivi* soddisfacenti alle (17), (17') e t è un intero arbitrario primo con a e con b , allora gli interi positivi:

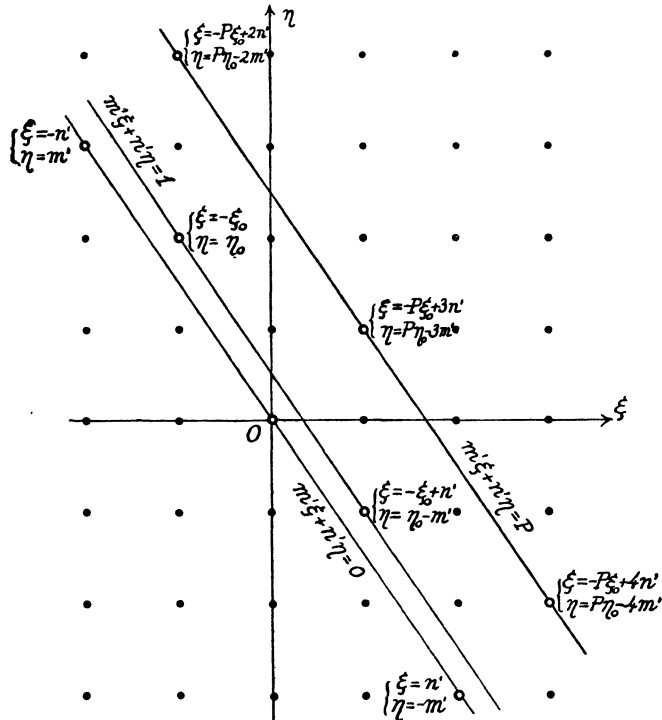
$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \rho_1^{\xi_1} \dots \rho_h^{\xi_h} \cdot \sigma_1^{\xi_1'} \dots \sigma_k^{\xi_k'} \cdot t^{n''}, \\ v = \rho_1^{\eta_1} \dots \rho_h^{\eta_h} \cdot \sigma_1^{\eta_1'} \dots \sigma_k^{\eta_k'} \cdot t^{m''}, \end{array} \right.$$

soddisfano, per quanto precede, alla (12'). Se $a = 1$, nelle (20) si deve porre $\xi_i = \eta_i = 0$ ($i = 1, \dots, h$). Se $b = 1$ vi si deve porre $\xi_j' = \eta_j' = 0$ ($j = 1, \dots, k$).

5. - Dati gli interi α_i ($i = 1, \dots, r$) e β_j ($j = 1, \dots, s$) restano determinati dalle (14) gli interi positivi a e b , quindi

anche la loro scomposizione in fattori primi (15), ed infine anche gli interi positivi p_i, q_j ($i = 1, \dots, h; j = 1, \dots, k$) che in quella decomposizione figurano come esponenti.

D'altra parte sono dati anche gli interi positivi m' ed n' ed il loro M.C.D. l .



$$(m' = 3, n' = 2, P = 5, \xi_0 = 1, \eta_0 = 2)$$

Com'è noto ⁷⁾ condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione diofantea nelle incognite ξ, η :

$$(21) \quad m'\xi + n'\eta = P$$

ammetta soluzioni intere è che l'intero P sia un multiplo di l . Da ciò consegue intanto che non possono esistere soluzioni

⁷⁾ Cfr. nota ⁵⁾.

intere $\xi_i, \eta_i; \xi'_j, \eta'_j$ delle (17), (17') quando qualcuno degli interi p_i, q_j non è multiplo di l . Cosicchè se $l > 1$, cioè se gli interi m' ed n' non sono primi fra loro vi possono essere coppie di parabole \mathcal{A}, \mathcal{B} (anche tra quelle per cui $A_\alpha B_\beta > 0$) sulle quali non esistono coppie di punti coniugati P, P' .

Supponiamo invece che sia $l = 1$, cioè che m' ed n' siano primi fra loro. Allora la (21) ammette infinite soluzioni intere, comunque sia fissato l'intero positivo P , e tra queste ve ne sono infinite tali che $\xi < 0, \eta > 0$ ed altre infinite tali che $\xi > 0, \eta < 0$.

Infatti (v. Fig.), interpretate le variabili ξ, η che figurano nella (21) come coordinate cartesiane non omogenee in un piano affine π , la (21), essendo m' ed n' positivi, rappresenta in π una retta che non attraversa soltanto il III quadrante, ed è parallela a quelle di equazioni:

$$(21') \quad m'\xi + n'\eta = 0,$$

$$(21'') \quad m'\xi + n'\eta = 1.$$

Determinata, con i procedimenti noti ⁸⁾, una soluzione intera ($-\xi_0, \eta_0$) della (21''), la cui immagine cada ad es. nel II quadrante ($\xi_0 > 0, \eta_0 > 0$), tutte le soluzioni intere della (21) sono date, al variare del parametro intero ρ , dalle formole:

$$\xi = -P\xi_0 + \rho n' \quad , \quad \eta = P\eta_0 - \rho m'$$

Tra queste, quelle le cui immagini cadono nel II quadrante ($\xi < 0, \eta > 0$) si otterranno quando sia:

$$\rho < \frac{P\xi_0}{n'}.$$

Invece quelle la cui immagine cade nel IV quadrante ($\xi > 0, \eta < 0$) si otterranno quando sia:

$$\rho > \frac{P\eta_0}{m'}.$$

Applicando le considerazioni precedenti alle (17), (17'), si ha che quando m' ed n' sono primi fra loro, determinati nel

⁸⁾ Cfr. nota ⁵⁾.

modo noto una coppia di interi positivi ξ_0, η_0 , soddisfacenti alla:

$$(22) \quad -m'\xi_0 + n'\eta_0 = 1,$$

le soluzioni intere e positive delle (17), (17') sono tutte quelle fornite (ciascuna una sola volta) dalle formole:

$$(23) \quad \begin{cases} \xi = p_i \xi_0 - \rho^{(i)} n' \\ \eta_i = p_i \eta_0 - \rho^{(i)} m' \end{cases}, \quad \rho^{(i)} < \frac{p_i \xi_0}{n'}, \quad (i = 1, \dots, h);$$

$$(23') \quad \begin{cases} \xi_j' = -q_j \xi_0 + \sigma^{(j)} n' \\ \eta_j' = -q_j \eta_0 + \sigma^{(j)} m' \end{cases}, \quad \sigma^{(j)} > \frac{q_j \eta_0}{m'}, \quad (j = 1, \dots, k),$$

al variare dei parametri interi $\rho^{(i)}, \sigma^{(j)}$ che vi compaiono.

6. - Siamo dunque in grado di fornire una *rappresentazione parametrica biunivoca di tutte le soluzioni intere aventi una segnatura assegnata della data equazione diofantea (2)*, quando gli interi m' ed n' definiti al n. 1 sono primi fra loro e quando esistono interi α_i, β_j aventi quella segnatura, non tutti nulli e tali che sia: $A_\alpha B_\beta \geq 0$.

Esse sono date dalle formule (13), (13'), (13'') del n. 3 al variare dei parametri interi u, v, α_i ($i = 1, \dots, r$), β_j ($j = 1, \dots, s$) che vi compaiono, quando gli interi α_i, β_j (soddisfacenti alle condizioni di primitività specificate al n. 2 ed aventi la segnatura assegnata) soddisfano alla condizione:

$$A_\alpha B_\beta = 0.$$

Quando invece i parametri interi α_i, β_j sono tali che:

$$A_\alpha B_\beta > 0,$$

allora le formule (13), (13'), (13'') vanno sostituite dalle altre:

$$(24) \quad \begin{cases} x_i = \alpha_i (\rho_1^{\xi_{i1}} \dots \rho_h^{\xi_{ih}} \sigma_1^{\xi_{i1}'} \dots \sigma_k^{\xi_{ik}'})^{\mu_i} & (i = 1, \dots, r), \\ y_j = \beta_j (\rho_1^{\eta_{j1}} \dots \rho_h^{\eta_{jh}} \sigma_1^{\eta_{j1}'} \dots \sigma_k^{\eta_{jk}'})^{\nu_j} & (j = 1, \dots, s). \end{cases}$$

Gli interi primi e positivi $\rho_1, \dots, \rho_h, \dots, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ che figurano nelle (24) sono determinati dalla scelta dei parametri interi α_i, β_j e dalle (14), (15). Gli interi positivi $\xi_1, \dots, \xi_h; \xi_1', \dots, \xi_k'; \eta_1, \dots, \eta_h; \eta_1', \dots, \eta_k'$ si possono scegliere ad arbitrio fra quelli

dati al variare dei parametri interi $\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(h)}; \sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(h)}$ dalle formule (23), (23') del n. 5, con le avvertenze di cui al n. 4 nel caso che almeno uno dei due interi positivi a, b che figurano nelle (14) sia uguale ad 1. Il parametro t è un intero ≥ 1 , arbitrario, purchè primo con a e con b . Infine gli interi positivi μ_i ($i = 1, \dots, r$), ν_j ($j = 1, \dots, s$), m', n' che compaiono tanto nelle (13), (13'), (13'') quanto nelle (24), sono quelli determinati dalle formule (3), (4), (5) del n. 1.

Non vi sono soluzioni in corrispondenza ai valori dei parametri α_i, β_j tali che $A_\alpha B_\beta < 0$.

Se non è possibile determinare gli interi α_i, β_j (aventi la segnatura assegnata), in modo che sia $A_\alpha B_\beta \geq 0$, ciò vuol dire che non esistono soluzioni intere della (2) aventi la data segnatura.