RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Spazi affini immersi in uno spazio proiettivo sopra un corpo qualsiasi e questioni di ampliamento

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 123-141

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__123_0>

SPAZI AFFINI IMMERSI IN UNO SPAZIO PROIETTIVO SOPRA UN CORPO QUALSIASI E QUESTIONI DI AMPLIAMENTO

Nota (*) *di* Domenico Boccioni (*a Padova*)

Nel § 1, dopo alcuni preliminari, si dimostra, nell'ipotesi che il corpo base K non sia commutativo, la non unicità dello spazio affine relativo ad un dato iperpiano di uno spazio proiettivo S_n.

Si dà pure esplicito rilievo, nella stessa ipotesi, alla non unicità sia del sistema di coordinate proiettive in S_n di dati punti fondamentali ed unità, sia della proiettività di S_n in cui si corrispondano $n+2$ coppie assegnate di elementi.

Vengono così messe in luce tre diverse caratterizzazioni geometriche della commutatività del corpo base (le ultime due delle quali eran già note per un S_1).

Nel § 2 vengono risolte alcune questioni relative all'ampliamento di S_n ad un S_n^* sopra un qualsiasi corpo $K^* \supset K$.

Precisamente, nella prima parte del paragrafo, si mostra fra l'altro con un esempio come un noto teorema, concernente la possibilità di rappresentare una proettività dell'S_n complesso mediante equazioni a coefficienti reali, non sia estendibile al caso attuale.

Dopo aver ottenuto alcuni altri risultati, si considera infine il problema se il gruppo delle trasformazioni proiettive dello spazio numerico sopra K sia immergibile o meno in quello sopra K^*, e si danno alcune condizioni per immergibilità di tipo particolare.

(*) Pervenuta in redazione il 5 febbraio 1955.

§ 1

1. - Consideriamo uno *spazio proiettivo destro di dimensione n sopra un corpo K* qualsiasi, anche non commutativo (v. definizione in [3] [1]), p. 178). Tale spazio viene qui indicato con $P_n^r(K)$, oppure anche più semplicemente con S_n quando, come in tutto questo § 1, non vi siano mutamenti del corpo base K (la referenza al quale può perciò essere sottintesa).

Non sarà male rilevare esplicitamente (poichè ne avremo bisogno in seguito) che, secondo la definizione richiamata, un $S_n = P_n^r(K)$ si identifica con la coppia di enti: « insieme S dei suoi *punti* » (il quale potrà anche chiamarsi il suo *sostegno*) e « classe $\mathcal{C}$ dei suoi *sistemi ammissibili di coordinate* (*proiettive*) », alla stessa guisa che, ad es., un gruppoide ([7], p. 117, oppure [8], p. 8) non è altro che la coppia costituita dall'insieme dei suoi elementi e dalla operazione binaria in esso definita.

Ora è evidente che esistano gruppoidi aventi gli stessi elementi ma dotati di operazioni distinte, quindi distinti (anzi si potrebbe assai facilmente dare un esempio di due gruppoidi aventi gli stessi elementi ma addirittura non isomorfi). Analogamente possono esistere, come ci si può convincere con semplici esempi (cfr. ad es. [11], p. 36), spazi proiettivi S_n che sono distinti pur avendo lo stesso sostegno S, in quanto dotati di distinte classi $\mathcal{C}$.

Il prototipo, per dir così, di $P_n^r(K)$ è naturalmente quello avente come sostegno lo *spazio proiettivo numerico destro* $PN_n^r(K)$ (cfr. [3], p. 176) e come rappresentante della classe $\mathcal{C}$ l'identità (cfr. [6], seconda *remark* a p. 17).

2. - Le matrici *regolari* (cioè quelle, A, per cui esiste l'inversa A^{-1}) *di tipo* $(n+1, n+1)$ (ossia con $n+1$ righe ed $n+1$ colonne) sopra il corpo K formano evidentemente, rispetto alla moltiplicazione, un gruppo $\mathfrak{M}$.

[1]) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

Per indicare che la *trasformazione proiettiva* T di $PN_n^r(K)$ ha equazioni $y = Ax$ (cfr. [3], p. 177), dove $A \in \mathfrak{M}$ ed x, y denotano le matrici $(\xi_0\ \xi_1\ \dots\ \xi_n)_{-1}$, $(\eta_0\ \eta_1\ \dots\ \eta_n)_{-1}$ di tipo $(n+1,\ 1)$, scriveremo: $T)\ y = Ax$. Pensando allora di indicare il « prodotto operatorio di T_1 per T_2 » con T_2T_1 e di chiamarlo il « prodotto di T_2 per T_1 », è chiaro che la corrispondenza

$$A \rightarrow T)\ y = Ax \tag{1}$$

è un omomorfismo e quindi che le trasformazioni proiettive di $PN_n^r(K)$ costituiscono un gruppo $\mathfrak{T}$ (immagine omomorfa di $\mathfrak{M}$).

Se A appartiene al sottogruppo normale $\mathfrak{N}$ cui in (1) corrisponde l'identità $U)\ y = Ix$ ($I = I_{n+1}$ matrice identica), si vede immediatamente che A è una *matrice scalare*:

$$A = \lambda I = I\lambda$$

con $0 \neq \lambda \in K$, bastando osservare che alle $(n+1)$-ple $(1, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, \dots, 0, 1)$, $(1, \dots, 1)$ devono rispettivamente corrispondere le $(\rho_0, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, \dots, 0, \rho_n)$, $(\lambda, \dots, \lambda)$, $(\rho_0, \dots, \rho_n, \lambda \in K)$. Si vede inoltre facilmente che l'elemento λ, che figura nella diagonale principale di questa matrice scalare è permutabile con tutti gli elementi di K, cioè che λ appartiene al *centro* ([8], p. 42) di K. Infatti λ gode della proprietà: esiste un $\mu \in K$ tale che

$$\lambda\xi = \xi\mu \qquad \text{per ogni } \xi \in K, \tag{2}$$

ciò risultando dal fatto che, la $y = \lambda Ix$ dando per ipotesi l'identità, deve esistere un μ tale che $\lambda\xi_i = \xi_i\mu$ ($i = 0, 1, \dots, n$) in corrispondenza ad ogni $(n+1)$-pla $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$; tenendo fisso ad es. ξ_0, supposto $\neq 0$, e facendo variare $\xi_1, \dots, \xi_n$ si ha appunto la (2) (con $\mu = \xi_0^{-1}\lambda\xi_0$), donde, posto $\xi = 1$, risulta $\lambda = \mu$, cioè l'asserto.

Abbiamo così il

LEMMA: Affinchè le equazioni $y = Ax$ rappresentino la identità è necessario e sufficiente che A sia una matrice scalare λI, con λ non nullo *e appartenente al centro di* K.

Ricordando note proprietà dell'omomorfismo (1), risulta che le matrici A e B hanno lo stesso corrispondente se e soltante se $AB^{-1} \in \mathfrak{N}$, cioè si ha il

Teorema: Affinchè $y = Ax$, $y = Bx$ rappresentino la medesima trasformazione proiettiva di $PN_n^r(K)$ è necessario e sufficiente che sia $B = \lambda A$, con λ non nullo *e appartenente al centro di K*. (Per il caso commutativo, cfr. ad es. [9], *Zusatz* a p. 14).

3. -E' noto (cfr. [8], fine p. 86) che in uno *spazio lineare* ([3], p. 183) S_p di $P_n^r(K) = S_n$ $(p = 1, \dots, n)$ esiste sempre *qualche* sistema ammissibile di coordinate del quale si assegnino comunque in S_p i $p+1$ punti fondamentali e il punto unità, soggetti, questi punti, alla sola condizione che $p+1$ qualsiasi di essi siano indipendenti.

Ebbene, dal lemma dimostrato al n. 2 discende immediatamente che *tale sistema è unico se e soltanto se il corpo K è commutativo*. (Cfr., per un S_1, [8], p. 96).

Infatti se $\{\lambda_i\}$ è un sistema ammissibile avente i dati punti fondamentali ed unità, il nuovo sistema ammissibile $\{\mu_i\}$ dedotto da questo mediante la trasformazione proiettiva di $PN_p^r(K)$ di equazioni

$$\mu_i = \rho\lambda_i \qquad (i = 0, 1, \dots, p),$$

con $\rho \in K \dot{-} H$ (H denotando il centro del corpo K, supposto dunque non commutativo), possiede evidentemente gli stessi punti fondamentali ed unità, ma è certamente distinto da $\{\lambda_i\}$. D'altra parte è ben noto che, se K è commutativo, due sistemi ammissibili aventi la dichiarata proprietà necessariamente coincidono.

Assegnate in S_n due $(n+2)$-ple di punti $P_0, P_1, \dots, P_n, Q$ e $P'_0, P'_1, \dots, P'_n, Q'$, in ciascuna delle quali $n+1$ punti qualsiasi siano indipendenti, è chiara l'esistenza di una collineazione (cfr. [3], p. 327), non singolare, in cui esse ordinatamente si corrispondono.

Una conseguenza, pure immediata, del teor. del n.° 2 è che *tale collineazione è unica se e soltanto se il corpo K è commutativo.* (Cfr., per un S_1, [3], th.s I a p. 275, 205).

Infatti, consideriamo in S_n due sistemi ammissibili di coordinate $\mathfrak{S}\{x\}$, $\mathfrak{S}'\{y\}$ aventi rispettivamente come punti fondamentali ed unità quelli delle due $(n+2)$-ple assegnate. Se K non è commutativo, le due collineazioni di equazioni $y = Ix$, $y = \rho Ix$, con $\rho \in K \dot{-} H$, mutano ordinatamente entrambe la prima $(n+2)$-pla nella seconda, ma sono certamente distinte. Il viceversa è ben noto (cfr. ad es. [9], p. 14).

4. - K essendo sempre un corpo qualsiasi (anche non commutativo), definiamo come *spazio affine numerico destro di dimensione n sopra K*, e lo indichiamo con $AN_n^r(K)$, l'insieme di tutti gli n-vettori destri sopra K ([3], p. 48).

Se $b = (\beta_1 \dots \beta_n)_{-1}$ ed $A = (\alpha_{rs})$ sono risp. una matrice di tipo $(n, 1)$ ed una matrice regolare di tipo (n, n) sopra K, le equazioni $y' = Ax' + b$ (x', y' matrici di tipo $(n, 1)$) determinano una *trasformazione affine* T di $AN_n^r(K)$ (in sè). Scriveremo (cfr. n.° 2):

(3) $$T)\ y' = Ax' + b.$$

La regolarità della matrice A assicura la biunivocità della corrispondenza T, la cui *inversa* è appunto:

$$T^{-1})\ y' = A^{-1}x' - A^{-1}b.$$

Il *prodotto* della $T_1)$ $y' = Bx' + c$ per la T si definirà (cfr. n.° 2) come il prodotto operatorio di T per T_1:

$$T_1T)\ y' = BAx' + (Bb + c).$$

Dunque le trasformazioni affini di $AN_n^r(K)$ formano un *gruppo*.

Si vede immediatamente (sfruttando le n-ple $(0, \dots, 0)$, $(1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, \dots, 0, 1)$) che affinchè $y' = Ax' + b$, $y' = Bx' + c$ rappresentino la medesima trasformazione affine è necessario e sufficiente che sia $A = B$, $b = c$.

Se S è un insieme avente la stessa potenza di $AN_n^r(K)$, è chiaro allora come, ponendo fra questi due insiemi una corrispondenza biunivoca, si possa definire, in perfetta analogia con quanto richiamato al n.° 1 (cfr. [4], p. 85 e [11], p. 45), uno *spazio affine destro di dimensione n sopra K*, che verrà indicato con $A_n^r(K)$. Nascono così i concetti di *punto* (elemento del *sostegno* S), di *coordinate* $\xi'_1, \dots, \xi'_n$, e di *sistemi ammissibili di coordinate* (*affini*), le coordinate ξ'_i, η'_i di uno stesso punto in due sistemi ammissibili essendo legate da equazioni del tipo (3).

Naturalmente, anche nel caso attuale, si possono fare considerazioni del tutto analoghe a quelle del n.° 1.

5. - E' ben noto come (cfr [4], p. 83 e [11], p. 44), fissato in un $S_n = P_n^r(K)$ un qualsiasi iperpiano Π quale *iperpiano all'infinito*, si possa definire uno spazio affine di sostegno $S_n \dot{-} \Pi$ (il segno $\dot{-}$ avendo il significato della teoria degli insiemi, S_n e Π denotano qui naturalmente i sostegni di questi due spazi). Il classico procedimento usato porta, se K è commutativo, a determinare *univocamente* tale spazio affine.

Invece, come ora mostreremo, *se K non è commutativo, lo stesso procedimento non individua più l'$A_n^r(K)$ di sostegno* $S_n \dot{-} \Pi$, in quanto esistono sempre almeno due spazi affini distinti costruibili in tal modo. (Cfr. la fine del n.° 4.)

Premettiamo la seguente osservazione di immediata verifica: Affinchè un dato iperpiano Π di S_n abbia equazione $\xi_0 = 0$ in un sistema ammissibile di coordinate (proiettive) $\mathfrak{S}\{x\}$ è necessario e sufficiente che gli n punti fondamentali $Q^1, \dots, Q^n$ del sistema $\mathfrak{S}$ (escluso cioè quello di coordinate 1, 0, ..., 0) appartengano a Π.

Indicheremo allora con $\mathfrak{S}_\pi$ ogni sistema ammissibile di coordinate proiettive in S_n i cui punti fondamentali $Q^1, \dots, Q^n$ appartengono a Π.

Posto

$$A_n = S_n \dot{-} \Pi,$$

siano $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ le coordinate di un qualsiasi punto $P \in A_n$ in un sistema ammissibile $\mathfrak{S}_\pi\{x\}$ *di* S_n (dunque $\xi_0 \neq 0$). P individua evidentemente gli n elementi di K:

$$\xi'_1 = \xi_1\xi_0^{-1}, \dots, \xi'_n = \xi_n\xi_0^{-1}, \tag{4}$$

che diconsi (cfr. [8], p. 94) sue *coordinate non omogenee* (destre). E' chiaro che, viceversa, dati $\xi'_1, \dots, \xi'_n \in K$, questi individuano in A_n un punto che li ammette come coordinate non omogenee (precisamente quello avente in $\mathfrak{S}_\pi$ le coordinate $1, \xi'_1, \dots, \xi'_n$). Le coordinte non omogenee (4) (la cui n-pla si consideri come un n-vettore destro) possono dunque assumersi (n.° 4) come coordinate affini del punto P in A_n, restando così definito un $A^r(K)$ di sostegno A

Siccome nella definizione di questo $A^r_n(K)$ si sfrutta il sistema ammissibile $\mathfrak{S}_\pi$ di S_n, non si può dire, senza ulteriore indagine, se tale definizione ne sia o meno indipendente.

Eseguiamo allora in questo $A^r_n(K)$ una trasformazione ammissibile di coordinate affini $y' = b + Bx'$ (n.° 4). Posto $\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & B \end{pmatrix}$, questa matrice, di tipo $(n+1, n+1)$, è evidentemente regolare, quindi la trasformazione di coordinate proiettive $y = \bar{B}x$ è una trasformazione ammissibile in S_n. Nel nuovo sistema $\mathfrak{S}' \{y\}$, Π ha ancora equazione $\eta_0 = 0$, cioè $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}'_\pi$, e si ha $\eta_1\eta_0^{-1} = \eta'_1 . \dots , \eta_n\eta_0^{-1} = \eta'_n$ con $(\eta'_1, \dots, \eta'_n)_{-1} = y'$.

Siano, viceversa, $\zeta'_1 = \zeta_1\zeta_0^{-1}, \dots, \zeta'_n = \zeta_n\zeta_0^{-1}$ coordinate non omogenee definite in A_n, come fatto sopra per le ξ'_i, a partire da un certo sistema ammissibile $\mathfrak{S}_\pi \{z\}$ di S_n. Il passaggio da $\mathfrak{S}_\pi$ ad $\mathfrak{S}^*_\pi$ si effettuerà mediante equazioni $z = \bar{A}x$, con $\bar{A}$ matrice regolare di tipo $(n+1, n+1)$ tale che (posto $\bar{A} = (\alpha_{rs})$, $a = (\alpha_{10} \dots \alpha_{n0})_{-1}$):

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & 0 \\ a & A \end{pmatrix},$$

dove A è una matrice regolare di tipo (n, n). (Basta infatti osservare che, mettendo al posto di x nella $z = \bar{A}x$ le coordinate nel sistema $\mathfrak{S}^\pi$ dei punti fondamentali $Q^1, \dots, Q^n$ di $\mathfrak{S}_\pi$, si deve sempre ottenere $\zeta_0 = 0$). Distinguiamo allora due casi.

Se α_{00} appartiene al centro di K, dalla $z = \bar{A}x$ si deduce $z' = a' + A'x'$ con $A' = A\alpha_{00}^{-1}$, $a' = a\alpha_{0}^{-1}$ (cfr. [4], p. 84).

Se invece α_{00} non appartiene al centro di K, e il passagggio dal sistema di coordinate non omogene $\{x'\}$ di A_n a quello $\{z'\}$

potesse effettuarsi mediante la $z' = c + Cx'$ (con C regolare di tipo (n, n)), la $u = \bar{C}x$ con $\bar{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & C \end{pmatrix}$ definirebbe, a partire da $\mathfrak{S}_\pi$, un certo sistema ammissibile $\mathfrak{S}''_\pi\{u\}$ tale che le coordinate proiettive u dei punti di $A_n (= S_n \dot{-} \Pi)$ son pure coordinate z degli stessi. Mediante le formule di trasformazione $u = \bar{D}z$ fra $\mathfrak{S}_\pi$ ed $\mathfrak{S}''_\pi$, alle $(n+1)$-ple $(1, 0, \ldots, 0)$, $(1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (1, 0, \ldots, 0, 1)$ dovrebbero quindi corrispondere risp. $(\lambda_0, 0, \ldots, 0)$, $(\lambda_1, \lambda_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (\lambda_n, 0, \ldots, 0, \lambda_n)$, con $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ elementi non nulli di K. D'altra parte (cfr. qui sopra) dovrebbe essere $\bar{D} = \begin{pmatrix} \delta_{00} & 0 \\ d & D \end{pmatrix}$ con D regolare di tipo (n, n) (e, naturalmente, $\delta_{00} \neq 0$). Ne seguirebbe che $\bar{D} = \delta_{00} I$ con I matrice identica, ossia che $\bar{D}$ è una matrice scalare. Ma allora lo stesso ragionamento fatto nella dimostrazione del lemma al n.° 2 porterebbe a concludere che δ_{00} appartiene al centro di K, e quindi si avrebbe $\mathfrak{S}''_\pi\{u\} = \mathfrak{S}^\bullet_\pi\{z\}$. Di qui verrebbe che $z = \bar{A}x$ ed $u = \bar{C}x$ rappresentano la medesima trasformazione proiettiva in $PN^r_n(K)$, quindi dovrebbe essere (per il teor. del n.° 2) $\bar{A} = \nu\bar{C}$ con ν non nullo e appartenente al centro di K, cioè dovrebbe essere $\alpha_{00} = \nu$ elemento del centro di K, contro l'ipotesi. Possiamo dunque concludere enunciando il seguente

Lemma: Condizione necessaria e sufficiente affinchè due sistemi ammissibili di coordinate proiettive $\mathfrak{S}_\pi\{x\}$, $\mathfrak{S}^\bullet_\pi\{z\}$ di $S_n = P^r_n(K)$, legati dalle formule di trasformazione $z = \bar{A}x$ con $\bar{A} = (\alpha_{rs})$, dian luogo, mediante le (4), al medesimo $A^r_n(K)$ di sostegno $S_n \dot{-} \Pi$ è che α_{00} appartenga al centro di K.

Di qui segue immediatamente il

Teorema: *Se il corpo K non è commutativo, si possono trovare almeno due sistemi ammissibili di coordinate proiettive $\mathfrak{S}_\pi$, $\mathfrak{S}^\bullet_\pi$ in $S_n = P^r_n(K)$ che dian luogo, mediante la definizione di coordinate affini espressa dalle* (4), *a due $A^r_n(K)$ di sostegno $S_n \dot{-} \Pi$ fra di loro distinti.*

Infatti, se α_{00} è un qualunque elemento di $K \dot{-} H$ (H centro di K), per ogni $\mathfrak{S}_\pi$ in S_n, un tale $\mathfrak{S}^\bullet_\pi$ è quello definito, a partire da S_π dalle equazioni $z = \bar{A}x$ con $\bar{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & 0 \\ a & A \end{pmatrix}$ dove a ed A sono risp. una matrice di tipo $(n, 1)$ ed una matrice regolare di tipo (n, n) qualsiasi sopra K.

In definitiva possiamo dire che *lo spazio affine relativo ad un dato iperpiano di* $S_n = P_n^r(K)$ *è unico se e soltanto se il corpo* K *è commutativo.*

§ 2

6. - Se K^* è un sopracorpo proprio di K:

$$K \subset K^*, \tag{5}$$

possiamo dire che lo spazio numerico $PN_n^r(K^*)$ è una *estensione* di $PN_n^r(K)$ (cfr. [3], p. 178), e scriveremo:

$$PN_n^r(K) \subset PN_n^r(K^*). \tag{6}$$

Questa affermazione (e quindi la scrittura (6)) va però opportunamente interpretata, e precisamente nel senso che $PN_n^r(K)$ è *equivalente* (nel senso della teoria degli insiemi) ad un sottinsieme (proprio) di $PN_n^r(K^*)$.

Si riconosce infatti subito l'esistenza di questo sottinsieme. Posto abbreviatamente

$$(\alpha_i^*) = (\alpha_0^*,\ \alpha_1^*, \dots,\ \alpha_n^*) \qquad (\alpha_i^* \in K^*),$$

esso è costituito da tutti i punti di $PN_n^r(K^*)$ (denotandosi qui con *punto* — cfr. [3], pag. 176 — una classe $[(\alpha_i^*)]$ di $(n+1)$-ple (α_i^*) *proporzionali a destra sopra* K^*) del tipo

$$[(\alpha_i\lambda^*)], \tag{7}$$

rappresentabili cioè mediante una $(n+1)$-pla (α_i) di elementi di K. (Che poi questo sottinsieme sia proprio, discende dall'ipotesi (5), osservando ad es. che, se $\mu^* \in K^* \dot{-} K$, la $(n+1)$-pla $(1, \mu^*, \dots, \mu^*)$ non è proporzionale a destra ad alcuna (α_i) con $\alpha_i \in K$.)

Poichè la classe $[(\alpha_i\lambda^*)]$ è (sempre per l'ip. (5)) effettivamente più ampia della $[(\alpha_i\lambda)]$, l'insieme $PN_n^r(K^*)$ non contiene affatto l'insieme $PN_r^n(K)$. *Identificando* però, come faremo nel seguito (cfr. [2], p. 260, a)), ciascun punto $[(\alpha_i)]$ di $PN_n^r(K)$ con la sua immagine (7) nell'equivalenza suddetta, l'affermazione all'inizio di questo n.° e la scrittura (6) acquistano il significato usuale.

E' chiaro allora ([3], p. 179) come da un $P_n^r(K)$ di sostegno S (n°. 1) possa dedursi un $P_n^r(K^*)$, di sostegno $S^* \supset S$, in modo che la corrispondenza biunivoca fra S^* e $PN_n^r(K^*)$ *definente* $P_n^r(K^*)$ subordini fra S e $PN_n^r(K)$ quella definente $P_n^r(K)$. Ogni $P_n^r(K^*)$ ottenuto in tal modo si dirà un *ampliamento* (o un'estensione) *di* $P_n^r(K)$ *corrispondente all'estensione di* K *a* K^* (ed allo stesso modo si indicherà l'operazione di passaggio da $P_n^r(K)$ a $P_n^r(K^*)$.

Questo ampliamento si traduce dunque in un ampliamento (nel senso della teoria degli insiemi) sia del sostegno S, sia della classe $[(\alpha_i)]$ delle coordinate spettanti a ciascun elemento di S (punto di $P_n^r(K)$), sia infine della classe $\mathfrak{C}$ dei sistemi di coordinate ammissibili in $P_n^r(K)$ (n.° 1).

Si osservi che, se K^* non è commutativo, non si può escludere a priori, come risulterà dal seguito (n.° 8), che fra i sistemi di coordinate subordinati in S dai sistemi ammissibili dello spazio ampliato $P_n^r(K^*)$ ve ne siano alcuni *sopra* K (cfr. n.° 8) ma non ammissibili in $P_n^r(K)$, cioè non appartenenti a $\mathfrak{C}$.

Se invece K^* è commutativo, la classe $\mathfrak{C}$ non subisce (com'è noto) alcun ampliamento « sopra K ».

7. - Sia $P_n^r(K^*)$ un ampliamento di uno spazio $P_n^r(K)$, corrispondente all'estensione di K ad un corpo K^* qualsiasi.

Da un noto teorema sulle equazioni lineari, sopra un corpo anche non commutativo ([10], p. 117), risulta immediatamente (appena si riferisca $P_n^r(K^*)$ al sistema coordinato ammissibile definente di cui al n.° preced.) che:

Punti di $P_n^r(K)$ sono (linearmente) dipendenti in $P_n^r(K^*)$ se e soltanto se essi sono tali in $P_n^r(K)$. (Quindi il rango di una matrice sopra K coincide col rango della stessa, considerata come matrice sopra K^*.)

Osservato ciò, consideriamo ora lo spazio numerico $PN_n^r(K^*)$. E' chiaro (cfr. [3], p. 178) che ogni trasformazione proiettiva di questo spazio che sia rappresentabile con equazioni coi coefficienti in K:

$$y^* = Ax^*, \tag{8}$$

con A matrice sopra K, muta ogni punto di $PN_n^r(K)$ in un punto di $PN_n^r(K)$, cioè trasforma $PN_n^r(K)$ *in* sè stesso. (Anzi è evidente che le (8) trasformano addirittura $PN_n^r(K)$ *su* sè stesso.)

Ci chiediamo adesso, viceversa: Una trasformazione proiettiva T^* di $PN_n^r(K^*)$:

$$T^*)\ y^* = A^*x^*$$

(cfr. n.° 2) che trasformi $PN_n^r(K)$ in sè stesso è rappresentabile con equazioni del tipo (8), cioè (n.° 2, teor.) esistono una matrice A sopra K e un λ^* appartenente al centro di K^* tali che $A^* = \lambda^* A$? La risposta è (notoriamente) sì se K^* è commutativo, (in generale) no se K^* non è commutativo.

Consideriamo infatti per un momento $PN_n^r(K^*)$ come un $P_n^r(K^*)$, fissando in esso l'identità come sistema coordinato ammissibile (definente) $\mathfrak{S}^*$ (cfr. i n.i 1, 6). Esso si presenta allora come un ampliamento del $P_n^r(K)$ di sostegno $PN_n^r(K)$. Per i ipotesi T^* porta i punti $A^0(1, 0, \dots, 0), \dots, A^n(0, \dots, 0, 1)$, $V(1, 1, \dots, 1)$ di $P_n^r(K)$ in certi punti $B^0(\beta_i^0\mu_0^*), \dots, B^n(\beta_i^n\mu_n^*)$, $W(\gamma_i\mu^*)$ ancora di $P_n^r(K)$ ($\beta_i^0, \dots, \beta_i^n$, $\gamma_i \in K$).

Ora si può facilmente verificare che ogni sostituzione lineare omogenea (sinistra) $y^* = A^*x^*$, con A^* matrice regolare di tipo $(n+1,\ n+1)$ sopra un qualsiasi corpo K^* muta $(n+1)$-vettori destri sopra K^* linearmente dipendenti (indipendenti) sopra K^* in $(n+1)$-vettori destri ancora dipendenti (risp. indipendenti). (Ciò è sostanzialmente dimostrato in [3], ult. capov. di p. 180.)

Gli $n+2$ punti $A^0, \dots, A^n$, V essendo manifestamente ad $n+1$ ad $n+1$ indipendenti, ne viene che tali saran pure i loro trasformati $B^0, \dots, B^n$, W mediante T^*, anche se considerati (v. il 3° capov. di questo n.°) come punti di $P_n^r(K)$. Ma allora (n.° 3) esiste in $P_n^r(K)$ un sistema coordinato ammissibile $\mathfrak{S}$ in cui $B^0, \dots, B^n$, W hanno risp. coordinate $(1, 0, \dots, 0), \dots$, $(0, 0, \dots, 1)$, $(1, 1, \dots, 1)$. Se allora $y = A^{-1}\bar{y}$ (dove A è matrice regolare sopra K) sono le formule di trasformazione fra il sistema (definente, identico) $\bar{\mathfrak{S}}$ ed $\mathfrak{S}$, è chiaro che le equazioni

$$y^* = Ax^*$$

determinano in $PN_n^r(K^*)$ una trasformazione proiettiva T_1^* che muta pure (come la T^*) i punti $A^0, \dots, A^n, V$ risp. nei punti $B^0, \dots, B^n, W$ di $PN_n^r(K)$. Ma allora le equazioni $y^* = A^{-1}A^*x^*$ mutano $A^0, \dots, A^n, V$ in sè stessi, donde (cfr. la dimostrazione del lemma al n.° 2) segue $A^{-1}A^* = I\lambda^*$ $(0 \neq \lambda^*\ K^*)$, quindi

$$A^* = A\lambda^*. \tag{9}$$

Ora, se K^* è commutativo, la (9) ci dice (n.° 2) che $T^* = T_1^*$, come affermato.

Se invece K^* non è commutativo, può accadere che λ^* non appartenga al centro di K^*, onde non si può concludere che $T^* = T_1^*$. Daremo ora un *esempio di una trasformazione proiettiva di $PN_n^r(K^*)$ che trasforma $PN_n^r(K)$ in sè stesso, ma non è rappresentabile con equazioni del tipo* (8). Basta infatti assumere come corpo K^* quello Q dei quaternioni sopra il corpo reale R ([3], p. 40). Q è notoriamente una estensione non commutativa di R.

Premettiamo alcune osservazioni relative al caso generale. Se $\rho^* \in K^* \dot{-} K$ ed è permutabile con tutti gli elementi di K ma non con tutti quelli di K^*, la trasformazione proiettiva

$$T_2^*)\ y^* = \rho^* I x^* \tag{10}$$

subordina evidentemnte in $PN_n^r(K)$ l'identità. (Viceversa, se $T^*)\ y^* = A^*x^*$ subordinasse in $PN_n^r(K)$ l'identità, si vedrebbe facilmente, con dimostrazione pressochè identica a quella del lemma del n.° 2, che $A^* = \rho^* I$ con $\rho^* \in K^*$ e permutabile con tutti gli elementi di K.) Se T_2^* fosse rappresentabile con equazioni del tipo (8), cioè $y^* = Ax^*$, dovrebbe essere allora $A = \rho I$ con ρ appartenente al centro di K. La doppia rappresentazione di T_2^*: $y^* = \rho^* I x^*$, $y^* = \rho I x^*$ implicherebbe allora (n.° 2, teor.) $\rho^* I = \lambda^* \rho I$ con $\lambda \neq 0$ e permutabile con ogni elemento di K^*, cioè

$$\rho^* = \lambda^* \rho. \tag{11}$$

Se ora supponiamo inoltre che K sia contenuto nel centro di K^*, questa eguaglianza verrebbe a dire che ρ^* appartiene al centro di K^*, contro l'ipotesi. Ecco quindi che T_2^* (se esistessero K, K^* e ρ^* soddisfacenti alle condizioni poste) fornirebbe già l'esempio cercato.

Un esempio meno particolare sarebbe fornito poi (ferme restando le ipotesi e le notazioni del capov. preced.) da ogni trasformazione proiettiva

$$(12) \qquad T_0^*)\ y^* = \rho^* B x^*,$$

ove B sia una qualsiasi matrice regolare (di tipo $(n+1, n+1)$) sopra K. Infatti $T_0^* = T_2^* T_3^*$ (n.° 2), con $T_3^*)$ $y^* = Bx^*$, quindi intanto è chiaro che T_0^* muta $PN_n^r(K)$ in sè stesso (anzi addirittura su sè stesso). Poichè evidentemente la trasformazione proiettiva subordinata da T_0^* in $PN_r^n(K)$ è rappresentata dalle equazioni $y = Bx$, se T_0^* ammettesse una rappresentazione $y^* = Cx^*$ del tipo (8), dovrebbe essere (n.° 2, teor.) $B = \sigma^{-1}C$ con σ appartenente al centro di K. D'altra parte (per lo stesso teor. del n.° 2) dovrebbe essere $\rho^* B = \mu^* C$ con μ^* appartenente al centro di K^*, ossia $\rho^* \sigma^{-1} C = \mu^* C$, donde (moltiplicando a destra per C^{-1}): $\rho^* = \mu^* \sigma$. Di qui l'assurdo (cfr. la (11)).

Ritornando al corpo $K^* = Q$ dei quaternioni sopra il corpo $K = R$ dei numeri reali, assumiamo allora $\rho^* = i$ ([3], p. 40). Evidentemente $\rho^* \in K^* \dot{-} K$. E' chiaro poi che ogni numero reale è permutabile con le matrici i, j, k, quindi con ogni elemento $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ di Q. Dunque K è contenuto nel centro di K^* ed è $ij \neq ji$. Ecco provata l'esistenza di K, K^* e ρ^* tali da soddisfare alle condizioni poste nei due precedenti capoversi. Dunque *la* (10), *o una qualsiasi delle* (12), *con* $K = R$, $K^* = Q$, $\rho^* = i$, *fornisce l'esempio suddetto.*

Concludendo: Se una trasformazione proiettiva $T^*)$ $y^* = A^* x^*$ di $PN_n^r(K^*)$ trasforma $PN_n^r(K)$ in sè stesso ($K \subset K^*$), essa è rappresentabile, *se K^* è commutativo,* con equazioni $y^* = Ax^*$ dove A è matrice sopra K.

TEOREMA: *Se K^* non è commutativo, questa proposizione è invece falsa. Solo si può affermare, se $T^*)$ $y^* = A^* x^*$ trasforma*

$PN_n^r(K)$ in sè stesso, l'esistenza di una matrice A sopra K e di un elemento λ^* di K^* (in generale non permutabile con tutti gli elementi di K^*) *tali che sia $A^* = A\lambda^*$*. Se poi T^* trasforma $PN_n^r(K)$ su sè stesso, esistono inoltre B sopra K e $\mu^* \in K^*$ tali che $A^* = A\lambda^* = \mu^* B$.

L'ultima affermazione si giustifica facilmente. Se infatti $T^*)$ $y^* = A^* x^*$ trasforma $PN_n^r(K)$ *su* sè stesso, ciò significa che anche l'inversa $T^{*-1})$ $x^* = A^{*-1} y^*$ trasforma $PN_n^r(K)$ in sè stesso, quindi, per quanto sopra, esistono B^{-1} e μ^{*-1} tali che $A^{*-1} = B^{-1}\mu^{*-1}$, donde appunto $A^* = \mu^* B$.

Nel corso della dimostrazione abbiamo pure ottenuto il

Lemma: Affinchè $T^*)$ $y^* = A^* x^*$ subordini in $PN_n^r(K)$ la identità è necessario e sufficiente che sia $A^* = \nu^* I$, con ν^* elemento di K^* non nullo *e permutabile con tutti gli elementi di K.*

8. - Vediamo adesso di giustificare un'affermazione fatta alla fine del n.° 6 (penult. capov.).

La trasformazione proiettiva $T^*)$ $y^* = A^* x^*$ di $PN_n^r(K^*)$, di cui al n.° precedente, sia ora quella che fa passare dal sistema coordinato ammissibile $\overline{\mathfrak{S}}^* \{x^*\}$ definente l'ampliamento $P_n^r(K^*)$ di $P_n^r(K)$ (n.° 6) ad un qualsiasi sistema ammissibile $\{y^*\}$ dell'ampliamento stesso. Premettiamo il seguente

Lemma: Se $T_1^*)$ $y^* = C^* x^*$, $T_2^*)$ $y^* = D^* x^*$ sono due trasfomazioni proiettive di $PN_n^r(K^*)$ che trasformano entrambe $PN_n(K)$ *su* stesso e che subordinano inoltre in esso la medesima corrispondenza, deve essere $D^* = \nu^* C^* = C^* \pi^*$ con ν^*, π^* elementi di K^* *permutabili con ogni elemento di K.*

Basta infatti applicare il lemma del n.° precedente alle due trasformazioni proiettive di equazioni $y^* = D^* C^{*-1} x^*$, $y^* = C^{*-1} D^* x^*$.

Se la suddetta trasformazione $T^*)$ $y^* = A^* x^*$ trasforma $PN_n^r(K)$ *su* sè stesso, nasce evidentemente, tramite T^*, una corrispondenza biunivoca fra il sostegno S di $P_n^r(K)$ (n.° 6) e lo spazio numerico $PN_n^r(K)$, corrispondenza che stabilisce quindi in S un sistema $\mathfrak{S}\{y\}$ di coordinate proiettive *sopra il* *corpo* K (cfr. [11], p. 32), che diremo *subordinato* in S dal sistema $\mathfrak{S}^* \{ y^* \}$.

Se ora $\mathfrak{S} \{ y \}$ appartiene alla classe $\mathfrak{C}$ (n.° 6), deve esistere una matrice (regolare) A sopra K tale che $y = Ax$ siano le formule di trasformazione dal sistema $\overline{\mathfrak{S}} \{ x \}$, definente $P_n^r(K)$, ad $\mathfrak{S} \{ y \}$, ossia tale che la trasformazione proiettiva T_0) $y = Ax$ dello spazio $PN_n^r(K)$ coincida con la corrispondenza subordinata in questo dalla T^*. D'altra parte è chiaro che T_0 non è altro che la corrispondenza subordinata in $PN_n^r(K)$ dalla trasformazione proiettiva T_0^*) $y^* = Ax^*$ di $PN_n^r(K^*)$. Applicando allora a T_0^* e T^* il lemma precedente, otteniamo il

TEOREMA: Condizione necessaria e sufficiente affinchè, nell'ampliamento di $P_n^r(K)$, la classe $\mathfrak{C}$ dei sistemi di coordinate ammissibili di questo spazio, *non* subisca alcun ampliamento « sopra K » è che, per ogni trasformazione proiettiva T^*) $y^* = A^*x^*$ di $PN_n^r(K^*)$ che trasformi $PN_n^r(K)$ *su* sè stesso, esistano una matrice A sopra K, e in K^* un π^* *permutabile con ogni elemento di* K tali che $A^* = A\pi^*$.

E' allora chiaro come questo teorema lasci adito (cfr. il teor. del n.° preced.) alla supposizione, fatta al n.° 6 (penult. capov.), di un possibile ampliamento « sopra K » della classe $\mathfrak{C}$.

Un esempio di ampliamento di $\mathfrak{C}$ sopra K andrebbe però cercato nel caso di K non contenuto nel centro della propria estensione K^*, poichè evidentemente dai due teoremi di questo n.° e del precedente segue il

COROLLARIO: *Se K è contenuto nel centro di K^*, la classe $\mathfrak{C}$ non subisce alcun ampliamento « sopra K ».*

Ciò vale dunque in particolare per i corpi $K = R$ e $K^* = Q$ considerati al n.° precedente.

9. - $P_n^r(K^*)$ essendo sempre un ampliamento di un $P_n^r(K)$ $(K \subset K^*)$, accennerò ora brevemente ad altre due questioni rimaste aperte.

Se il corpo K^* è *commutativo,* valgono i due ben noti teoremi (il secondo dei quali è un'immediata conseguenza di una proposizione enunciata al n.° 7 — prima del teor. —):

I. Se i punti fondamentali ed unità di un sistema coordinato ammissibile $\mathfrak{S}^*$ di $P_n^r(K^*)$ sono in $P_n^r(K)$, i punti di $P_n^r(K)$ ammettono in $\mathfrak{S}^*$ coordinate in K, (ossia — n.° 6 — le relative classi $[(\alpha_i^*)]$ appartengono a $PN_n^r(K)$).

II. Se, viceversa, in un sistema ammissibile $\mathfrak{S}^*$ i punti di $P_n^r(K)$ ammettono coordinate in K, ogni punto di $P_n^r(K^*)$ che goda di questa proprietà è in $P_n^r(K)$.

Non sembra che questi due teoremi possano estendersi al caso non commutativo (qui sotto ne è fatta un'estensione in ipotesi molto restrittive).

Infatti, quanto al teor. I, si osservi che, se K^* *non* fosse commutativo, esisterebbe ancora certamente (come, nella fatta ipotesi, facilmente si dimostra) un sistema ammissibile $\mathfrak{S}_0^* \{ z^* \}$ di $P_n^r(K^*)$ avente gli stessi punti fondamentali ed unità del *dato* $\mathfrak{S}^* \{ y^* \}$ e tale inoltre che in esso i punti di $P_n^r(K)$ ammettono coordinate ζ_i in K, ma questi due sistemi potrebbero ora benissimo essere distinti (n.° 3). Quindi la conclusione del caso commutativo non sarebbe più lecita.

Quanto al teor. II, basta pensare che, se K^* *non* fosse commutativo, la proposizione del n.° 7 sopra richiamata non sarebbe ora più applicabile e rimarrebbe quindi aperta la possibilità (cfr. il teor. del n.° 7) che la trasformazione proiettiva $y^* = A\lambda^* x^*$, che dal sistema ammissibile $\overline{\mathfrak{S}}^* \{ x^* \}$ definente $P_n^r(K^*)$ fa passare al dato $\mathfrak{S}^* \{ y^* \}$, non trasformi più (come necessariamente accade nel caso commutativo) $PN_n^r(K)$ *su* sè stesso.

Siamo però in grado, in base al lemma del n.° 7 ed al teor. dello stesso n.°, di enunciare il

Corollario: *Se K è contenuto nel centro di K^*, valgono entrambi i teoremi* I, II.

10. - K^* essendo sempre un sopracorpo proprio di K:

$$K \subset K^*,$$

abbiamo già osservato (n.° 2) che le matrici regolari di tipo $(n+1,\ n+1)$ sopra K^* costituiscono, rispetto alla moltiplicazione, un gruppo $\mathfrak{M}^*$. Quelle fra queste matrici che sono sopra K (cioè che hanno tutti i loro elementi in K) costituiscono evidentemente un sottogruppo proprio $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{M}^*$:

$$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^*.$$

Consideriamo l'omomorfismo,

$$\mathfrak{M}^* \rightarrow \mathfrak{T}^*, \tag{13}$$

del gruppo $\mathfrak{M}^*$ sul gruppo $\mathfrak{T}^*$ delle trasformazioni proiettive dello spazio numerico $PN_n^r(K^*)$, dato (come si è visto al n.° 2) dalla corrispondenza

$$A^* \rightarrow T^*) \; y^* = A^* x^*. \tag{13'}$$

Il trasformato del sottogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{M}^*$ nell'omomorfismo (13') è il sottogruppo $\mathfrak{T}'$ di $\mathfrak{T}^*$ costituito da tutte le trasformazioni proiettive T' di $PN_n^r(K^*)$ che sono rappresentabili con equzioni $y^* = Ax^*$ coi coefficienti in K. Si ha dunque:

$$\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}^*, \tag{14}$$

questo omomorfismo essendo realizzato dalla corrispondenza

$$A \rightarrow T') \; y^* = Ax^*. \tag{13''}$$

Che $\mathfrak{T}'$ sia sottogruppo *proprio* di $\mathfrak{T}^*$ (v. (14)), risulta ad es. dall'osservare che la trasformazione proiettiva di equazioni $y^* = A^* x^*$, con $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^* I \end{pmatrix}$ ed $\alpha^* \in K^* \dot{-} K$, muta il punto $[(1, 1, \ldots, 1)]$ di $PN_n^r(K)$ nel punto $[(1, \alpha^*, \ldots, \alpha^*)]$ che appartiene a $PN_n^r(K^*)$ ma non a $PN_n^r(K)$ (n.° 6), mentre abbiamo già osservato (n.° 7) che ogni trasformazione di $\mathfrak{T}'$ trasforma $PN_n^r(K)$ in sè stesso.

Considerato pure l'omomorfismo

$$\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{T},$$

dato (n.° 2) dalla corrispondenza

$$A \rightarrow T) \; y = Ax,$$

$\mathfrak{T}$ denotando adesso il gruppo delle trasformazioni proiettive dello spazio numerico $PN_n^r(K)$, dimostriamo anzitutto il

Lemma: *La corrispondenza*

$$(15) \qquad T')\, y^* = Ax^* \rightarrow T)\, y = Ax$$

è un omomorfismo di $\mathfrak{T}'$ *su* $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{T}' \rightarrow \mathfrak{T}.$$

Basta evidentemente dimostrare l'univocità della (15), il che si può fare assai facilmente in base al teor. del n.° 2. Infatti, se $y^* = Bx^*$ è un'altra rappresentazione sopra K della medesima $T')\, y^* = Ax^*$, deve essere $B = \lambda^* A$ con λ^* appartenente al centro di K^*. Ma allora è chiaro ($\beta_{rs} = \lambda^* \alpha_{rs}$) che $\lambda^* = \lambda \in K$, quindi $B = \lambda A$ con λ appartenente al centro di K, ossia $y = Bx$ rappresenta la medesima $T)\, y = Ax$.

Denotati rispettivamente con

$$H, \; H^*$$

i centri (n.° 2) dei corpi K, K^*, abbiamo allora il

Teorema: *L'omomorfismo* (15) *è un isomorfismo se e soltanto se il centro di K è contenuto in quello di* K^*, (cioè se ogni elemento di K che sia permutabile con tutti gli elementi di K lo è pure con tutti quelli di K^*).

Infatti, se $H \subseteq H^*$ la (15) è biunivoca, poichè da $T'_1)\, y^* = A_1 x^* \rightarrow T_1$, $T'_2)\, y^* = A_2 x^* \rightarrow T_2$ e $T_1 = T_2$ segue $A_1 = \lambda A_2$ con $\lambda \in H$ (n.° 2) e quindi (poichè $\lambda \in H^*$) $T'_1 = T'_2$. Viceversa, se la (15) è biunivoca si ha $H \subseteq H^*$, perchè se λ fosse un elemento di H non appartenente ad H^*, posto $T'_1)\, y^* = A_1 x^*$ e $T'_2)\, y^* = \lambda A_1 x^*$, sarebbe $T'_1 \neq T'_2$ ma $T_1 = T_2$ (n.° 2), contro l'ipotesi.

Dunque, se H non è contenuto in H^*, la corrispondenza omomorfa (15) *non* è certamente un isomorfismo. Perciò non si può più concludere, come si fa nel caso commutativo, che il gruppo $\mathfrak{T}^*$ è un'*estensione* di $\mathfrak{T}$ o, come anche si suol dire, che $\mathfrak{T}$ è *immergibile* in $\mathfrak{T}^*$, nel senso che $\mathfrak{T}$ è isomorfo ad un certo sottogruppo $\mathfrak{T}''$ di $\mathfrak{T}^*$.

Di qui il problema di decidere, nel caso che H non sia contenuto in H^*, se o quando il gruppo $\mathfrak{T}$ delle trasformazioni proiettive di $PN_n^r(K)$ sia immergibile in quello $\mathfrak{T}^*$ di $PN_n^r(K^*)$.

Osserveremo ancora che il problema, meno generale di questo, di decidere soltanto (sempre nel caso che H non sia contenuto in H^*) se può essere $\mathfrak{T}$ isomorfo a $\mathfrak{T}'$ (naturalmente mediante una corrispondenza diversa dalla (15)), appare legato, come ora mostremo, al cosidetto *problema di* HOPF, di riconoscere cioè se un gruppo può essere omomorfo a sè stesso propriamente.

A dir il vero il problema di HOPF si riferisce (cfr. ad es. [5], p. 66) a gruppi con un numero finito di generatori, ma esso si può naturalmente porre (cfr. [1], p. 267) per un gruppo qualsiasi. Gruppi *non* omomorfi propriamente a sè stessi furon detti dal BAER ([1]) *Q-gruppi*. Dunque dal teorema sopra dimostrato discende immediatamente il

COROLLARIO: Se il centro di K non è contenuto in quello di K^*, condizione *necessaria* affinchè $\mathfrak{T}$ sia isomorfo a $\mathfrak{T}'$ è che nessuno dei due gruppi $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ sia un Q-gruppo.

La questione di decidere se $\mathfrak{T}$ (o $\mathfrak{T}'$) sia o meno un Q-gruppo, appare però, nel caso attuale, complicata dal fatto che, come dal BAER stesso fu dimostrato ([1], p. 272), l'immagine omomorfa di un Q-gruppo può non essere un Q-gruppo.

Naturalmente tutto quanto si è detto in questa nota per gli spazi *destri* vale pure, con le opportune modifiche formali, per gli spazi *sinistri*.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BAER: *Groups without proper isomorphic quotient groups*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 50 (1944), pp. 267-278.

[2] A. COMESSATTI: *Lezioni di geometria analitica e proiettiva, Parte prima*, 2ª ed. Cedam (1943).

[3] W. V. D. HODGE - D. PEDOE: *Methods of algebraic geometry, Vol. I*, Cambridge (1947).

[4] W. V. D. HODGE - D. PEDOE: *Methods of algebraic geometry, Vol. III*, Cambridge (1954).

[5] A. G. KUROSCH: *Gruppentheorie*, Akademie - Verlag (1953).

[6] S. LEFSCHETZ: *Algebraic geometry*, Princeton (1953).

[7] U. MORIN: *Algebra astratta e geometria algebrica, Parte prima*, (litografie), Cedam (1955).

[8] B. SEGRE: *Lezioni di geometria moderna, Vol. I*, Zanichelli (1948).

[9] B. L. VAN DER WAERDEN: *Einführung in die algebraische Geometrie*, Dover (1945).

[10] B. L. VAN DER WAERDEN: *Moderne Algebra, I*, dritte Auf., Springer (1950).

[11] R. J. WALKER: *Algebraic curves*, Princeton (1950).