RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNO PINI

Osservazioni sulle soluzioni dei sistemi di equazioni a derivate parziali lineari di tipo ellittico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 366-379

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__366_0>

OSSERVAZIONI SULLE SOLUZIONI DEI SISTEMI DI EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI LINEARI DI TIPO ELLITTICO

Nota (*) *di* BRUNO PINI (*a Bologna*)

La presente Nota è la prima parte di un lavoro nel quale si dà un contributo alla seguente questione:

Assegnato un dominio D del piano x, y e il sistema lineare autoaggiunto di tipo ellittico

$$(1)\qquad \mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{C}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right) - \boldsymbol{N}\boldsymbol{u} = 0$$

dove $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{N}$ sono matrici $n \times n$ simmetriche, sufficientemente regolari, con $\left\| \begin{matrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{matrix} \right\|$ ed $\boldsymbol{N}$ definite positive, ed $\boldsymbol{u}$ è il vettore incognito (ad n componenti), stabilire il modo con cui la soluzione del problema di DIRICHLET assume i dati al contorno, in dipendenza dalla natura di questi.

Precisamente proveremo che, sotto convenienti ipotesi di regolarità per i coefficienti del sistema e della $\mathfrak{F}D$, che preciseremo più avanti:

1°) *assegnato ad arbitrio un vettore* $\bar{\boldsymbol{u}}$ *con la norma di quadrato sommabile su* $\mathfrak{F}D$, *esiste un unico vettore* $\boldsymbol{u}$ *che in* $D - \mathfrak{F}D$ *è soluzione regolare di* $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = 0$ *e assume in media i valori* $\bar{\boldsymbol{u}}$ *su un sistema di curve parallele alla* $\mathfrak{F}D$ *e approssimanti questa dall'interno di* D;

2°) *se* $\bar{\boldsymbol{u}}$ *è il limite in media (rispetto all'anzidetto sistema di curve) di un vettore con la norma di quadrato sommabile su* D *e dotato dei vettori derivati continui in* $D - \mathfrak{F}D$

(*) Pervenuta in redazione il 24 agosto 1953.

e con la norma di quadrato sommabile su D, allora per quasi-tutti i punti della $\mathfrak{F}D$ la precedente soluzione converge ad $\bar{\boldsymbol{u}}$ *sulla normale in tali punti alla $\mathfrak{F}D$;*

3°) *se* $\bar{\boldsymbol{u}}$ *è un vettore continuo, allora per ogni punto della $\mathfrak{F}D$ il limite* (*superficiale*) *della soluzione è* $\bar{\boldsymbol{u}}$.

Sfruttando alcuni risultati di una precedente Nota [1]) e certe formole di maggiorazione dovute a S. SOBOLEV [2]), proveremo la prima e la seconda affermazione. La terza seguirebbe una volta stabilite delle maggiorazioni puntuali della norma della soluzione in funzione dei dati. Queste sono già state indicate nella Nota citata in [1]) solo nel caso particolare che $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ siano matrici diagonali del tipo $f(x, y)\boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{E}$ matrice unità); del caso generale ci stiamo attualmente occupando. Pertanto la terza affermazione è per ora limitata al caso particolare anzidetto.

È da notare che un teorema di P. FATOU [3]) sull'integrale di POISSON e certi risultati di DE LA VALLÉE POUSSIN [4]) fanno pensare che la sola convergenza in media è forse sufficiente ad assicurare quel comportamento che in 2°) è indicato in ipotesi più particolari sui dati.

Sfruttando il fatto che (1) è il sistema di EULERO-LAGRANGE relativo al funzionale

$$(2) \qquad J[\boldsymbol{u}] = \iint_D \left(\boldsymbol{A} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + 2\boldsymbol{B} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \boldsymbol{C} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} \right) dxdy$$

---

1) B. PINI, *Sui sistemi di equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine dei tipi ellittico e parabolico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXII (1953).

2) S. SOBOLEV, *Su un problema ai limiti per le equazioni poliarmoniche*, Recueil mathématique de Moscou, 2 (44), n. 3 (1937) (in russo).

3) Cfr. per esempio L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Bologna 1928, n. 149.

4) C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Propriétés des fonction harmoniques dans une domaine ouvert limité par des surfaces à courbure bornée*, Annali R. Scuola Normale Sup. Pisa, 2, 2 (1933).

la soluzione di 2°) sarà quella che minimizza (2) in una opportuna classe di vettori; essa sarà costituita da un vettore dotato di vettori derivati con la norma di quadrato sommabile, onde il comportamento al contorno seguirà da un teorema di G. FICHERA. Sono essenziali ai fini della dimostrazione una opportuna formola di media per le soluzioni di (1) e certe sue conseguenze, nonchè le già accennate formole di maggiorazione di SOBOLEV. È pertanto opportuno richiamare le une e le altre.

I. — Sia D un campo dello spazio euclideo ad n dimensioni; l'iperpiano $x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 0$ $(s < n)$ intersechi D; su esso si fissi un campo F con frontiera regolare a tratti e interno a D. A fianco della varietà $(n - s)$-dimensionale F si consideri la varietà «vicina» ad F e interna a D

$$x_i = \chi_i(x_{s+1}, \ldots, x_n) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, s ,$$

essendo le χ_i definite su F e soddisfacenti le condizioni $|\chi_i| < \delta$.

Sia $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una arbitraria funzione continua in D e ivi dotata delle derivate fino a quelle d'ordine $\left[\frac{s}{2}\right] + 1$ incluso e tale che

$$\overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} \sum_{\Sigma\alpha_i = l} \frac{l!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^l \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2 dx_1 \ldots dx_n \leq A ,$$

$$l = 1, 2, \ldots, \left[\frac{s}{2}\right] + 1 .$$

In queste ipotesi riesce

$$\frac{1}{F} \overbrace{\int \cdots \int_F}^{n-s} \psi(0, \ldots, 0, x_{s+1}, \ldots, x_n)^2 dx_{s+1} \ldots dx_n < AB_1 ,$$

(3)

$$\frac{1}{F} \overbrace{\int \cdots \int_F}^{n-s} [\psi(0, \ldots, 0, x_{s+1}, \ldots, x_n) -$$

$$- \psi(\chi_1, \ldots, \chi_s, x_{s+1}, \ldots, x_n)]^2 dx_{s+1} \ldots dx_n <$$

$$< \begin{cases} AB_2\delta & \text{per } s \text{ dispari} \\ AB_3\delta^2 \,|\lg \delta\,| & \text{per } s \text{ pari} \end{cases}$$

dove le B_i sono costanti che dipendono solo dalla posizione del campo F in D e non dipendono da ψ. Se una porzione della $\mathfrak{F}D$ non contiene elementi cuspidali, può essere assunta come varietà F. Inoltre se un campo F e i campi ad esso « vicini » possono essere trasformati in un campo appartenente a un iperpiano e in campi ad esso « vicini » mediante funzioni continue dotate di un numero sufficiente di derivate, allora le formole precedenti sono valide anche per tali campi. Le costanti B_i vengono in definitiva a dipendere dalle derivate delle funzioni che operano tale trasformazione. Le (3) sono le già menzionate maggiorazioni di SOBOLEV.

II. — La formola di media poi, alla quale ci riferiamo, è stata già stabilita in un precedente lavoro [5]; però essendo ivi soltanto accennato alla sua invertibilità, riteniamo opportuno tornare sull'argomento.

Per semplicità ci riferiamo al caso di un sistema di due equazioni e adoperiamo le stesse notazioni usate nella Nota citata.

Posto $\delta_{ij}(\alpha) = a_{ij}\alpha^2 + 2b_{ij}\alpha + c_{ij}$, distinguiamo il caso che l'equazione

$$\det \| \delta_{ij}(\alpha) \| = 0$$

abbia due radici complesse doppie dal caso che abbia quattro radici complesse semplici.

Nel primo caso riesce

$$\det \| \delta_{ij}(\alpha) \| = \det \boldsymbol{A} (\alpha^2 + p\alpha + q)^2 , \qquad 4q > p^2.$$

Indichiamo con P il punto (x, y) e con Q il punto (ξ, η); fissato Q in $D - \mathfrak{F}D$ e posto

$$\rho^2 = q(Q)(x - \xi)^2 - p(Q)(x - \xi)(y - \eta) + (y - \eta)^2$$

---

[5] B. PINI, *Sulle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine 2n di tipo ellittico ...*, Rend. di Mat. e delle sue appl. 5, XI (1952). Sono da apportare a questo lavoro le seguenti correzioni: a pag. 194 (rigo 2°) Z, anzichè z; a pag. 194 (rigo 11°) $a_{ik}\alpha_l + b_{ik}$, anzichè $a_{ik}\alpha_l + c_{ik}$; a pag. 194 (rigo 17° e 19°) $(-1)^{2l}$, anzichè $(-1)^l$; a pag. 195 (rigo 11°) $\left(1 - \frac{\overline{PQ}^5}{r^5}\right)^2$ anzichè $\left(1 - \frac{\overline{PQ}^5}{r^5}\right)$.

e

$$Z(P,\ Q) = \rho^2 \lg \rho\,,$$

si ottiene

$$\boldsymbol{Z}(P,\ Q) = (1 + 2\lg\rho)[q(Q)\boldsymbol{A}'(Q) - p(Q)\boldsymbol{B}'(Q) + \boldsymbol{C}'(Q)] +$$
$$+ \frac{1}{2\rho^2}\left[\left(\frac{\partial\rho^2}{\partial x}\right)^2 \boldsymbol{A}' + 2\frac{\partial\rho^2}{\partial x}\frac{\partial\rho^2}{\partial y}\boldsymbol{B}' + \left(\frac{\partial\rho^2}{\partial y}\right)^2 \boldsymbol{C}'\right]$$

indicando con $\boldsymbol{M}'$ la matrice aggiunta di $\boldsymbol{M}$.

L'ipotesi che la matrice $\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{matrix}\right\|$ sia definita positiva assicura che tale è anche la matrice $\lambda^2\boldsymbol{A} + 2\lambda\mu\boldsymbol{B} + \mu^2\boldsymbol{C}$ qualunque siano λ e μ non entrambe nulle; lo stesso, si può dire della matrice $\lambda^2\boldsymbol{A}' + 2\lambda\mu\boldsymbol{B}' + \mu^2\boldsymbol{C}'$ e quindi in particolare di $q\boldsymbol{A}' \pm 2\sqrt{q}\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{C}'$; pertanto essendo $(q\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{C}')\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c} > 2\sqrt{q}\,|\boldsymbol{B}'\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c}|$ qualunque sia il vettore $\boldsymbol{c}$ non nullo, segue, essendo $2\sqrt{q} > |p|$, che $(q\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{C}')\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c} > p\boldsymbol{B}'\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c}$ e quindi $q\boldsymbol{A}' - p\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{C}'$ è una matrice definita positiva.

Pertanto, dedotta da $\boldsymbol{Z}(P,\ Q)$ la matrice $\boldsymbol{U}(P,\ Q)$ come è indicato a pag. 192 del lavoro citato in [5]), posto

$$\boldsymbol{V}(P,\ Q) = \left(1 - \frac{\rho^5}{r^5}\right)^2 \boldsymbol{U}(P,\ Q)\,,$$

si riconosce che la matrice

$$(\lg\rho)^{-1}\boldsymbol{V}(P,\ Q)$$

per $P \rightarrow Q$, tende alla matrice definita positiva $2(q\boldsymbol{A}' - p\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{C}')$ qualunque sia il punto Q di $D - \mathfrak{F}D$. Pertanto dalla formola di media

$$\boldsymbol{u}(Q) = \frac{1}{\pi[4q(Q) - p^2(Q)]^{3/2}\det \boldsymbol{A}(Q)} \iint\limits_{\mathfrak{D}} \overline{\mathfrak{L}[\boldsymbol{V}]}\,\boldsymbol{u}\,dx\,dy\,,$$

dove $\mathfrak{D}$ indica il dominio ellittico $q(Q)\,(x - \xi)^2 - p(Q)(x - \xi)(y - \eta) + (y - \eta)^2 = \rho^2$, $0 \leq \rho \leq r$ (con r preso in modo che $\mathfrak{D}$ sia contenuto in $D - \mathfrak{F}D$), e il soprasegno indica trasposizione, ragionando come a pag. 195 del lavoro citato in [5]), dall'essere

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}} \boldsymbol{V}(P,\ Q)\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}(P)]\,dP = 0$$

qualunque sia Q interno a D e per ogni r abbastanza piccolo, segue che $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = 0$.

Infatti $\frac{1}{r^2 \lg r} \iint\limits_{\mathfrak{D}} \boldsymbol{V}(P, Q)\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}(Q)]dP$ è un vettore il cui modulo è maggiore di una certa quantità positiva per tutti gli r abbastanza piccoli, mentre $\frac{1}{r^2 \lg r} \iint\limits_{\mathfrak{D}} \boldsymbol{V}(P, Q)[\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}(P)] - \mathfrak{L}[\boldsymbol{u}(Q)]]dP$ è un vettore il cui modulo si può rendere arbitrariamente piccolo prendendo r sufficientemente piccolo, causa la continuità di $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}(P)]$ in Q.

Ponendoci ora nell'ipotesi che l'equazione $\det \| \delta_{ij}(\alpha) \| = 0$ abbia tutte radici semplici, usando sempre le notazioni del lavoro più volte citato, si ha

$$\mathfrak{L}_{ij}^*[Z] = 2i \sum_{1}^{4}{}_k (-1)^k d_k \delta_{ij}(\alpha_k) \lg \sigma_k + 3i \sum_{1}^{4}{}_k (-1)^k d_k \delta_{ij}(\alpha_k) .$$

Pertanto

$$(\lg \overline{PQ})^{-1} \boldsymbol{V}(P, Q) \xrightarrow[P \to Q]{} 2i \sum_{1}^{4}{}_k (-1)^k d_k \| \delta_{ij}(\alpha_k) \|'$$

(poichè $\left| \frac{x-\xi}{\rho} \alpha_k(Q) + \frac{y-\eta}{\rho} \right|$, per ogni valore di k, è limitato inferiormente da un numero positivo, al variare di Q in D), ossia

$$[2i \sum_{1}^{4}{}_k (-1)^k d_k \alpha_k^2] \boldsymbol{A}'(Q) + 2[2i \sum_{1}^{4}{}_k (-1)^k d_k \alpha_k] \boldsymbol{B}'(Q) + \\ + [2i \sum_{1}^{4}{}_k (-1)^k d_k] \boldsymbol{C}'(Q).$$

Ora è

$$d[2i \sum_{1}^{4}{}_k (-1)^k d_k] = 8(q_1 + q_2)[(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2] > 0$$

e

$$d^2[2i \sum_{1}^{4}{}_k (-1)^k d_k \alpha_k^2][2i \sum_{1}^{4}{}_k (-1)^k d_k] - d^2[2i \sum_{1}^{4}{}_k (-1)^k d_k \alpha_k]^2 = \\ = 64 q_1 q_2 [(p_1 - p_2)^6 + (p_1 - p_2)^4 (3q_1^2 - 2q_1 q_2 + 3q_2^2) + \\ + (p_1 - p_2)^2 (q_1 - q_2)^2 (3q_1^2 + 2q_1 q_2 + 3q_2^2) + \\ + (q_1 - q_2)^4 (q_1 + q_2)^2] > 0 ,$$

essendo

$$d = \begin{vmatrix} \alpha_1^3 & \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^3 & \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_3^3 & \alpha_3^2 & \alpha_3 & 1 \\ \alpha_4^3 & \alpha_4^2 & \alpha_4 & 1 \end{vmatrix} = -4q_1q_2[(p_1-p_2)^2 +$$

$$+(q_1-q_2)^2][(p_1-p_2)^2+(q_1+q_2)^2]\,.$$

Tenendo allora presente che $\begin{Vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{Vmatrix}$ è definita positiva, si conclude, ragionando come sopra, che $(\lg \overline{PQ})^{-1}\boldsymbol{V}(P, Q)$ per $P \to Q$ converge a una matrice definita, qualunque sia Q. Di qui segue, con lo stesso ragionamento già fatto, l'invertibilità della formola di media.

Dopo di ciò, l'ipotesi che i coefficienti di $\mathfrak{L}$ siano dotati delle derivate seconde continue in D è sufficiente per affermare che un vettore con la norma di quadrato sommabile in D e verificante in ogni punto interno a D la proprietà di media (per tutti gli r abbastanza piccoli) è soluzione regolare di $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = 0$ in $D - \mathfrak{F}D$. Ciò si vede con ragionamenti simili a quelli svolti da G. CIMMINO nel caso di una singola equazione [6]).

Infine, come si è detto a pag. 195 del lavoro citato in [5]), se, posto

$$(4) \qquad \boldsymbol{V}_\mu = \begin{cases} \left[1-\left(1-\dfrac{\overline{PQ}^3}{r^3}\right)^\mu\right]\boldsymbol{V} & \text{in } \mathfrak{D} \\ 0 & \text{fuori di } \mathfrak{D} \end{cases}, \quad \mu = 1, 2, \ldots$$

riesce

$$\iint_{\mathfrak{D}} \overline{\mathfrak{L}[\boldsymbol{V}_\mu]}\,\boldsymbol{u}\,dP = 0$$

per ogni punto Q interno a D e per tutti gli r abbastanza piccoli, essendo $\boldsymbol{u}(P)$ un vettore con la norma di quadrato sommabile su D, allora questo può differire al più solo nei punti di un insieme di misura nulla da una soluzione (rego-

[6]) G. CIMMINO, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa*, Annali R. Scuola Normale Sup. Pisa, 2, VII (1938) § 6.

lare in $D - \mathfrak{F}D$) di $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = 0$. Ciò si vede con ragionamenti simili a quelli sviluppati nel caso di una equazione ellittica d'ordine pari.

III. — Sia ora D un dominio la cui frontiera sia costituita da una (o più) curve semplici chiuse di classe due. Assegnato comunque un vettore $\bar{\boldsymbol{u}}$ sulla $\mathfrak{F}D$ il quale sia ivi con la norma di quadrato sommabile, dette $\mathfrak{C}(t)$ le curve parallele alla $\mathfrak{F}D$ e approssimanti la $\mathfrak{F}D$ (dall'interno di D) per $t \to 0$, nella Nota citata in [1]) è stata provata l'unicità di un vettore $\boldsymbol{u}$ che in $D - \mathfrak{F}D$ è soluzione regolare di $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = 0$ e converge in media ad $\bar{\boldsymbol{u}}$ sulle curve $\mathfrak{C}(t)$. Con ragionamenti simili a quelli fatti in analoga occasione [7]) si può provarne l'esistenza.

Ritenendo pertanto provata la proposizione 1ª enunciata all'inizio, passiamo a provare la proposizione 2ª. Ciò si può fare facilmente imitando ragionamenti ormai classici in questioni di questo tipo. Noi seguiremo però specificatamente la trattazione di SOBOLEV che è quella che più si presta quando i dati al contorno s'intendono assunti in media.

Sia $\bar{\boldsymbol{u}}$ un vettore continuo in $D - \mathfrak{F}D$ insieme a $\dfrac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial y}$, tale che $|\bar{\boldsymbol{u}}|^2 + \left|\dfrac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial x}\right|^2 + \left|\dfrac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial y}\right|^2$ sia sommabile su D, e convergente in media (sulle $\mathfrak{C}(t)$) ad $\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathfrak{F}D}$.

---

7) B. PINI, *Sul primo problema di valori al contorno della teoria dell'elasticità*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXI (1952). Sono da apportare a questo lavoro le seguenti correzioni: a pag. 346 (rigo 11°) x_j anzichè v_j; a pag. 351 (rigo 1°) $\bar{\boldsymbol{u}}$ anzichè $\boldsymbol{u}$; a pag. 360 i righi 12°, 13° e 14° vanno sostituiti con: *mentre, avendo* $\dfrac{1}{\delta^2}\iiint\limits_{\mathfrak{D}_0} V^*(P, P_0)$ $[\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}(P_0)] - \boldsymbol{f}(P_0)]dP$ *modulo maggiore di una quantità positiva al variare di* δ *in un intorno dello zero, e* $\dfrac{1}{\delta^2}\iiint\limits_{\mathfrak{D}_0} V^*(P, P_0)[\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}(P)] -$ $- \mathfrak{L}[\boldsymbol{u}(P_0)] - \boldsymbol{f}(P) + \boldsymbol{f}(P_0)]dP$ *modulo infinitesimo con* δ, *causa la continuità di* $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}(P)] - \boldsymbol{f}(P)$ *in* P_0, *il primo membro della formola precedente sarebbe positivo*; a pag. 361 (rigo 2° e 5°) $\mathfrak{D}$ anzichè D.

Indichiamo con $\mathcal{H}$ la classe dei vettori $\boldsymbol{u}$ che godono delle stesse proprietà specificate per $\overline{\boldsymbol{u}}$ e tali che

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathcal{C}(t)} | \boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}_{\mathfrak{F}D}|^2 d\sigma = 0 .$$

Proveremo l'esistenza in $\mathcal{H}$ di un vettore $\boldsymbol{u}_0$ che minimizza il funzionale

$$(5) \qquad J[\boldsymbol{u}] = \iint_D \left(\boldsymbol{A} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + 2\boldsymbol{B} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \boldsymbol{C} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} \right) dxdy$$

e che in $D - \mathfrak{F}D$ è soluzione regolare di $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = 0$.

Sia

$$(6) \qquad d = \text{estr} \inf_{\mathcal{H}} J[\boldsymbol{u}]$$

e sia $\{\boldsymbol{u}_n\}$ una successione minimizzante; sarà allora, fissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$,

$$(7) \qquad J[\boldsymbol{u}_n] - d < \varepsilon$$

per ogni n maggiore di un certo n_ε.

Sia $\boldsymbol{v}$ una qualunque variazione vettoriale ammissibile, cioè dotata in $D - \mathfrak{F}D$ delle derivate prime continue, tale che

$$\iint_D \left(|\boldsymbol{v}|^2 + \left| \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} \right|^2 \right) dxdy < +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 0} \int_{\mathcal{C}(t)} | \boldsymbol{v} |^2 d\sigma = 0 .$$

Evidentemente $\boldsymbol{u}_n - \lambda \boldsymbol{v}$, qualunque sia la costante λ, è un vettore di $\mathcal{H}$ e quindi

$$J[\boldsymbol{u}_n - \lambda \boldsymbol{v}] \geq d$$

e per la (7)

$$J[\boldsymbol{u}_n - \lambda \boldsymbol{v}] - J[\boldsymbol{u}_n] > -\varepsilon ,$$

per ogni $n > n_\varepsilon$.

Ora è

$$J[\boldsymbol{u}_n - \lambda \boldsymbol{v}] = J[\boldsymbol{u}_n] - 2\lambda J[\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}] + \lambda^2 J[\boldsymbol{v}] ,$$

avendo posto

$$J[\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}] = \iint_D \left(\boldsymbol{A} \frac{\partial \boldsymbol{u}_n}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + \boldsymbol{B} \frac{\partial \boldsymbol{u}_n}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + \boldsymbol{B} \frac{\partial \boldsymbol{u}_n}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + \boldsymbol{C} \frac{\partial \boldsymbol{u}_n}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + \boldsymbol{N} \boldsymbol{u}_n \times \boldsymbol{v} \right) dx dy \, .$$

Il minimo della differenza

$$J[\boldsymbol{u}_n - \lambda \boldsymbol{v}] - J[\boldsymbol{u}_n] = -2\lambda J[\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}] + \lambda^2 J[\boldsymbol{v}]$$

è raggiunto per

$$\lambda = \frac{J[\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}]}{J[\boldsymbol{v}]}$$

ed è eguale a

$$- \frac{(J[\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}])^2}{J[\boldsymbol{v}]} \, .$$

Ne scende che

$$(J[\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}])^2 < \varepsilon J[\boldsymbol{v}]$$

qualunque sia $\boldsymbol{v}$ non appena n è abbastanza grande, e quindi

$$\lim_{n \to \infty} J[\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}] = 0 \, .$$

Poichè $\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_m$ è una variazione vettoriale ammissibile, ed è

$$J[\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_m] = J[\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_m] - J[\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_m] \, ,$$

segue

$$\lim_{n, m \to \infty} J[\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_m] = 0 \, . \tag{8}$$

Pertanto le successioni $\{\boldsymbol{u}_n\}$, $\left\{\frac{\partial \boldsymbol{u}_n}{\partial x}\right\}$ e $\left\{\frac{\partial \boldsymbol{u}_n}{\partial y}\right\}$ convergono in media a tre vettori $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{u}''$ e $\boldsymbol{u}'''$ (con le norme di quadrato sommabile su D).

Sia ora $\boldsymbol{v}$ un vettore identicamente nullo all'esterno di un cerchio $\mathfrak{D}$ interno a D e dotato delle derivate continue fino a quelle di un ordine abbastanza elevato. Dalle relazioni

$$\iint_D \boldsymbol{A} \frac{\partial \boldsymbol{u}_n}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} dx dy = - \iint_D \frac{\partial}{\partial x} \left(\boldsymbol{A} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} \right) \times \boldsymbol{u}_n dx dy$$

e simili, si trae

$$J[\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}] = -\iint_{\mathfrak{D}} \mathfrak{L}[\boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{u}_n dxdy$$

e quindi, in base alla diseguaglianza di SCHWARZ,

$$\iint_{\mathfrak{D}} \mathfrak{L}[\boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{u}' dxdy = 0 .$$

Scegliendo per vettori $\boldsymbol{v}$ le colonne della matrice $\boldsymbol{V}_\mu$ definita dalla (4), si ha allora, in base alla proposizione ricordata in fine al n. II, che $\boldsymbol{u}'$ differisce solo al più nei punti di un insieme di misura nulla da una soluzione $\boldsymbol{u}_0$ *di* $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = 0$, regolare in $D - \mathfrak{F}D$.

Dimostriamo ora che quasi-dappertutto è

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial x} = \boldsymbol{u}'' \quad , \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial y} = \boldsymbol{u}'''.$$

Poniamo $\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{v}_n$; la $\{\boldsymbol{v}_n\}$ converge in media allo zero. Indichiamo con T un quadrato interno a D; effettuando eventualmente un cambiamento di variabili possiamo supporre che esso sia il quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$; consideriamo il dominio $\overline{T}$: $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Si ha evidentemente

$$\lim_{u \to \infty} \iiint_{\overline{T}} | \boldsymbol{v}_n(b, y) - \boldsymbol{v}_n(a, y)|^2 dadbdy = 0 . \tag{9}$$

Ora è

$$\boldsymbol{v}_n(b, y) - \boldsymbol{v}_n(a, y) = \int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{v}_n}{\partial x} dx$$

e, detto $\boldsymbol{w}$ il vettore cui converge in media $\left\{ \frac{\partial \boldsymbol{v}_n}{\partial x} \right\}$,

$$\lim_{n \to \infty} \iint_T \left| \frac{\partial \boldsymbol{v}_n}{\partial x} - \boldsymbol{w} \right|^2 dxdy = 0 .$$

Ma

$$\iiint_{\bar{T}} \left(\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{v}_n}{\partial x} dx - \int_a^b \boldsymbol{w} dx \right)^2 dadbdy \leq$$

$$\leq \iiint_{\bar{T}} \left[(b-a) \int_a^b \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_n}{\partial x} - \boldsymbol{w} \right)^2 dx \right] dadbdy \,,$$

applicando la diseguaglianza di SCHWARZ,

$$= \iint_T \left| \frac{\partial \boldsymbol{v}_n}{\partial x} - \boldsymbol{w} \right|^2 (x - x^2) dxdy < \iint_T \left| \frac{\partial \boldsymbol{v}_n}{\partial x} - \boldsymbol{w} \right|^2 dxdy \,,$$

tenendo presente che

$$\int_0^1 \int_0^1 (b-a) \left(\int_a^b f(x) dx \right) dadb = \int_0^1 (x - x^2) f(x) dx \,.$$

Pertanto se $|\boldsymbol{w}|$ fosse $\neq 0$ su un insieme di misura positiva, altrettanto avverrebbe della funzione $\int_a^b \boldsymbol{w} dx$, mentre la funzione $\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{v}_n}{\partial x} dx$ tende in media alla precedente e tende in media allo zero in base alla (9).

Si ha così intanto che la $\{\boldsymbol{u}_n\}$ converge in media a un vettore che in $D - \mathfrak{F}D$ è soluzione regolare di $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = 0$ e che ha le derivate con le norme di quadrato sommabile.

Resta da provare che

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathfrak{C}(t)} | \boldsymbol{u}_0 - \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathfrak{F}D} |^2 d\sigma = 0 \,.$$

Allo scopo consideriamo una porzione della $\mathfrak{F}D$; possiamo supporre che essa sia un segmento appartenente alla retta $x = 0$; a questo caso ci si può ricondurre usando un opportuno sistema di coordinate curvilinee. Sia $p \leq y \leq q$, $x = 0$ tale segmento. Consideriamo il segmento $p \leq y \leq q$, $x = \delta$, che per δ abbastanza piccolo supponiamo interno a D. Fissiamo un η tale che $0 < \eta < \delta$ e chiamiamo T il rettangolo $p \leq y \leq q$, $\delta - \eta \leq x \leq \delta + \eta$. Tenendo presente che

$$\iint_D \left(|\boldsymbol{u}_n|^2 + \left| \frac{\partial \boldsymbol{u}_n}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \boldsymbol{u}_n}{\partial y} \right|^2 \right) dxdy < A$$

qualunque sia n e per una certa costante A, appoggiandoci alla seconda delle formole (3) si ha

$$\frac{1}{\eta} \iint_T |\boldsymbol{u}_n - \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathfrak{F}D}|^2 \, dxdy \leq k\delta$$

per una certa costante k; perciò

$$\frac{1}{\eta} \iint_T |\boldsymbol{u}_0 - \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathfrak{F}D}|^2 \, dxdy \leq \frac{2}{\eta} \iint_T |\boldsymbol{u}_n - \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathfrak{F}D}|^2 \, dxdy +$$

$$+ \frac{2}{\eta} \iint_T |\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_n|^2 \, dxdy \leq \frac{2}{\eta} \iint_T |\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_n|^2 \, dxdy + 2k\delta .$$

Ma $\{\boldsymbol{u}_n\}$ converge in media ad $\boldsymbol{u}_0$; perciò

$$\frac{1}{\eta} \iint_T |\boldsymbol{u}_0 - \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathfrak{F}D}|^2 \, dxdy \leq 2k\delta$$

e, passando al limite per $\eta \rightarrow 0$, si ha

$$\int_p^q |\boldsymbol{u}_0(\delta, y) - \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathfrak{F}D}|^2 \, dy \leq 2k\delta,$$

da cui l'asserto.

Ricordiamo ora una proposizione dovuta a G. FICHERA [8]. Se $f(x, y)$ è una funzione che in $D - \mathfrak{F}D$ ha le derivate prime continue e sommabili su D, fissato quasi-dappertutto su $\mathfrak{F}D$ il punto (ξ, η), esiste il $\lim\limits_{\substack{(x,y) \rightarrow (\xi,\eta) \\ \text{su } n}} f(x, y)$, indicando con n la normale in (ξ, η) alla $\mathfrak{F}D$.

---

[8]) G. FICHERA, *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, Annali Scuola Normale Sup. Pisa, 3, IV (1950), teorema XXXII.

Detto allora $\boldsymbol{u}^*$ il vettore limite su $\mathfrak{F}D$ di $\boldsymbol{u}_0$, avendosi

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathfrak{C}(t)} | \boldsymbol{u}_0 - \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathfrak{F}D} |^2 \, d\sigma = \lim_{t \to 0} \int_{\mathfrak{C}(t)} | \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}^* |^2 \, d\sigma = 0$$

segue che

$$\int_{\mathfrak{F}D} | \bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}^* |^2 ds = 0$$

e quindi quasi-dappertutto

$$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathfrak{F}D} \equiv \boldsymbol{u}^* .$$