

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FEDERICO CAFIERO

Sull'inversione dell'ordine d'integrazione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 21 (1952), p. 58-63

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1952__21__58_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULL'INVERSIONE DELL'ORDINE D'INTEGRAZIONE

Nota () di FEDERICO CAFIERO (a Napoli)*

Sia $f(x, y)$ sommabile nel rettangolo $R = I_1 \times I_2$ ¹⁾, dove:

$$I_1: a \leq x \leq b, \quad I_2: c \leq y \leq d.$$

Per un classico teorema di FUBINI²⁾, $f(x, y)$ risulta allora sommabile rispetto alle variabili separatamente³⁾ e, detti G ed H due insiemi misurabili rispettivamente di I_1 ed I_2 , esistono gli integrali iterati di $f(x, y)$:

$$(1) \quad \int_G dx \int_H f(x, y) dy, \quad \int_H dy \int_G f(x, y) dx$$

e risultano eguali all'integrale doppio:

$$\iint_{G \times H} f(x, y) dx dy.$$

Che cosa può dirsi per una funzione misurabile in R e sommabile rispetto alle variabili separatamente, nell'ipotesi che esista, per ogni coppia di insiemi misurabili $G \subset I_1$ ed $H \subset I_2$, uno dei due integrali iterati (1)?

Se $f(x, y)$ è in R di segno costante, un teorema di L. TONEL-

(*) Pervenuta in Redazione il 10 aprile 1952.

¹⁾ Il simbolo $I_1 \times I_2$, prodotto cartesiano o combinatorio dei due insiemi I_1 ed I_2 , denota l'insieme dei punti del piano che hanno ambedue le coordinate rispettivamente in I_1 ed I_2 .

²⁾ Cfr. ad es. S. SAKS, *Théorie de l'intégrale*. Pag. 74.

³⁾ Cioè sommabile in I_1 rispetto ad x , per quasi tutti gli y di I_2 e sommabile in I_2 rispetto ad y , per quasi tutti gli x di I_1 .

LI⁴⁾ ci assicura la sommabilità superficiale di $f(x, y)$ e quindi anche l'esistenza e l'eguaglianza di ambedue gli integrali iterati (1); ma nel caso generale, un interessante esempio di G. FICHTENHOLZ⁵⁾ dimostra che nulla può dirsi circa la sommabilità superficiale di $f(x, y)$.

Il citato Autore costruisce infatti una funzione misurabile superficialmente, ma non superficialmente sommabile, malgrado ambedue gli integrali iterati (1) esistano sempre e siano per di più eguali.

Scopo di questa Nota è di fare osservare che, per una funzione $f(x, y)$ superficialmente misurabile e sommabile rispetto alle variabili separatamente, l'ipotesi dell'esistenza, per ogni $G \subset I_1$ ed ogni $H \subset I_2$, di uno dei due integrali iterati (1), porta sempre all'esistenza dell'altro e all'eguaglianza di essi.

In altri termini dimostro il seguente:

TEOREMA. - *Sia $f(x, y)$ misurabile nel rettangolo $R = I_1 \times I_2$ e sommabile rispetto alle variabili separatamente. Allora, se esiste uno dei due integrali iterati:*

$$\int_G dx \int_H f(x, y) dy, \quad \int_H dy \int_G f(x, y) dx$$

per ogni coppia di insiemi misurabili $G \subset I_1$ ed $H \subset I_2$, esiste anche l'altro e risulta:

$$\int_G dx \int_H f(x, y) dy = \int_H dy \int_G f(x, y) dx.$$

È lecita cioè l'inversione dell'ordine d'integrazione.

1. - Dimostriamo il teorema enunciato. A tale scopo supponiamo, per fissare le idee, che per ogni $G \subset I_1$ ed ogni $H \subset I_2$ esista il primo dei due integrali iterati (1).

⁴⁾ L. TONELLI, *Sull'integrazione per parti*. « Atti Accad. Naz. Lincei » (5), 18, 246-253 (1909).

⁵⁾ G. FICHTENHOLZ, *Sur une fonction de deux variables sans intégrale double*. « Fundam. Math. » 6, 30-36 (1924).

Poichè $f(x, y)$ è sommabile in I_1 rispetto ad y per quasi tutti gli x di I_1 , la funzione:

$$F_1(x) = \int_{I_2} |f(x, y)| dy$$

è definita quasi ovunque in I_1 e, in virtù della supposta misurabilità superficiale di $f(x, y)$, risulta ivi misurabile⁶⁾. Si può quindi determinare un sotto-insieme chiuso \bar{G} di I_2 , di misura prossima quanto si vuole a quella di I_2 , in modo tale che $F_1(x)$ sia continua in \bar{G} . In tale insieme $F_1(x)$ è sommabile, ciò che porta, per il citato teorema di TONELLI, alla sommabilità superficiale di $f(x, y)$ nell'insieme $\bar{G} \times I_1$.

In altri termini, fissato un numero $\epsilon > 0$, si può determinare un insieme misurabile $\bar{\Delta}$ di I_1 , di misura minore di ϵ , in modo tale che $f(x, y)$ sia sommabile in R privato dei punti, le cui proiezioni appartengono a $\bar{\Delta}$.

Orbene, sia $\{\Delta_n\}$ una successione monotona di insiemi di I_1 , di misura infinitesima al divergere di n , e determinati in modo tale che $f(x, y)$ sia sommabile nel rettangolo R privato dei punti, le cui proiezioni appartengono a Δ_n ($n = 1, 2, \dots$).

Posto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = \Delta, \quad G_n = \Delta_n - \Delta_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

risulta:

$$(2) \quad \Delta_1 - \Delta = \sum_{n=1}^{\infty} G_n,$$

⁶⁾ Per ogni intero positivo n , sia $f_n(x, y)$ uguale ad $|f(x, y)|$ nei punti di R in cui $|f(x, y)| \leq n$ ed eguale ad n nei rimanenti. Essendo $f_n(x, y)$ sommabile in R , esiste, per quasi tutti gli x di I_1 , l'integrale:

$$F_1^{(n)}(x) = \int_{I_2} f_n(x, y) dy$$

e la funzione $F_1^{(n)}(x)$ è, per ogni n , addirittura sommabile in I_1 . D'altro canto è:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_1^{(n)}(x) = \int_{I_2} |f(x, y)| dy$$

quasi ovunque in I_1 . Ciò che ovviamente dimostra quanto asserito.

dove Δ è di misura nulla e gli insiemi della successione $\{G_n\}$ sono a due a due privi di punti comuni.

Ciò posto, notiamo che, essendo:

$$\int_G dx \int_H f(x, y) dy = \int_{G-G\Delta_1} dx \int_H f(x, y) dy + \int_{G\Delta_1} dx \int_H f(x, y) dy$$

ed essendo $f(x, y)$ sommabile in $(G - G\Delta_1) \times H$, per dimostrare il nostro asserto basta far vedere che esiste l'integrale iterato:

$$\int_H dy \int_{G\Delta_1} f(x, y) dx$$

e che risulta:

$$(3) \quad \int_{G\Delta_1} dx \int_H f(x, y) dy = \int_H dy \int_{G\Delta_1} f(x, y) dx.$$

A tale scopo osserviamo che, essendo per ipotesi $f(x, y)$ sommabile rispetto alle variabili separatamente, l'integrale:

$$\int_{G\Delta_1} f(x, y) dx$$

esiste per quasi tutti gli y di H e che, essendo Δ di misura nulla, per la (2) si ha:

$$\int_{G\Delta_1} f(x, y) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G\Delta_n} f(x, y) dx.$$

Posto allora:

$$(4) \quad g_i(y) = \sum_{n=1}^i \int_{G\Delta_n} f(x, y) dx,$$

le funzioni della successione $\{g_i(y)\}$ risultano sommabili in H e la successione stessa è ivi quasi ovunque convergente avendosi:

$$(5) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(y) = \int_{G\Delta_1} f(x, y) dx.$$

Orbene, consideriamo gli integrali:

$$(6) \quad \int_I g_i(y) dy \quad (I \subset H; i = 1, 2, \dots)$$

e dimostriamo che sono equi-assolutamente continui nella famiglia degli insiemi misurabili contenuti in H .

Per un noto teorema ⁷⁾ di S. SAKS, basta, a tale scopo, far vedere che esiste finito il limite:

$$(7) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int_I g_i(y) dy$$

per ogni insieme I misurabile contenuto in H .

Per la (4) si ha:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_I g_i(y) dy = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^i \int_I dy \int_{GG_n} f(x, y) dx$$

ed osservando che $f(x, y)$ è sommabile in $I \times GG_n$, risulta in definitiva:

$$(8) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int_I g_i(y) dy = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^i \int_{GG_n} dx \int_I f(x, y) dy = \int_{G\Delta_1} dx \int_I f(x, y) dy.$$

La convergenza della successione di integrali (6) è quindi assicurata su ogni insieme misurabile I contenuto in H e però gli integrali (6) risultano iiv equi-assolutamente continui. Per un classico teorema ⁸⁾ di VITALI, la funzione (5) è allora sommabile in H e nella (7) è lecito il passaggio al limite sotto il

⁷⁾ S. SAKS, *Addition to the note on some functionals*. « Transactions of the American Mathematical Society » 35, 4, 965-970 (1933). Cfr. anche F. CAFIERO, *Sulle famiglie di funzioni additive d'insieme, uniformemente continue*. « Rend. Accad. Naz. Lincei » s. VIII, vol. XII, fasc. II (1952).

⁸⁾ G. VITALI, *Sull'integrazione per serie*. « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo XXIII, 137-155 (1907).

segno d'integrale per ogni insieme I misurabile di H . Ciò porta, per la (5) e (8) all'eguaglianza:

$$\int_I dy \int_{G_{\Delta_1}} f(x, y) dx = \int_{G_{\Delta_1}} dx \int_I f(x, y) dy$$

per ogni insieme I misurabile contenuto in H .

La (3) è così in particolare dimostrata e quindi anche l'enunciata proposizione.