Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giorgio Trevisan

# Classificazione dei semplici ordinamenti di un gruppo libero commutativo con $N$ generatori

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 22 (1953), p. 143-156

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__143_0>

# CLASSIFICAZIONE DEI SEMPLICI ORDINAMENTI DI UN GRUPPO LIBERO COMMUTATIVO CON *N* GENERATORI

*Nota* (*) *di* GIORGIO TREVISAN (*a Padova*)

Dei vari problemi contenuti nel « Problem 102 » di BIRKHOFF [1]) si risolve il seguente: *d*) Dato un gruppo $G$ libero commutativo con $n$ generatori determinare in quanti modi diversi $G$ si può semplicemente ordinare.

In I) sono richiamate proprietà note dei gruppi liberi commutativi con $n$ generatori.

Nei numeri 1, 2, 3 si ricordano proprietà di tali gruppi quando sono semplicemente ordinati e si stabiliscono alcuni semplici lemmi.

Nel n.ro 4 i gruppi son pensati senz'altro come archimedei e si dà un teorema che permette di classificarne i loro semplici ordinamenti. Nei numeri successivi si mostra come il problema *d*) per $G$ si riconduca a dare i semplici ordinamenti di opportuni gruppi liberi commutativi archimedei ed i semplici ordinamenti di gruppi della stessa natura di $G$, ma con un numero minore di generatori.

Si ottiene così un procedimento di riduzione che porta alla soluzione del problema proposto perchè infine si giunge sempre a dover dare i semplici ordinamenti di gruppi archimedei (liberi, commutativi).

I. - Sia $G$ un gruppo libero commutativo con $n$ generatori [2]).

---

(*) Pervenuta in Redazione il 22 febbraio 1953.

[1]) G. BIRKHOFF, *Lattice Theory* [American Mat. Soc. Coll., vol. XXV 1948], pag. 227.

[2]) I teoremi di questo numero sui gruppi con $n$ generatori si possono ad esempio ricavare da quanto detto in proposito in LEFSCHETZ,

Un sottogruppo $H$ di $G$ si chiama *sottogruppo con divisione* se contiene elementi diversi dallo zero, e se per ogni $g \varepsilon G$ tale che $p \cdot g \varepsilon H$ con $p$ intero non nullo, segue che $g \varepsilon H$.

Si ha che: *Ogni sottogruppo di $G$, diverso dall'identità, è un gruppo libero commutativo.*

TEOREMA: *Se $H$ è un sottogruppo con divisione di $G$ con $r$ generatori il gruppo fattoriale $\frac{G}{H}$ è un gruppo libero commutativo con $n - r$ generatori.*

Sia ora $G$ un gruppo commutativo con $n$ generatori $g_1, \ldots, g_n$ e tra questi restino verificate le condizioni $\sum_{1}^{n}{}_s \lambda_{is} g_s = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ e sia $r$ il rango della matrice $\|\lambda_{is}\|$.

Per poter semplicemente ordinare $G$ è necessario, come noto e come richiamato in seguito, che tutti gli elementi di $G$ diversi dallo zero siano aperiodici. Ma allora si vede facilmente che il problema $d$) per un gruppo di questo tipo si riconduce necessariamente a studiare il problema $d$) per il gruppo libero commutativo con $n - r$ generatori.

**1.** - Un gruppo $G$ è detto *semplicemente ordinato* se tra i suoi elementi è stabilita una relazione d'ordine che di due elementi distinti di $G$ dica quale è maggiore e quale minore ed è tale che se $a < b$ $(b > a)$ risulti $a + x < b + x$ $x + a < x + b$ qualunque sia $x \varepsilon G$.

Condizione necessaria perchè $G$ sia *semplicemente ordinato* è che $G$ non contenga elementi diversi da 0 a periodo finito.

Se questa condizione necessaria è verificata ed inoltre $G$ è commutativo, allora $G$ si può semplicemente ordinare [3]).

**2.** - Se $a \varepsilon G$, $b \varepsilon G$, $a > 0$, $b > 0$, si dice che $a$ e $b$ sono equivalenti dal punto di vista archimedeo e si scrive $a \backsim b$ se

---

*Algebraic Topology* [American Mat. Soc. Coll., Vol. XXVII, 1942] pagg. 49-54. La denominazione «sottogruppo con divisione» è quella usata da P. ALEXANDROFF e H. HOPF nel loro *Topologie* (vedere il capitolo sui moduli).

[3]) *Loc. cit.* in [1]) teor. 14, pag. 224.

per ogni multiplo $ma$ di $a$ esiste un multiplo $nb$ di $b$ tale che $ma < nb$ e se per ogni multiplo $n_1 b$ di $b$ esiste un multiplo $m_1 a$ di $a$ tale che $n_1 b < m_1 a$.

Se invece per ogni naturale $m$ è $ma < b$, $a$ è detto infinitamente minore di $b$ e si scrive $a \ll b$.

La relazione $\backsim$ è una relazione di equivalenza; nelle classi di equivalenza si possono distribuire anche gli elementi negativi di $G$, basta ovviamente collocare nella stessa classe un elemento ed il suo opposto.

Vale in proposito il Teorema [4]): *Se $G$ è archimedeo esso è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo additivo dei numeri reali, quindi è commutativo.*

Si espongono ora alcuni semplici lemmi utili per il seguito.

LEMMA I.: *Se $0 < a$, $0 < b$, $a \backsim b$ ed $m$, $n$ sono interi positivi allora $ma + nb \backsim a$.*

LEMMA II.: *Se $0 \ll \alpha_1 \ll \alpha_2 \ll \ldots \ll \alpha_r$ ed è $\lambda_r > 0$ allora qualunque siano gli interi $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ risulta $0 < \sum_{1}^{r}{}_i \lambda_i \alpha_i \backsim \alpha_r$, $0 < \sum_{1}^{r}{}_i \lambda_{r+1-i} \alpha_{r+1-i} \backsim \alpha_r$.*

E' evidentemente $-\lambda_i \alpha_i \leq |\lambda_i| \alpha_{r-1}$ $(i : 1, \ldots\ r-1)$, quindi $-\sum_{1}^{r-1} \lambda_i \alpha_i \leq \sum_{1}^{r-1} |\lambda_i| \alpha_{r-1} = p\alpha_{r-1} \ll \alpha_r < \lambda_r \alpha_r$ e perciò intanto $0 < \sum_{1}^{r}{}_i \lambda_i \alpha_i$.

Posto $\sigma = \sum_{1}^{r}{}_i \lambda_i \alpha_i$ riesce $\sigma \leq \sum_{1}^{r}{}_i |\lambda_i| \alpha_i \leq \sum_{1}^{r}{}_i |\lambda_i| \alpha_r$ da cui

$$h\sigma < h\left(\sum_{1}^{r} |\lambda_i| + 1\right)\alpha_r \tag{1}$$

per ogni $h$ intero positivo.

Per quanto visto in precedenza se $\theta$ è un intero positivo si ha $-\theta \sum_{1}^{r-1}{}_i \lambda_i \alpha_i \leq \theta \sum_{1}^{r-1} |\lambda_i| \alpha_{r-1} \ll \alpha_r$ e quindi $0 < \alpha_r + \theta \sum_{1}^{r-1}{}_i \lambda_i \alpha_i$.

---

[4]) *Loc. cit.* in [1]) teor. 15, pag. 226.

Ora

$$h\alpha_r < h\alpha_r + \alpha_r + \theta \cdot \sum_{1}^{r-1}{}_i \lambda_i\alpha_i \leq (h+1)\lambda_r \cdot \alpha_r + \theta \sum_{1}^{r-1} \lambda_i\alpha_i$$

qualunque sia l' intero positivo $h$ e posto $\theta = \mathrm{h} + 1$ riesce

$$h\alpha_r < (h+1)\sigma\,,$$

che assieme alla (1) termina la dimostrazione della prima relazione di cui parla il lemma; per la seconda relazione la dimostrazione consegue con considerazioni del tutto analoghe a quelle già svolte.

LEMMA III.: *Se* $0 < \alpha_1 \ll \alpha_2 \ll \ldots \ll \alpha_r$ *ed è* $\sum_{1}^{r} \lambda_i\alpha_i = 0$, *con* $\lambda_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ *interi relativi, allora* $\lambda_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Ragionando per assurdo sia $\alpha_j \neq 0$ e $j$ sia massimo $(1 \leq \leq j \leq r)$ si ha perciò $\sum_{1}^{j}{}_i \lambda_i\alpha_i = 0$.

Ora o $\lambda_j > 0$, oppure basta moltiplicare la relazione precedente per $-1$ per trovarsi in tale eventualità, in ogni caso è applicabile il LEMMA II. Per esempio se $\lambda_j > 0$ per il LEMMA II risulterebbe $\sum \lambda_i\alpha_i \backsim \alpha_i$ e quindi l'assurdo $0 \backsim a_j$.

**3.** - Come prima applicazione dei lemmi precedenti si ottiene il

TEOREMA: *Se $G$ è un gruppo libero commutativo con $n$ generatori, semplicemente ordinato, i suoi elementi si distribuiscono in un numero di classi di equivalenza non superiore ad $n$.*

Sia $g_1, g_2, \ldots, g_n$ una base di generatori di $G$. Ogni generatore può essere pensato come positivo perchè se ad esempio fosse $g_1 < 0$ basterebbe al suo posto considerare $-g_1$ e $-g_1$, $g_2, \ldots, g_n$ costituirebbe ancora una base per $G$.

E' pure evidentemente non restrittivo supporre $0 < g_1 < < g_2 < \ldots < g_n$.

Ogni elemento di $G$ è della forma $\sum_{1}^{n}{}_i \lambda_i g_i$ e perciò per i LEMMI I, e II esso o è equivalente a $g_n$ od infinitamente minore di $g^u$.

Ragionando per assurdo si supponga che esistano $n+1$ elementi positivi di $G$, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1} = g_n$ tali che $\omega_1 \ll \omega_2 \ll \ldots \ll \omega_{n+1}$.

Sarà intanto

$$\omega_i = \sum_{1}^{n}{}_j\, h_{i,j}\, g_j \qquad (i = 1, 2 \ldots n). \tag{2}$$

Sia $H$ il determinante della matrice formata con gli interi $h_{i,j}$. Se $H = 0$ si possono determinare gli interi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tutti nulli, tali che

$$h_{1j}\lambda_1 + \ldots + h_{nj}\lambda_n = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

ed allora dalle (2) moltiplicando per $\lambda_i$ e sommando si ottiene tenendo conto delle (3) $\sum_{1}^{n}{}_i \lambda_i \omega_i = 0$ con $\sum_{1}^{n} \lambda_i^2 \neq 0$ il che è assurdo per il LEMMA III. Sia dunque $H \neq 0$. In tal caso indicato con $H_{in}$ il complemento algebrico di $h_{i,n}$, moltiplicata la (2) per $H_{in}$ e sommato rispetto ad $i$ si ottiene $\sum_{1}^{n}{}_i H_{i,n}\,\omega_i = H g_n = H\omega_{n+1}$, cioè ancora un assurdo per il LEMMA III.

4. - Un sottogruppo del gruppo additivo dei numeri reali isomorfo ad un gruppo libero commutativo con $n$ generatori, necessariamente archimedeo, è costituito di tutti i numeri reali $\sum_{1}^{n} \lambda_i g_i$, dove $\lambda_i$ percorre l'insieme dei numeri interi relativi (e dello zero), e i $g_i$ sono numeri reali fissati, diversi dallo zero, a due a due diversi tra loro e tali ancora che se $\sum_{1}^{n} \lambda_i g_i = 0$ risulti di conseguenza $\lambda_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

L'insieme di tali sottogruppi sarà indicato nel seguito con $I_n$. La costruzione di elementi di $I_n$ è banale.

Si indicherà ancora con $J_n$ l'insieme delle classi in cui si distribuiscono gli elementi di $I_n$ quando si collochino in una stessa classe elementi di $I_n$ isomorfi (cioè gruppi isomorfi che nell'isomorfismo conservano le relazioni d'ordine). In proposito si ha il

TEOREMA: *Condizione necessaria e sufficiente perchè gli elementi $S_1$ ed $S_2$ di $I_n$ siano tra loro isomorfi è che detta $g^{i'}$*

$(i = 1, \ldots, n)$ *una base di* $S_1$ *si riescano a determinare in* $S_2$ $n$ *numeri* $g_i''$ *tali che*:

$$\frac{g_1'}{g_1''} = \frac{g_2'}{g_2''} = \ldots = \frac{g_n''}{g_n'} = k > 0 . \tag{4}$$

La condizione è necessaria. Infatti se $S_1$ ed $S_2$ sono isomorfi siano $g_i''$ i numeri di $S_2$ che corrispondono a $g_i'$.

Per l'isomorfismo $g_i'$ e $g_i''$ avranno lo stesso segno quindi il loro rapporto sarà positivo.

Per fissare le idee si supponga $g_1' > 0$, $g_2' > 0$ e $g_1' < g_2'$.

Scelto un intero positivo $h$ risulterà univocamente determinato l' intero positivo $m_h$ tale che

$$m_h g_1' < h g_2' \leq (m_h + 1) g_1' \tag{5}$$

e da questa si trae

$$\frac{m_h}{h} < \frac{g_2'}{g_1'} \leq \frac{m_h}{h} + \frac{1}{h} \tag{6}$$

e quindi passando al limite

$$\lim_{h \to +\infty} \frac{m_h}{h} = \frac{g_2'}{g_1'} . \tag{7}$$

Ma per l' isomorfismo dalla (5) si deduce

$$m_h g_1'' < h g_2'' \leq (m_h + 1) g_1''$$

e quindi da questa una relazione analoga alla (6) e con ulteriore passaggio al limite

$$\lim_{h \to +\infty} \frac{m_h}{h} = \frac{g_2''}{g_1''} . \tag{8}$$

Dal confronto delle (7), (8) risulta $\dfrac{g_2'}{g_1'} = \dfrac{g_2''}{g_1''}$ e di qua facilmente la prima delle (4).

Analoghe considerazioni se $g_1'$ e $g_2'$ non sono entrambi positivi. Stabilita la prima delle (4) le altre si deducono col procedimento precedente confrontando $g_1'$ con $g_i'$ $(i = 3, 4, \ldots, n)$.

La condizione è sufficiente. Esisteranno quindi in $S_2$ i numeri $g_i''$ per cui sono vere le (4). Si consideri tra $S_1$ ed $S_2$ la corrispondenza che associa all'elemento $\sum_1^n{}_i \lambda_i g_i'$ di $S_1$ l'elemento $\sum_1^n{}_i \lambda_i g_i''$ di $S_2$. Tale corrispondenza associa alla somma di elementi la somma dei corrispondenti ed è biunivoca. Infatti poichè per le (4) $g_i'' = k g_i'$ si ha che all'elemento $\sum_1^n{}_i \lambda_i g_i'$ di $S_1$ viene a corrispondere in $S_2$ l'elemento $k \cdot \sum_1^n \lambda_i g_i'$ e viceversa. Dunque ad elementi distinti corrispondono elementi distinti poichè $k \neq 0$ e ad elementi positivi elementi positivi poichè $k > 0$. La corrispondenza considerata è dunque un isomorfismo.

**5.** - Per il TEOREMA dimostrato nel n.ro 3. se $G$ è un gruppo libero commutativo con $n$ generatori, semplicemente ordinato, i suoi elementi positivi si distribuiscono in $i$ $(i \leq n)$ classi di equivalenza archimedea. Siano $A_1, A_2, \ldots, A_i$ tali classi. Si potrà supporre che se $a_j \varepsilon A_j$, $a_k \varepsilon A_k$ sia $a_j \ll a_k$ se $j < k$. $A_1$ si può chiamare la *minima* classe di equivalenza archimedea di $G$.

Si consideri ora l'insieme $A_1^*$ formato dagli elementi di $A_1$, dai loro opposti e dallo zero, orbene si ha il

TEOREMA: *$A_1^*$ è un sottogruppo con divisione di $G$, archimedeo quando lo si ordini per induzione da $G$.*

Siano $\alpha$ e $\beta$ due elementi di $A_1^*$. Si deve intanto far vedere che $\alpha + \beta \varepsilon A_1^*$. Se in $G$ $\alpha + \beta > 0$ può essere $0 < \alpha < \beta$, quindi $\alpha + \beta < 2\beta \backsim \beta$ e poichè $\beta < \alpha + \beta$ ne segue $\alpha + \beta \backsim \beta$.

Se $\alpha$ e $\beta$ hanno segni contrari, ad esempio $\alpha < 0$, $\beta > 0$, è $\alpha + \beta < -\alpha + \beta < 2\beta$ se per fissare le idee si è supposto $-\alpha < \beta$; si procede poi come sopra tenendo conto che $A_1$ è la *minima* classe di equivalenza.

Se almeno uno degli elementi $\alpha$ e $\beta$ è nullo la cosa è banale.

Se $\alpha + \beta < 0$ è $-\alpha - \beta > 0$ ($G$ è commutativo) e poichè $-\alpha$ e $-\beta$ appartengono ad $A_1^*$ vi appartiene per quanto già visto $-\alpha - \beta$ e quindi sempre per la costruzione di $A_1^*$ anche il suo opposto $\alpha + \beta$.

$A_1^*$ è dunque un sottogruppo di $G$, che risulterà semplicemente ordinato per induzione da $G$.

D' altra parte $A_1^*$ è archimedeo perchè se gli elementi positivi di $A_1^*$ appartenessero ad almeno due classi distinte di equivalenza archimedea ciò accadrebbe anche per gli elementi di $A_1$, contro l' ipotesi.

Sia ora $p \cdot \alpha \varepsilon A_1^*$ con $p$ intero. Si può supporre $\alpha > 0$ e $p > 0$ previo passaggio agli opposti. Si ha per il Lemma I $\alpha \backsim p\alpha$ e quindi $\alpha \varepsilon A_1$ cioè $\alpha \varepsilon A_1^*$ ed $A_1^*$ è dunque un sottogruppo con divisione di $G$.

**6**. - Si mantengono i significati dati alle notazioni nel n.ro precedente e si considera il gruppo fattoriale $G_1 = \dfrac{G}{A_1^*}$. Ha interesse mostrare come $G$ induca un semplice ordinamento in $G_1$ nel modo che segue.

Siano $h$ e $k$ due elementi di $G_1$ diversi tra loro.

Si indichino con $H$ e $K$ gli insiemi di elementi di $G$ che nell'omomorfismo che porta $G$ su $G_1$ si trasformano rispettivamente in $h$ e $k$.

Se $a$ ed $a_1$ sono elementi di $H$ e $b$ e $b_1$ elementi di $K$ ed è ad esempio, $a < b$ allora è anche $a_1 < b_1$.

Infatti sarà $a_1 = a + \sigma$ con $\sigma \varepsilon A_1^*$ e $b_1 = b + \eta$ con $\eta \varepsilon A_1^*$ e se fosse $a_1 - b_1 \geq 0$ dalla $a_1 - b_1 = a - b + \sigma - \eta$ seguirebbe, poichè $a - b < 0$, $0 \leq a_1 - b_1 < \sigma - \eta \varepsilon A_1^*$ e per la proprietà di minimo goduta da $A_1$, $a_1 - b_1 \varepsilon A_1^*$, ciò che è assurdo poichè $a_1$ e $b_1$ appartengono a due classi diverse modulo $A_1^*$. Ne segue che le classi di $G$ modulo $A_1^*$ costituiscono una catena e si intenderà che $h < k$, se e solo se, $H < K$; in tal modo $G_1$ risulta semplicemente ordinato.

Le considerazioni svolte si possono invertire. Sia $A_1^*$ un sottogruppo con divisione di $G$; allora per i teoremi del n.ro I. sui gruppi, $A_1^*$ e $G_1 = \dfrac{G}{A_1^*}$ sono gruppi liberi commutativi, quindi semplicemente ordinabili.

Si sia stabilito un semplice ordinamento per $A_1^*$ ed uno per $G_1$, si mostra ora come questi ordinamenti inducano un semplice ordinamento su $G$.

Siano $p$ e $q$ due elementi di $G$, se essi appartengono ad $A_1^*$ si stabilisca tra loro in $G$ la stessa relazione d' ordine che posseggono in $A_1^*$; se $p \varepsilon A_1^*$ e $q$ nell' omomorfismo di $G$ su $G_1$ si trasforma nell' elemento $q'$ di $G_1$ si ponga $p < q$ se $q' > 0$ in $G_1$ e $p < q$ se $q' < 0$ in $G_1$; se $p$ e $q$ si trasformano nell' omomorfismo nello stesso elemento $h$ di $G_1$ ciò vuol dire che $p - q = \tau \varepsilon A_1^*$ e si ponga $p < q$ o $p > q$ a seconda che in $A_1^*$ è $\tau < 0$ o $\tau > 0$; se infine i trasformati di $p$ e $q$ in $G_1$ sono i due elementi distinti di $G_1$ $p'$ e $q'$ si stabilisca tra $p$ e $q$ in $G$ la stessa relazione d' ordine che hanno $p'$ e $q'$ in $G_1$.

E' immediato verificare che $G$ risulta in tal modo semplicemente ordinato e che l' insieme $A_1$ degli elementi positivi di $A_1^*$ costituisce la classe minima di equivalenza archimedea di $G$.

Ritornando al caso che $G$ sia semplicemente ordinato e dei semplici ordinamenti che da $G$ vengono indotti in $A_1^*$ ed in $G_1 = \frac{G}{A_1^*}$, si vede subito che se le classi di equivalenza archimedea di $G$ sono in numero di $i$ $(i \leq n)$, quelle di $G_1$ sono in numero di $i - 1$.

**7.** - Sia ancora $G$ semplicemente ordinato; $A_1^*$ (n.ro I.) sarà anch' esso un gruppo libero commutativo con $r \leq n$ generatori; orbene è di decisiva importanza per questa ricerca il seguente:

TEOREMA: *Se $G$ è semplicemente ordinato e il suo sottogruppo $A_1^*$ risulta generato da $r$ generatori, scelto un qualsiasi sottogruppo con divisione di $G$ con $r$ generatori $A_2^*$, è possibile determinare un semplice ordinamento in $A_2^*$ ed un ordinamento in $\frac{G}{A_2^*}$ per modo che per induzione si riproduca in $G$, a meno di automorfismi il semplice ordinamento di partenza.*

Sia $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ una base di generatori di $A_1^*$, $h_1, h_2, \ldots, h_{n-r}$ una base di $G_1 = \frac{G}{A_1^*}$ così sia $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ una base di $A_2^*$ e $k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}$ una base di $G_2 = \frac{G}{A_2^*}$. Si consideri la corrispondenza tra $A_1^*$ ed $A_2^*$ che associa ad ogni elemento $\sum_1^r \lambda_i \omega_i$ di $A_1^*$ l'elemento $\sum_1^r \lambda_i \eta_i$ e così la corrispondenza tra $G_1$ e $G_2$ che associa a $\sum_{1}^{n-r} \mu_i h_i$ l'elemento $\sum_{1}^{n-r} \mu_i k_i$. Si tratta evidentemente di due isomorfismi di gruppo. Ora $A_1^*$ e $G_1$ risultano semplicemente ordinati per induzione dal semplice ordinamento originario di $G$. Si considerino come elementi positivi di $A_2^*$ e $G_2$ quelli che negli isomorfismi precedenti sono corrispondenti di elementi positivi di $A_1^*$ e $G_1$. Si vede subito che in tal modo $A_2^*$ e $G_2$ sono stati semplicemente ordinati. Ad esempio se $a$, $b$, $c$ sono elementi di $A_2^*$ ed è $a > b$, $b > c$ cioè $a - b > 0$ e $b - c > 0$ questo è perchè in $A_1^*$ i corrispondenti $a'$, $b'$, $c'$ verificano analoghe diseguaglianze, ma è allora $a' > c'$ perchè $A_1^*$ è semplicemente ordinato; d'altra parte il corrispondente di $a' - c' > 0$ è $a - c$ e quindi per la convenzione fatta $a - c > 0$, $a > c$.

Ora i semplici ordinamenti di $A_2^*$ e $G_2$ inducono (n.ro 6) un semplice ordinamento su $G$ ed il teorema resterà provato se si fa vedere che esiste un automorfismo di $G$ che ad elementi positivi nel primo ordinamento fa corrispondere elementi positivi nel secondo ordinamento e viceversa.

Siano $a_1, a_2, \ldots, a_{n-r}$ elementi di $G$ che corrispondono in $G_1$ ad $h_1, h_2, \ldots, h_{n-r}$ e $b_1, b_2, \ldots, b_{n-r}$ elementi di $G$ che corrispondono in $G_2$ a $k_1, \ldots, k_{n-r}$. Si ha che tanto $\omega_1, \ldots, \omega_r$, $a_1, \ldots, a_{n-r}$ quanto $\eta_1, \ldots, \eta_r$, $b_1, \ldots, b_{n-r}$ costituiscono una base di $G$. Si consideri la corrispondenza che associa ad ogni $\omega_i$, $\eta_i$ e ad ogni $a_j$, $b_j$, cioè tale che all'elemento $\sum_{i\,1}^{r} \lambda_i \omega_i + \sum_{i\,1}^{n-r} \mu_j a_j$ fa corrispondere l'elemento $\sum_{i\,1}^{r} \lambda_i \eta_i + \sum_{j\,1}^{n-r} \mu_j b_j$ e viceversa. E' evidente che la corrispondenza è un automorfismo di $G$, bisogna mostrare che conserva le relazioni d'ordine.

Sia $v = \sum_{1}^{r} \lambda_i \omega_i + \sum_{j\,1}^{n-r} \mu_j a_j > 0$, se $\mu_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n-r)$ il suo corrispondente $\sum_{1}^{r} \lambda_i \eta_i$ è positivo per come si è ordinato $A_2^*$; se qualche $\mu_j$ è diverso da zero, $v$ non appartiene ad $A_1^*$ e si trasformerà quindi nell'omomorfismo di $G$ su $G_1$ nell'elemento $w = \sum_{1}^{n-r} \mu_j h_j$ che risulterà positivo per induzione (n.ro 6). D'altra parte nell'isomorfismo considerato poco sopra tra $G_1$ e $G_2$ a $w$

corrisponde $\sum_{1}^{n-r}{}_j \mu_j k_j$, positivo per come si ordina $G_2$ ed ancora per il n.ro 6 l'elemento $\sum_{1}^{r}{}_i \lambda_i \eta_i + \sum_{1}^{n-r}{}_j \mu_i b_j$, in quanto nell' omomorfismo di $G$ su $G_2$ corrisponde all' elemento positivo $\sum_{1}^{n-r}{}_j \mu_j k_j$ di $G_2$, è positivo.

**8.** - Il complesso delle proprietà messe in evidenza nei numeri precedenti permette ora agevolmente di risolvere il problema, scopo del presente lavoro, cioè di determinare i semplici ordinamenti distinti di un gruppo $G$ libero commutativo con $n$ generatori $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Se $A_1, A_2, \ldots, A_i$ sono le classi di equivalenza archimedea di $G$ in un semplice ordinamento esse costituiscono una catena sicchè con manifesto significato del simbolo si potrà scrivere $A_1 < A_2 < \ldots < A_i$ $(i \leq n)$.

Siano $B_1 < B_2 < \ldots < B_j$ le classi di un altro semplice ordinamento di $G$.

Perchè i due semplici ordinamenti di $G$ siano effettivamente distinti occorre e basta che sia o $i \neq j$ o se $i = j$ almeno una delle classi $A_h$ non isomorfa alla classe $B_h$.

Per il teorema del n.ro 7 la questione può essere vista in questo altro modo. Scelto un qualunque sottogruppo con divisione di $G$ con $r$ generatori e quindi si può prendere il sottogruppo $A_1^*$ generato proprio da $g_1$, $g_r$ si ordini semplicemente $A_1^*$ ed anche $G_1 = \frac{G}{A_1^*}$, per induzione si ottiene un semplice ordinamento di $G$.

Un semplice ordinamento di $G$ distinto dal precedente si ottiene in questi modi: 1) considerando al posto di $A_1^*$ un sottogruppo con un numero di generatori diverso da $r$, 2) considerando per $A_1^*$, che deve essere un gruppo archimedeo con $r$ generatori un semplice ordinamento diverso dal precedente e tali ordinamenti sono dati dall' insieme $J_r$ considerato al numero 4, 3) lasciando per $A_1^*$ lo stesso semplice ordinamento, ma mutando il semplice ordinamento di $G_1$.
Ora $G_1$ è un gruppo libero con $n - r$ generatori e come suoi

generatori si possono prendere proprio i corrispondenti $g'_{r+1}$, ..., $g'_n$ di $g_{r+1}$, ..., $g_n$ nell'omomorfismo che porta $G$ su $G_1$. Si è così ricondotti a risolvere il problema iniziale per un gruppo libero commutativo con $n - r < n$ generatori.

Così procedendo si arriverà a dover determinare gli ordinamenti di un gruppo archimedeo con $s \geq 1$ generatori e questi come si sa già sono individuati dall' insieme $J_s$.

**9.** - A titolo di esempio verranno in questo numero trattati direttamente i casi di un gruppo commutativo libero con 1, 2, 3 generatori. Come preliminare si rammenti che se $G$ è un gruppo commutativo con $n$ generatori $g_1$, ..., $g_n$ ed $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_r$ è una base di un sottogruppo $H$ libero con $n$ generatori del gruppo additivo reale, per imporre a $G$ un semplice ordinamento in modo che $G$ risulti isomorfo ad $H$ basta convenire che $\Sigma\,\lambda_i g_i$ è positivo se e solo se $\Sigma\,\lambda_i \alpha_i$ è positivo. Se $g_1'$ ..., $g'_n$ è un' altra base per $G$ il semplice ordinamento di $G$ ottenuto con la convenzione $\Sigma\,\lambda_i g'_i$ è positivo se e solo se $\Sigma\,\lambda_i \alpha_i$ è positivo, è a meno di un automorfismo quello considerato in precedenza. Infatti la corrispondenza $g_i \longleftrightarrow g_i'$ è un automorfismo di $G$ che muta elementi positivi in elementi positivi.

In $G$ si impone un ordinamento diverso dal precedente se si sostituisce ad $H$ nelle considerazioni svolte un sottogruppo del gruppo addittivo reale con $n$ generatori non isomorfo ad $H$. Perciò la scelta della base nei sottogruppi come $H$ che servono ad ordinare $G$ non ha influenza in questo ordinamento e si potrà quindi supporre che i numeri $\alpha_1$, ..., $\alpha_n$ siano tutti positivi.

Ed ancora si potrà sempre supporre che $\alpha_1 = 1$ in quanto, per il teorema del n. 4, moltiplicando i numeri della base per uno stesso numero positivo si ottiene la base di un gruppo isomorfo al precedente.

I.) GRUPPO CON 1 GENERATORE $g_1$. — Il gruppo è necessariamente archimedeo. Vi è un solo sottogruppo $H$ da considerare, quello generato da $\alpha_1 = 1$ e $\lambda_1 g_1$ è positivo se e solo se $\lambda_1$ è positivo.

II.) GRUPPO CON 2 GENERATORI $g_1$, $g_2$.

*a*) $G$ non sia archimedeo allora per il Teorema del n.ro 3 i suoi elementi devono distribuirsi in 2 classi di equivalenza archimedea $A_1$, $A_2$ $(A_1 < A_2)$.

Per il n. 7 si può prendere come generatore di $A_1^*$ proprio $g_1$ e per I.) vi è, a meno di automorfismi, un solo semplice ordinamento di $A_1^*$ quello per cui $\lambda_1 g_1 > 0$ se e solo se $\lambda_1 > 0$.

Così $\frac{G}{A_1^*}$ è un gruppo libero con 1 generatore e come tale può essere scelto l'omomorfo $g'_2$ di $g_2$ e per analoghe considerazioni delle precedenti $\lambda_2 g'_2 > 0$ se e solo se $\lambda_2 > 0$.

In conclusione $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 > 0$ se $\lambda_2 > 0$ o se $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_1 > 0$ e per $G$, a meno d'automorfismi, è possibile questo solo semplice ordinamento.

*b*) $G$ sia archimedeo, allora esso è isomorfo ad un sottogruppo libero con due generatori del gruppo additivo reale. Si rammenti che due siffatti sottogruppi sono tra loro isomorfi quando appartengono ad una stessa classe elemento di $J_2$. Si può anche dire che i semplici ordinamenti di $G$ sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $J_2$ [5]).

III.) GRUPPO CON 3 GENERATORI $g_1$, $g_2$, $g_3$.

*a*) $G$ sia non archimedeo ed i suoi elementi si distribui-

---

[5]) Volendo determinare un elemento per ogni classe elemento di $J_2$ si può procedere come segue. Per generatori di un sottogruppo con due generatori del gruppo additivo reale si possono prendere due numeri positivi ed anzi per il teorema del n. 4 si può supporre che uno di essi sia l'unità. Detti dunque 1 e $\xi$ tali due generatori deve essere $\lambda \cdot 1 + \mu\xi \neq 0$ se $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ qualunque siano gli interi relativi $\lambda$ e $\mu$ e per questo è necessario e basta che $\xi$ sia irrazionale. Per ottenere un sottogruppo $H$ del gruppo additivo reale non isomorfo al precedente, sempre per il teorema del n. 4 è necessario e basta determinare la base 1, $\xi'$ di $H$ per modo che non sia $\frac{1}{\lambda + \mu\xi'} = \frac{\xi}{\lambda_1 + \mu_1\xi'}$ con $\lambda$, $\mu$, $\lambda_1$, $\mu_1$ interi o zero. I numeri $\xi'$ verificanti una relazione del tipo soprascritto sono tutti e soli quelli della forma $\xi' = \frac{\alpha + \beta\xi}{\gamma + \delta\xi} > 0$ con $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ interi o nulli. Come conseguenza si ha che l'insieme degli elementi di $J_2$ ha la potenza del continuo. Analoghe considerazioni si potrebbero svolgere per $J_n$.

scano in 3 classi di equivalenza $A_1 < A_2 < A_3$. Per il n.ro 7 si può prendere come generatore di $A_1^*$, $g_1$ e vi è dunque a considerare un solo ordinamento di $A_1^*$.

$G_1 = \frac{G}{A_1^*}$ è un gruppo libero con 2 generatori e per questi si possono prendere gli omomorfi $g_2'$, $g_3'$ di $g_2$ e $g_3$. Gli elementi di $G_1$ si distribuiranno in due classi di equivalenza $\overline{A}_2 < \overline{A}_3$ (rispettivamente omomorfe di $A_2$ e $A_3$ nell'omomorfismo $G \to G_1$).

Come generatore di $\overline{A}_2^*$ si può prendere $g_2'$ e vi è un solo semplice ordinamento di $\overline{A}_2^*$. Così per generatore di $\frac{G_1}{\overline{A}_2^*}$ si può prendere l'omomorfo $g_3''$ di $g_3'$ e si ha ancora un solo semplice ordinamento da considerare.

Dunque, a meno di automorfismi, esiste un solo semplice ordinamento di $G$ che si può realizzare come segue: $h = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 > 0$ se $\lambda_3 > 0$; oppure $h > 0$ se $\lambda_3 = 0$ e $\lambda_2 > 0$; oppure $h > 0$ se $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_1 > 0$.

*b*) Gli elementi di G si distribuiscono in 2 classi $A_1 < A_2$ ed $A_1^*$ ha un generatore e sia $g_1$, allora $\frac{G}{A_1^*}$ è archimedeo con due generatori $g_2'$, $g_3'$ omomorfi di $g_2$ e $g_3$.

I semplici ordinamenti di $\frac{G}{A_1^*}$ si realizzano come in II.), *b*).

Ordinato $\frac{G}{A_1^*}$ si pone $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 > 0$ se $\lambda_2 g_2' + \lambda_3 g_3' > 0$ in $\frac{G}{A_1^*}$ e se $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ quando $\lambda_1 > 0$.

*c*) Gli elementi di $G$ si distribuiscono in due classi $A_1 < A_2$ e $A_1^*$ ha due generatori e $\frac{G}{A_1^*}$ un generatore. Allora $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 > 0$ se $\lambda_3 > 0$ e se $\lambda_3 = 0$ quando $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 > 0$ in $A_1^*$ ($g_1$, $g_2$ sono i generatori di $A_1^*$).

Sia nel caso *b*) come in questo caso *c*) i semplici ordinamenti di $G$ si possono mettere in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $J_2$.

*d*) G è archimedeo, i suoi semplici ordinamenti sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $J_3$.