

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SERGIO CAMPANATO

**Teoremi di completezza relativi al sistema di
equazioni dell' equilibrio elastico**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 25 (1956), p. 122-137

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__25__122_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TEOREMI DI COMPLETEZZA RELATIVI AL SISTEMA DI EQUAZIONI DELL' EQUILIBRIO ELASTICO

Nota () di SERGIO CAMPANATO (a Modena) (**)*

Nello studio dei problemi al contorno relativi a equazioni o sistemi di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali ha notevole interesse la ricerca di sistemi di funzioni (scalari o vettoriali) completi in determinati spazi funzionali, e ciò sia per la dimostrazione di teoremi di esistenza sia per l'approssimazione delle soluzioni dei problemi stessi.

In questa nota si prende in considerazione il sistema di equazioni differenziali dell'elastostatica piana:

$$(I) \quad \Delta_2 \mathbf{u} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

dove \mathbf{u} indica il vettore degli spostamenti.

Dicesi problema al contorno misto relativo a (I) quello in cui si ricerca una soluzione \mathbf{u} di (I), nei punti interni di un dominio \mathcal{D} , assegnati che siano lo spostamento \mathbf{u} su una parte $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ della frontiera $\mathcal{F}\mathcal{D}$ e lo sforzo $L(\mathbf{u})$ sulla parte rimanente $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$.

Relativamente a tale problema dimostreremo questo teorema di completezza: le tracce su $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ dei vettori \mathbf{w} solu-

(*) Pervenuta in Redazione il 3 dicembre 1955.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Modena.

(**) L'argomento della presente nota è stato oggetto di una comunicazione al V Congresso Nazionale dell'U.M.I. (8-12-X-1955) a Pavia.

zioni di (I), di classe 1 in \mathfrak{D} , e tali che $L(w) = 0$ su $\mathfrak{F}_2\mathfrak{D}$, costituiscono un sistema hilbertianamente completo¹⁾ nella totalità dei vettori di modulo di quadrato sommabile su $\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}$.

L'interesse del risultato sta anche nel fatto che, mentre per i problemi di tipo uniforme nei quali si assegna lo spostamento, o la tensione, su tutta la frontiera del corpo elastico, l'esistenza di sistemi completi è già stata dimostrata da G. FICHERA²⁾, a quanto mi consta, non è stata finora rilevata l'esistenza di sistemi completi nel caso del problema misto.

Si perverrà al risultato sopra enunciato premettendo la dimostrazione di un teorema di unicità (n. 2), in un'opportuna classe di vettori, per il problema misto generalizzato in modo analogo a quello studiato da E. MAGENES nel caso delle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico³⁾.

Nella dimostrazione di tale teorema sono stati utili anche ragionamenti fatti da B. PINI⁴⁾ in un teorema di unicità per il primo problema al contorno relativo a (I) (quello in cui è assegnato su tutta $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ il vettore w) generalizzato nel senso di G. CIMMINO⁵⁾.

Si concluderà con un'osservazione sulla possibilità di dimostrare anche teoremi di completezza lagrangiana e di estendere allo spazio i risultati ottenuti nel piano.

1. Premesse. - Sia \mathfrak{D} un dominio limitato del piano (x_1, x_2) , con frontiera $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ costituita da un'unica curva semplice, chiusa, di classe 2, che ammetta la rappresentazione parametrica regolare

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1(t) \\ x_2 &= \bar{x}_2(t) \end{aligned} \quad \text{per } a_1 \leq t \leq a_2.$$

1) Cioè per l'approssimazione lineare in media al secondo ordine.

2) Cfr. [2] e [3]. I numeri fra [] si riferiscono alla bibliografia finale.

3) Cfr. [6] e [7].

4) Cfr. [10].

5) Cfr. [1].

I punti $Q_i[\bar{x}_1(t_i), \bar{x}_2(t_i)]$ ($i=1, 2$) spezzino $\mathcal{F}\mathcal{D}$ in due sottoarchi aperti $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ e $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$. Poniamo $\overline{\mathcal{F}_i\mathcal{D}} = \mathcal{F}_i\mathcal{D} + Q_1 + Q_2$ ($i=1, 2$).

In $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ consideriamo il sistema di equazioni differenziali nel vettore incognito $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2)$:

$$(2) \quad \Delta_2 \mathbf{u} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

k essendo una costante numerica.

Indichiamo con $\mathbf{n} \equiv (n_1, n_2)$ il versore della normale interna nei punti di $\mathcal{F}\mathcal{D}$ e con $L(\mathbf{u})$ il vettore, definito sulla frontiera, di componenti

$$(3) \quad \begin{aligned} L_1(\mathbf{u}) &= k \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1 + \frac{du_1}{dn} + \lambda \frac{du_2}{ds} \\ L_2(\mathbf{u}) &= k \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2 + \frac{du_2}{dn} - \lambda \frac{du_1}{ds} \end{aligned}$$

con λ costante numerica.

Nei casi che interessano la Fisica Matematica le costanti k e λ soddisfano, come è noto, alle relazioni $k > \frac{1}{3}$ e $\lambda = 1$.

Sia $\{\gamma_r\}$ un sistema di curve, dipendenti dal parametro r , definite, per t che varia nell'intervallo $\overline{t_1 t_2}$ e r nell'intervallo $0r_0$, dalla rappresentazione parametrica regolare:

$$(4) \quad \begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1(t_1 - r) + (t - t_1)(2 + 4r)n_1(t_1 - r) \\ x_2 &= \bar{x}_2(t_1 - r) + (t_2 - t)(2 + 4r)n_2(t_1 - r) \end{aligned} \quad \text{per } t_1 \leq t < t_1 + \frac{r}{2 + 4r}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1(at + b) + rn_1(at + b) \\ x_2 &= \bar{x}_2(at + b) + rn_2(at + b) \end{aligned} \quad \text{per } t_1 + \frac{r}{2 + 4r} \leq t < t_2 - \frac{r}{2 + 4r}$$

ove

$$a = \frac{[(t_2 - t_1) + 2r][2 + 4r]}{(t_2 - t_1)(2 + 4r) - 2r} \quad b = \frac{-r(t_2 + t_1)(3 + 4r)}{(t_2 - t_1)(2 + 4r) - 2r}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1(t_2 + r) + (t_2 - t)(2 + 4r)n_1(t_2 + r) \\ x_2 &= \bar{x}_2(t_2 + r) + (t_2 - t)(2 + 4r)n_2(t_2 + r) \end{aligned} \quad \text{per } t_2 - \frac{r}{2 + 4r} \leq t \leq t_2.$$

Tale sistema di curve per r_0 sufficientemente piccolo gode delle seguenti proprietà:

α) Per $r = 0$ γ_r coincide con $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$, inoltre i punti estremi Q_{1r} e Q_{2r} di γ_r , ed essi soli, appartengono a $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$, precisamente:

$$\begin{aligned} x_1(t_1, r) &= \bar{x}_1(t_1 - r) & x_2(t_1, r) &= \bar{x}_2(t_1 - r) \\ x_1(t_2, r) &= \bar{x}_1(t_2 + r) & x_2(t_2, r) &= \bar{x}_2(t_2 + r) \end{aligned}$$

β) Esistono nel rettangolo $R[t_1 \leq t \leq t_2, 0 \leq r \leq r_0]$, generalmente continue e limitate, le derivate parziali $x_{i,t}$, $x_{i,r}$ ($i = 1, 2$) e sono tali che:

$$(5) \quad x_{1,t}x_{2,r} - x_{1,r}x_{2,t} > 0$$

per $r < \min |\rho|$ ⁶⁾, con ρ raggio di curvatura di $\mathcal{F}\mathcal{D}$ nei punti corrispondenti a t che varia in $t_1 - r_0, t_2 + r_0$, e:

$$(6) \quad \sum_1^2 x_{j,t}(t_i, r)x_{j,r}(t_i, r) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Le (6) esprimono l'ortogonalità delle γ_r e della $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ nei punti Q_{ir} .

γ) Le normali a $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ nei suoi punti incontrano le curve γ_r in un sol punto.

Introduciamo ora le seguenti funzioni:

$$(7) \quad \alpha(t, r) = \frac{x_{1,t}x_{2,r} - x_{1,r}x_{2,t}}{x_{1,t}^2 + x_{2,t}^2}, \quad \beta(t, r) = \frac{x_{1,t}x_{1,r} + x_{2,t}x_{2,r}}{x_{1,t}^2 + x_{2,t}^2}$$

e la funzione « peso » $P(t, r)$ ponendo:

$$(8) \quad P(t, r) = \frac{1}{\alpha(t, r)}$$

$P(t, r)$ è definita, limitata, e a estremo inferiore positivo in tutto R , mentre per ogni r in $\overline{0r_0}$ esiste, limitata quasi ovunque in $\overline{t_1t_2}$, la derivata $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)$, e per gli stessi r e per

⁶⁾ Per la regolarità ammessa per $\mathcal{F}\mathcal{D}$ questo minimo è positivo.

quasi tutti i t di $\overline{t_1 t_2}$ esiste la derivata $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\alpha} \right)$ limitata nell'intorno di ogni tale r per t variante in $\overline{t_1 t_2}$.

Ciò premesso, indichiamo con Γ la classe dei vettori $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2)$ soddisfacenti a queste proprietà:

- 1) sono soluzioni regolari ⁷⁾ di (2) in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$;
- 2) sono continui con le derivate parziali prime in $\mathfrak{D} - \overline{\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}}$;
- 3) $|\mathbf{u}|^2$ è sommabile in \mathfrak{D} ;
- 4) $(\operatorname{div} \mathbf{u})^2$ e $|\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2$ sono sommabili in \mathfrak{D} ;
- 5) $L(\mathbf{u}) = 0$ su $\mathfrak{F}_2\mathfrak{D}$;
- 6) convergono « in media » sul sistema di curve γ_r verso un vettore $\mu(t)$ di quadrato sommabile in (t_1, t_2) nel senso che:

$$(9) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r) |\mathbf{u}[x_1(t, r), x_2(t, r)] - \mu(t)|^2 dt = 0$$

e quindi anche, essendo $P \geq m > 0$ in R :

$$(10) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{u}[x_1(t, r), x_2(t, r)] - \mu(t)|^2 dt = 0.$$

2. Teorema di unicità. - Dimostriamo il seguente teorema di unicità:

TEOREMA. - Se $k > -1$ e $-1 < \lambda < \min(1, 2k + 1)$ oppure $k > 0$ e $\lambda = 1$, nella classe Γ solo il vettore identicamente nullo soddisfa alla condizione ⁸⁾:

$$(11) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} (P |\mathbf{u}|^2)_{\gamma_r} dt = 0.$$

⁷⁾ Diremo che un vettore \mathbf{u} è soluzione regolare di (2) in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$ se \mathbf{u} è continuo ivi assieme alle derivate parziali che compaiono in (2) e soddisfa (2) stesso.

⁸⁾ Con la scritta $(P |\mathbf{u}|^2)_{\gamma_r}$ intendiamo la funzione $P |\mathbf{u}|^2$ calcolata sui punti della curva γ_r .

DIM. - Per vettori soluzioni di classe 1 del sistema (2) in un dominio regolare limitato \mathcal{C} sussiste la formula di Green:

$$(12) \int_{\mathcal{F}\mathcal{C}} \mathbf{u} \times L(\mathbf{u}) ds + \iint_{\mathcal{C}} \left\{ k(\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + |\operatorname{grad} u_1|^2 + |\operatorname{grad} u_2|^2 + 2\lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right\} d\mathcal{C} = 0.$$

Indichiamo con \mathfrak{D} , il dominio, contenuto in \mathfrak{D} , avente per frontiera la curva γ_r e il sottoarco $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}_r$ di $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$, di estremi Q_{1r}, Q_{2r} .

Supponiamo dapprima $k > -1$ e $-1 < \lambda < \min(1, 2k + 1)$. La forma quadratica, nelle variabili $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ ($i, k = 1, 2$), sotto al segno dell'ultimo integrale in (12) è definita positiva.

Sia \mathbf{u} un vettore della classe Γ soddisfacente alla (11). Indicando con H una costante, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[e^{-H \int_0^r \int_{\gamma_r} \{ (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 \} ds dr} \cdot \int_{i_1}^{i_2} (P |\mathbf{u}|^2)_{\gamma_r} dt \right] = \\ = e^{-H \int_0^r \int_{\gamma_r} \{ (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 \} ds dr} \cdot \left\{ -H \int_{i_1}^{i_2} [(\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2] ds + \int_{i_1}^{i_2} (P_r |\mathbf{u}|^2)_{\gamma_r} dt + 2 \int_{i_1}^{i_2} \left[P \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right]_{\gamma_r} dt \right\}. \end{aligned}$$

Se α e β sono le funzioni introdotte in (7) risulta:

$$2 \int_{i_1}^{i_2} \left(P \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right)_{\gamma_r} dt = 2 \int_{\gamma_r} \left(P \alpha \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dn} \right) dt + 2 \int_{i_1}^{i_2} \left(P \beta \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{\gamma_r} dt$$

e per le (6), integrando per parti:

$$2 \int_{i_1}^{i_2} \left(P \beta \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{\gamma_r} dt = - \int_{i_1}^{i_2} ((P \beta)_t |\mathbf{u}|^2)_{\gamma_r} dt.$$

Tenuto conto che $L(\mathbf{u}) = 0$ su $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}_r \subset \mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ e che inoltre $P\alpha = 1$, dalla formula (12) si ottiene

$$\int_{\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}_r} \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dn} ds = -\frac{1}{1+\lambda} \iint_{\mathfrak{D}_r} \left\{ k(\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \sum_1^2 |\operatorname{grad} u_i|^2 + \right. \\ \left. + 2\lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right\} dP - \\ \frac{1}{1+\lambda} \int_{\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}_r} \mathbf{u} \times \{ (k-\lambda) \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \lambda(\mathbf{n} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{u}) \} ds.$$

Quindi in definitiva:

$$\frac{d}{dr} \left[e^{-H \int_0^r \int_{\gamma_r} [(\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2] ds dr} \cdot \int_{t_1}^{t_2} (P |\mathbf{u}|^2)_{\gamma_r} dt \right] = \\ = e^{-H \int_0^r \int_{\gamma_r} [(\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2] ds dr} \cdot \left\{ -H \int_{\gamma_r} [(\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \right. \\ \left. + |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2] ds \int_{t_1}^{t_2} (P |\mathbf{u}|^2)_{\gamma_r} dt + \int_{t_1}^{t_2} \{ [P_r - (P\beta)_t] |\mathbf{u}|^2 \}_{\gamma_r} dt - \right. \\ (13) \quad \left. - \frac{2}{1+\lambda} \int_{\gamma_r} \mathbf{u} \times [(k-\lambda) \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \lambda(\mathbf{n} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{u})] ds - \right. \\ \left. - \frac{2}{1+\lambda} \iint_{\mathfrak{D}_r} \left[k(\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \sum_1^2 |\operatorname{grad} u_i|^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] dP \right\}.$$

Applicando la disuguaglianza di Schwarz-Hölder, risulta:

$$(14) \quad \left| \int_{\gamma_r} \mathbf{u} \times [(k-\lambda) \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \lambda(\mathbf{n} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{u})] ds \right| \leq \\ \leq C \left\{ \int_{\gamma_r} |\mathbf{u}|^2 ds \int_{\gamma_r} [(\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2] ds \right\}^{\frac{1}{2}}$$

con C costante positiva dipendente da k e da λ .

Ora, per ipotesi, $\int_{\gamma_r} |\mathbf{u}|^2 ds$ tende a zero per $r \rightarrow 0$. Allora se

$\int_{\gamma_r} [(\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2] ds$ per $r \rightarrow 0$ è un infinito rispetto a $\frac{1}{r}$ al più dello stesso ordine del precedente infinitesimo, si può scegliere la costante H in modo che, almeno per r sufficientemente piccolo, il secondo membro di (13) sia negativo.

Se $\int_{\gamma_r} [(\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2] ds$ è per $r \rightarrow 0$ un infinito d'ordine maggiore dell'ordine di infinitesimo di $\int_{\gamma_r} |\mathbf{u}|^2 ds$ si può sempre⁹⁾ scegliere H in modo che valga la

$$H \int_{\gamma_r} [(\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2] ds \int_{t_1}^{t_2} (P|\mathbf{u}|^2)_{\gamma_r} dt > \\ > C \int_{\gamma_r} |\mathbf{u}|^2 ds \int_{\gamma_r} [(\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2] ds \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

In ogni caso, per r sufficientemente piccolo, il primo membro di (13) sarà negativo, quindi la funzione

$$e^{-H \int_0^r \int_{\gamma_r} [(\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2] ds dr} \cdot \int_{t_1}^{t_2} (P|\mathbf{u}|^2)_{\gamma_r} dt$$

sarà crescente per $r \rightarrow 0$, il che, essendo la funzione positiva, contraddice l'ipotesi che $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} (P|\mathbf{u}|^2)_{\gamma_r} dt = 0$. Pertanto sarà $\mathbf{u} \equiv (0, 0)$ in \mathfrak{D} .

Nel caso di $k > 0$ e $\lambda = 1$, in cui è compreso quello che interessa la Fisica Matematica, il ragionamento precedente continua a valere. Infatti la forma quadratica nelle variabili $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ ($i, k = 1, 2$) sotto al segno dell'ultimo integrale in

⁹⁾ Essendo $\operatorname{div} \mathbf{u}$ e $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ funzioni scalare e vettoriale, rispettivamente, armoniche se \mathbf{u} soddisfa (2), le loro medie quadratiche crescono per $t \rightarrow 0$.

(13) per $\lambda = 1$ diventa:

$$\begin{aligned} \Pi \equiv (k+1) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + (k+1) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + 2k \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \\ + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \end{aligned}$$

e posto:

$$\Pi_0 \equiv (k+1) \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] + 2k \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

$$\Pi_1 \equiv \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

si può scrivere: $\Pi = \Pi_0 + \Pi_1$.

Π_0 è nelle variabili $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ ($i, k = 1, 2$), una forma quadratica definita positiva, mentre

$$\Pi_1 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2$$

è semidefinita positiva; tale quindi è la forma Π . Allora: o Π non è identicamente nulla in \mathfrak{D} e quindi l'ultimo integrale a secondo membro di (13) è ancora negativo e il ragionamento fatto nel caso precedente sussiste immutato. Oppure Π è identicamente nulla in \mathfrak{D} , ossia u_1 e u_2 soddisfano alle

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0$$

allora u_1 e u_2 hanno la forma

$$(15) \quad \begin{aligned} u_1 &= px_2 + q \\ u_2 &= -px_1 + c \end{aligned}$$

con p, q, c , costanti numeriche.

Ma il vettore (15) non può soddisfare alla (11) se u_1, u_2 non sono identicamente nulli. E il teorema è completamente dimostrato.

3. Teorema di completezza. - Sia \mathfrak{D}' un dominio, contenente \mathfrak{D} , con frontiera costituita da un'unica curva semplice, chiusa, di classe 2, tale che

$$\mathfrak{F}\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{F}\mathfrak{D}' = \overline{\mathfrak{F}_2\mathfrak{D}}.$$

Detti P e Q due punti generici di \mathfrak{D}' , è possibile costruire una matrice $\|N_i^h(Q, P)\|$ in modo che, fissato P in $\mathfrak{D}' - \mathfrak{F}\mathfrak{D}'$, i vettori $N^h(Q, P) \equiv \{N_1^h(Q, P), N_2^h(Q, P)\}$, come funzioni di $Q(x_1, x_2)$, risultino:

- 1) di classe 1 in \mathfrak{D}' eccetto che per $Q \equiv P$;
- 2) soluzioni di (2) in $\mathfrak{D}' - \mathfrak{F}\mathfrak{D}'$
- 3) siano tali che $L_Q[N^h(Q, P)] = 0$ su $\mathfrak{F}_2\mathfrak{D}$,
- 4) per P e Q in \mathfrak{D}' sussistano le limitazioni

$$(16) \quad \begin{aligned} |N_i^h(Q, P)| &\leq H \left| \log \frac{1}{PQ} \right| + H_1 \\ \left| \frac{\partial N_i^h(Q, P)}{\partial x_m} \right| &\leq H \frac{1}{PQ} \end{aligned} \quad (i, h, m = 1, 2)$$

con H e H_1 costanti opportune.

- 5) proprietà analoghe alle 1) 2) 3), e che diremo 1') 2') 3'), valgano inoltre per i vettori $N^h(Q, P)$ intesi come funzioni di P , fissato che sia Q in $\mathfrak{D}' - \mathfrak{F}\mathfrak{D}'$.

Se con $\|S_i^h(Q, P)\|$ indichiamo la matrice di Somigliana¹⁰⁾, la matrice $\|N_i^h(Q, P)\|$ si può ottenere ponendo

$$N_i^h(Q, P) = S_i^h(Q, P) - g_i^h(Q, P) \quad (i, h = 1, 2)$$

dove $g^h(Q, P) \equiv \{g_1^h(Q, P), g_2^h(Q, P)\}$, per P fissato in $\mathfrak{D}' - \mathfrak{F}\mathfrak{D}'$, sono soluzioni di (2) biregolari per $Q \in \mathfrak{D}' - \mathfrak{F}\mathfrak{D}'$ che soddisfano alle relazioni

$$L_Q[g^h(Q, P)] = \delta^h(Q, P) \quad (h = 1, 2) \quad \text{su } \mathfrak{F}\mathfrak{D}'$$

essendo $\delta^h(Q, P)$ ($h = 1, 2$) vettori coincidenti con $L_Q[S^h(Q, P)]$

¹⁰⁾

$\|S_i^h(Q, P)\| \equiv \left\| p_i^h \log \overline{PQ} - \frac{k}{4(1+k)} \frac{\partial^2 \overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}}{\partial x_i \partial x_h} \right\|$ dove $\delta_i^h = \begin{cases} 1 & \text{se } i=h \\ 0 & \text{se } i \neq h. \end{cases}$

su $\mathcal{F}_2\mathcal{D}'$ e definiti su $\mathcal{F}_1\mathcal{D}'$ in modo da risultare hölderiani in tutto $\mathcal{F}\mathcal{D}'$ e da soddisfare alle condizioni

$$(17) \quad \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}'} \delta^h(Q, P) ds_Q = 0 \quad (h = 1, 2)$$

se $k > -1$ e $-1 < \lambda < \min(1, 2k + 1)$, oppure alle

$$(18) \quad \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}'} \delta^h(Q, P) ds_Q = 0, \quad \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}'} [x_2 \delta_1^h(Q, P) - x_1 \delta_2^h(Q, P)] ds_Q = 0 \quad (h = 1, 2)$$

se $k > 0$ e $\lambda = 1$.

Le proprietà 1) 2) 3) e 1') 2') 3') si verificano allora immediatamente, mentre la (4) è conseguenza anche di risultati classici sulle equazioni integrali a nucleo principale¹¹⁾.

La completezza del sistema di vettori w , di cui nell'introduzione, sarà conseguenza, in virtù di un noto teorema di analisi funzionale, del:

TEOREMA - Se $k > -1$ e $-1 < \lambda < \min(1, 2k + 1)$ oppure $k > 0$ e $\lambda = 1$, se $\varphi(M)$ è un vettore definito su $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ con il modulo di quadrato sommabile e se per ogni Q di $\mathcal{D} - \mathcal{D}$ è

$$(19) \quad \int_{\mathcal{F}_1\mathcal{D}} N^h(Q, M) \times \varphi(M) ds_M = 0 \quad (h = 1, 2)$$

allora è $\varphi(M)$ quasi ovunque nullo su $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$.

DIM. - Consideriamo il vettore $v(Q)$ di componenti

$$(20) \quad v_i(Q) = \int_{\mathcal{F}_1\mathcal{D}} N^i(Q, M) \times \varphi(M) ds_M \quad (i = 1, 2)$$

e dimostriamo che è identicamente nullo in \mathcal{D} .

Per le (16) e per classici risultati¹²⁾ si ha:

1) le $v_i(Q)$ sono continue con le derivate parziali prime in $\mathcal{D} - \overline{\mathcal{F}_1\mathcal{D}}$, inoltre il vettore $v(Q)$ risulta soluzione regolare in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ di (2).

¹¹⁾ Cfr. GIRAUD [4] e [5].

¹²⁾ Cfr. [9].

2) $v(Q)$ e le sue derivate parziali prime sono di norma di quadrato sommabile in tutto \mathfrak{D} .

3) il vettore $L(v)$ si annulla su $\mathfrak{F}_2\mathfrak{D}$.

Per Q su $\mathfrak{F}_2\mathfrak{D}$ si ha infatti:

$$L_i[v(Q)] = \int_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}} L_Q[N^i(Q, M)] \times \varphi(M) ds_M \quad (i = 1, 2)$$

e ricordando che $L_Q(N^i(Q, P)) = 0$ su $\mathfrak{F}_2\mathfrak{D}$ si ha l'asserto.

4) fissato quasi ovunque Q_0 su $\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}$ e un asse v uscente da Q_0 e non tangente a $\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}$ si ha, in virtù anche di (19), per $Q \in D^{13}$:

$$(20') \quad \lim_{Q \rightarrow Q_0 \text{ su } v} v_i(Q) = 0.$$

Resta da far vedere che il vettore $v(Q)$ soddisfa alla (11).

Posto, per semplicità, $Q_{r,t} \equiv [x_1(t, r), x_2(t, r)]$, dimostriamo che la funzione $P(Q_{r,t}) |v_i(Q_{r,t})|^2$ è sommabile in $\overline{t_1 t_2}$, uniformemente rispetto r , per r_0 sufficientemente piccolo.

Sia I un sottoinsieme di $\overline{t_1 t_2}$ misurabile rispetto all'ordinaria misura μ .

Si ha, in virtù di (20), per ogni fissato $r > 0$:

$$\begin{aligned} & \int_I P(Q_{r,t}) |v_i(Q_{r,t})|^2 dt = \\ & = \int_I \int_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}} P(Q_{r,t}) \{N^i(Q_{r,t}, M) \times \varphi(M)\} \{N^i(Q_{r,t}, R) \times \varphi(R)\} dt ds_M ds_R \end{aligned}$$

e per (16) il secondo membro è minore o uguale di

$$(21) \quad C \int_I \int_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}} \{H | \log \overline{Q_{r,t}M} | + H_1\} \{H | \log \overline{Q_{r,t}R} | + H_1\} |\varphi(M)| |\varphi(R)| dt ds_M ds_R \quad (C = \text{cost.}).$$

¹³ Cfr. ancora [9]. Sfruttando la (19) si riesce a dimostrare addirittura la continuità delle $v_i(Q)$ in tutto $\mathfrak{D} - Q_1 - Q_2$ e che il limite (20') vale per tutti i Q di $\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}$ eccettuati Q_1 e Q_2 .

Posto $Q_t \equiv [\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)]$, esistono due costanti K_1 e K_2 tali che per ogni M di $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$, uniformemente rispetto r , nell'intervallo \overline{or}_1 con $r_1 < r_0$ e sufficientemente piccolo, valga la limitazione

$$(22) \quad |\log \overline{Q_{r,t}M}| \leq K_1 |\log \overline{Q_tM}| + K_2.$$

È sufficiente dimostrare la validità di (22) per M appartenente a un arco σ sufficientemente piccolo di $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$, contenente il punto Q_t .

Sia r_t la tangente alla curva $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ nel punto Q_t , orientata nel verso delle t crescenti, e Γ_t la curva $t = \text{cost.}$ uscente dal punto Q_t . Indicato con ω_t l'angolo che la tangente alla Γ_t nel punto Q_t , orientata nel verso delle r crescenti, forma con la normale n_t a $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ in Q_t , $\cos \omega_t$ ammette estremo inferiore positivo Ω in $t_1 t_2$, come si verifica facilmente.

Indichiamo con M_0 la proiezione di M su r_t . Si possono dare due casi: o $Q_{r,t}$ e M stanno da parti opposte a n_t , oppure stanno dalla stessa parte.

Nel primo caso è ovvio che risulta

$$(22') \quad \overline{Q_{r,t}M} \geq \overline{Q_tM_0}.$$

Nel secondo caso, detta p_t la semiretta di origine Q_t , giacente dalla stessa parte di n_t dei punti $Q_{r,t}$ e M e facente con n_t un angolo il cui coseno sia uguale ad $\frac{\Omega}{2}$, si indichi con \overline{M} l'intersezione di p_t con la retta che unisce M_0 a $Q_{r,t}$. Per r sufficientemente piccolo risulta:

$$\overline{Q_{r,t}M_0} \geq \overline{MM_0} \geq \Omega \overline{M_0Q_t}.$$

D'altra parte se σ è sufficientemente piccolo, perchè $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ è di classe 2, si ha pure

$$\overline{MM_0} \leq g \overline{M_0Q_t}^2$$

(g costante indipendente da t e da M).

In definitiva si ha, sempre per r e σ sufficientemente piccoli,

$$(22'') \quad \overline{Q_{r,t}M} \geq \overline{Q_{r,t}M_0} - \overline{MM_0} \geq \Omega \overline{M_0Q_t} - g \overline{M_0Q_t}^2 \geq h \overline{M_0Q_t}$$

con h costante positiva opportuna e indipendente da t e M .

D'altra parte

$$\overline{MQ}_t = \sqrt{\overline{M_0Q^2} + \overline{MM_0^2}} \leq \sqrt{\overline{M_0Q_t^2} + \overline{gM_0Q_t^4}} \leq l\overline{M_0Q}_t$$

(l costante positiva)

e dunque da (22') e da (22'') si ha:

$$\overline{Q_{r,t}M} \geq H\overline{M_0Q}_t$$

con H costante positiva indipendente da t e M .

Quindi per r e σ sufficientemente piccoli

$$|\log \overline{Q_{r,t}M}| \leq |\log \overline{M_0Q}_t| + |\log H|$$

di qui la (22).

Ora per la proprietà γ) e per noto teorema ¹⁴⁾ $\int_I |\log \overline{M_0Q}_t| |\log \overline{RQ}_t| dt, \int_I |\log \overline{M_0Q}_t| dt, \int_I |\log \overline{RQ}_t| dt$, sono funzioni di M e R continue in $\mathfrak{F}_1\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}_1\mathfrak{D}$. Di qui la sommabilità in $I \times \mathfrak{F}_1\mathfrak{D} \times \mathfrak{F}_1\mathfrak{D}$ di

$$[K_1 |\log \overline{M_0Q}_t| + K_2][K_1 |\log \overline{RQ}_t| + K_2] |\varphi(M)| |\varphi(R)|.$$

Dalla (21) e da (22) segue allora la tesi.

Che il vettore $\mathbf{v}(Q)$ soddisfi alla (11) è allora conseguenza di un classico teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Dai risultati precedenti segue che il vettore $\mathbf{v}(Q)$ appartiene alla classe Γ e soddisfacendo alla (11), per il teorema di unicità dimostrato, esso è identicamente nullo in \mathfrak{D} .

Di qui si deduce che $\varphi(M)$ è quasi ovunque nullo in $\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}$.

Detto infatti $L^\circ(\mathbf{v})$ il vettore $L(\mathbf{v})$ quando si ponga $\lambda = \frac{k}{2+k}$ per Q_0 quasi ovunque su $\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}$ si ha

$$(23) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} L_i^\circ[\mathbf{v}(Q^\pm)] = \mp \pi \varphi_i(Q_0) + \int_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}} L_{Q_0}^\circ[N^i(Q_0, M)] \times \varphi(M) ds_M = 0 \quad (i = 1, 2)$$

¹⁴⁾ Cfr. [9].

dove, detto v l'asse uscente da Q_0 introdotto precedentemente, Q^+ e Q^- sono due punti di tale asse situati da bande opposte e a distanza δ da Q_0 stesso, rispettivamente interno ed esterno al dominio \mathfrak{D} .

Da (23) si ha

$$2\pi\varphi_i(Q_0) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Il teorema è così completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE. - Per lo stesso sistema di vettori w , di cui nell'introduzione, si potrebbe dimostrare anche la completezza lagrangiana su $\overline{\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}}$ qualora si possedesse un teorema di unicità per il problema misto in una classe Γ' di vettori che godono le stesse proprietà dei vettori di Γ eccettuata la (4). Ma di ciò mi occuperò prossimamente.

OSSERVAZIONE. - Circa la possibilità di estendere allo spazio il teorema del numero precedente, a parte le maggiori difficoltà formali che si incontrano soprattutto nell'enunciare le proprietà delle superfici analoghe alle curve γ_r , non si presentano nuove difficoltà concettuali sul procedimento da seguire.

Le limitazioni analoghe alle (16) sono ora le:

$$(24) \quad \begin{aligned} |N_i^h(Q, P)| &\leq H \frac{1}{QP} \\ \left| \frac{\partial N_i^h(Q, P)}{\partial x_m} \right| &\leq H \frac{1}{QP^2} \end{aligned} \quad (i, h, m = 1, 2, 3).$$

E le (24) si possono stabilire sfruttando recenti lavori di S. G. MIHLIN sulla risoluzione dei sistemi di equazioni integrali lineari a nucleo principale. Il sistema (2) verifica effettivamente le condizioni poste da quell'Autore per la risolubilità del corrispondente sistema di equazioni integrali e per lo svolgimento della teoria relativa.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CIMMINO G. - *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet.* (Rend. Circ. Matem. di Palermo, Tomo LXI, 1937, pag. 177 a 220).
- [2] FICHERA G. - *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico.* (Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, serie III, vol. IV, 1950, pag. 35-99).
- [3] FICHERA G. - *Sui problemi analitici dell'elasticità piana.* (Rend. Sem. della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari, vol. XVIII, 1948).
- [4] GIRAUD G. - *Equations a integrales principales, étude suivie d'une applications.* (Ann. Scient. Ecole Norm. Sup., serie III, t. 51, (1934), pag. 251-372).
- [5] GIRAUD G. - *Sur une classe d'equations linéaires ou figurent des valeurs principales d'intégrales simples.* (Ann. Ecole Norm. Sup., 3 serie, T. 56, (1939), p. 119-172).
- [6] MAGENES E. - *Sui problemi al contorno misti per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico.* (Annali Sc. Norm. Sup. di Pisa, serie III, vol. VIII, (1954), p. 93, 119).
- [7] MAGENES E. - *Osservazioni su alcuni teoremi di completezza connessi con i problemi misti per le equazioni lineari ellittiche.* (In corso di stampa sul Boll. dell'U.M.I.).
- [8] MIHLIN S. G. - *Singular integral equations.* (Amer. Math. Soc., Translation no 24, (1950), traduzione dal Russo da: Uspehi Matem. Nauk (N.S.), 3, no 3, (25), 29-112 (1948)).
- [9] MIRANDA C. - *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.* (Springer, Berlin, 1955).
- [10] PINI B. - *Sul primo problema di valori al contorno della teoria dell'elasticità.* (Rend. Sem. Matem. dell'Università di Padova, vol. XXI, 1952).