Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Domenico Boccioni

$\mathcal{P}$-gruppoide dei quozienti di un gruppoide con operatori

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 25 (1956), p. 176-195

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__25__176_0>

$\mathfrak{F}$-GRUPPOIDE DEI QUOZIENTI DI UN GRUPPOIDE CON OPERATORI

Nota (*) *di* Domenico Boccioni (*a Padova*)

Nella prima parte di questa nota viene risolto un problema d'immersione per un P-gruppoide (sinistro) G, cioè (n.° 1) per un gruppoide G dotato di uno pseudogruppo P di operatori soddisfacenti alle consuete condizioni, (sia G che P possono essere non commutativi).

Precisamente si dimostra un teorema (n.° 9) che dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un « $\mathfrak{F}$-gruppoide $\mathfrak{G}$ dei quozienti (a sinistra) di G rispetto ad M », ossia un'estensione $\mathfrak{G}$ dal dato G, ogni elemento ξ della quale sia rappresentabile nella forma $\xi = \beta^{-1}v$, con $\beta \in M$, $v \in G$. (Qui M denota un sotto-pseudogruppo di P costituito da elementi semplificabili, e $\mathfrak{F}$ lo pseudogruppo dei quozienti — a sinistra — di P rispetto ad M.)

In particolare, se P e G sono rispettivamente la parte moltiplicativa ed additiva di un anello A, il $\mathfrak{F}$-gruppoide $\mathfrak{G}$ non è altro (a meno di isomorfismi) che l'anello dei quozienti (a sinistra) di A rispetto ad M (n.[i] 8, 10).

Un secondo teorema (n.° 6) risolve lo stesso problema d'immersione per un R-gruppoide (sinistro) G, (R anello), e conduce alla definizione di « $\mathfrak{R}$-gruppoide dei quozienti di G », dove $\mathfrak{R}$ è adesso l'anello dei quozienti di R (a sinistra, rispetto ad M). Come corollario (n.° 6) si riottiene un risul-

---

(*) Pervenuta in Redazione il 25 agosto 1955.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

tato di Asano ([1] [1])) riguardante l'estensione di un R-modulo (sinistro).

1. - Siano G un *gruppoide* additivo, cioè un insieme in cui è definita un'operazione (univoca) binaria (non necessariamente commutativa) che chiamiamo addizione, e P uno pseudogruppo ([2], n.° 1) moltiplicativo.

Diremo (cfr. [6], p. 148) che G è un *P-gruppoide sinistro* se è definita una moltiplicazione (univoca) a sinistra di ogni elemento di P per ogni elemento di G la quale goda delle seguenti proprietà:

I) $au \in G$,

II) $a(u + u_1) = au + au_1$,

III) $a(a_1u) = (aa_1)u$,

qualunque siano a, $a_1 \in P$, u, $u_1 \in G$.

Dimostreremo (n.i 2-5) il seguente

TEOREMA: *Di uno pseudogruppo P sia M un sotto-pseudogruppo costituito da elementi semplificabili in P* ([2], n.° 1), *ed esista lo pseudogruppo $\mathfrak{S}$ dei quozienti a sinistra di P rispetto ad M* ([5], p. 1). *Se G è un P-gruppoide sinistro tale che:*

Ω) *Da $\alpha u = \alpha u_1$ ($\alpha \in M$, u, $u_1 \in G$) segue sempre $u = u_1$, è possibile immergere G in un $\mathfrak{S}$-gruppoide sinistro $\mathcal{G}$ tale che*

$$\mathcal{G} = \mathfrak{S}G,$$

denotandosi con $\mathfrak{S}G$ l'insieme di tutti i prodotti xu ($x \in \mathfrak{S}$, $u \in G$). $\mathcal{G}$ è univocamente determinato da G ed M a meno di isomorfismi.

Il desiderio di realizzare un'immersione del tipo ora illustrato nasce dalle considerazioni seguenti. È ben noto (si pensi ad es. all'N-gruppoide N dei numeri naturali) che, se G è il P-gruppoide sinistro di cui si parla nell'enunciato del teorema, l'equazione nell'incognita ξ

$$\beta\xi = au \qquad (\beta \in M,\ a \in P,\ u \in G) \tag{1}$$

non è generalmente risolubile in G. Può però accadere che,

[1]) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

per particolari β, a, u, esista una soluzione $\xi = v \in G$ della (1); tale soluzione v (necessariamente unica in virtù della Ω)) può allora convenzionalmente indicarsi col simbolo $(\beta^{-1}a)u$:

$$(2) \qquad v = (\beta^{-1}a)u,$$

cioè esprimersi (formalmente), come il prodotto dell'elemento $x = \beta^{-1}a$ di $\mathfrak{S}$ per l'elemento u di G. L'opportunità di questa notazione risulta dall'osservare che $\beta_1^{-1}a_1 = \beta^{-1}a$ in $\mathfrak{S}$ ($\beta_1 \in M$, $a_1 \in P$) implica $(\beta_1^{-1}a_1)u = v = (\beta^{-1}a)u$ (infatti — [5], pp. 1, 2 — se $\delta \in M$, $d \in P$ son tali che $\delta\beta_1 = d\beta$, da questa, poichè $\beta_1^{-1}a_1 = \beta^{-1}a$, segue $\delta a_1 = da$, quindi $(d\beta)v = (da)u$ implica $\delta(\beta_1 v) = \delta(a_1 u)$ ossia appunto, per la Ω), $\beta_1 v = a_1 u$), dunque, mediante l'equazione (1), resta effettivamente definita una *moltiplicazione* (univoca) di $x = \beta^{-1}a \in \mathfrak{S}$ per $u \in G$ il cui risultato xu appartiene a G. Distinguiamo allora due casi.

Se l'equazione (1) è risolubile in G qualunque siano $\beta \in M$, $a \in P$, $u \in G$, e quindi la moltiplicazione suddetta è definita per ogni coppia x, u ($x \in \mathfrak{S}$, $u \in G$), per questa moltiplicazione valgono le I), II), III) (ove si legga x, $x_1 \in \mathfrak{S}$ invece risp. di a, $a_1 \in P$), cioè G risulta un $\mathfrak{S}$-gruppoide sinistro, che indicheremo con $\mathcal{G}$, che evidentemente è un'estensione del P-gruppoide sinistro dato (ossia — avendosi $\beta \cdot au = \beta a \cdot u$ qualunque sia $\beta \in M$ — il nuovo prodotto xu di $x = a \in P$ per $u \in G$ coincide col vecchio au) e per il quale si ha $\mathcal{G} = \mathfrak{S}G$ ($u = (\beta^{-1}\beta)u$). Infatti, quanto alla II), da $\beta v = au$, $\beta v_1 = au_1$ segue appunto $\beta(v + v_1) = a(u + u_1)$; quanto alla III), se $x = \beta^{-1}a$, $x_1 = \beta_1^{-1}a_1 \in \mathfrak{S}$, si ha ([5], p. 2) $xx_1 = (\gamma\beta)^{-1}ga_1$ con $\gamma a = g\beta_1$ ($\gamma \in M$, $g \in P$), e quindi, posto $v' = x_1 u$, $w = (xx_1)u$, da $\beta_1 v' = a_1 u$, $\gamma\beta w = ga_1 u$ segue $\gamma\beta w = g\beta_1 v' = \gamma a v'$, donde (per la Ω)) $\beta w = av'$, cioè appunto $w = x(x_1 u)$.

Se l'equazione (1) non è sempre risolubile in G, vien da pensare se esista un P-gruppoide sinistro $\mathcal{G}$, estensione (propria) del dato G, in cui tale equazione sia invece sempre risolubile. A tale quesito dà appunto risposta affermativa il teorema sopra enunciato, di cui ora diamo la dimostrazione.

2. - Sia $\mathfrak{T}$ l'insieme delle terne ordinate di elementi (β, a, u), con $\beta \in M$, $a \in P$, $u \in G$. Porremo

$$(3) \qquad (\beta, a, u) \backsim (\beta_1, a_1, u_1)$$

se esistono tre elementi $r,\ r_1 \in P,\ \alpha \in M$ tali che

$$r\beta = r_1\beta_1 = \alpha\,, \tag{4}$$

$$rau = r_1a_1u_1\,. \tag{4'}$$

Premettiamo il seguente

LEMMA: *Nelle ipotesi del teorema del n.º* 1, *le eguaglianze* (4), (4') *e la seguente*

$$r'\beta = r_1'\beta_1\,, \tag{5}$$

dove $r,\ r_1,\ a,\ a_1,\ r',\ r_1' \in P,\ \beta,\ \beta_1,\ \alpha \in M$, *implicano*

$$r'au = r_1'a_1u_1\,.$$

Dimostrazione: Posto $r'\beta = r_1'\beta_1 = a'$, se $g \in P,\ \gamma \in M$ son tali che ([5], Th. 1) $g\alpha = \gamma a'$, da questa e dalle (4), (5) segue $gr\beta = \gamma r'\beta,\ gr_1\beta_1 = \gamma r_1'\beta_1$, da cui risp. $gr = \gamma r'$, $gr_1 = \gamma r_1'$; quindi $grau = gr_1a_1u_1$ (v. (4')) implica $\gamma r'au = \gamma r_1'a_1u_1$, donde appunto (per la Ω)) la (5').

La relazione (3) è evidentemente riflessiva e simmetrica. Essa è anche transitiva. Se infatti $(\beta_1,\ a_1,\ u_1) \backsim (\beta_2,\ a_2,\ u_2)$, poichè esistono $r',\ r_1',\ r_2' \in P,\ \alpha' \in M$ tali che $r'\beta = r_1'\beta_1 = r_2'\beta_2 = \alpha'$ ([5], Lemma 1), dal lemma ora dimostrato segue $r'au = r_1'a_1u_1 = r_2'a_2u_2$, quindi appunto $(\beta,\ a,\ u) \backsim (\beta_2,\ a_2,\ u_2)$.

La relazione 3) è dunque una relazione di equivalenza fra gli elementi di $\mathcal{T}$. La classe delle terne equivalenti a $(\beta,\ a,\ u) \in \mathcal{T}$ verrà denotata con $[(\beta,\ a,\ u)]$ e l'insieme di tutte queste classi con $\mathcal{G}'$. In $\mathcal{G}'$ si ha dunque la seguente *definizione di eguaglianza*:

$$[(\beta,\ a,\ u)] = [(\beta_1,\ a_1,\ u_1)] \tag{6}$$

se e soltanto se esistono tre elementi $r,\ r_1\ \ P,\ \alpha \in M$ per cui valgono le (4), (4').

In $\mathcal{G}'$ si ha dunque in particolare

$$[(\beta,\ a,\ u)] = [(\mu\beta,\ \mu a,\ u)], \tag{7}$$

qualunque sia $\mu \in M$. Infatti $\lambda\mu \cdot \beta = \lambda \cdot \mu\beta,\ \lambda\mu \cdot au = \lambda \cdot \mu au$, qualunque sia $\lambda \in M$.

Si osservi inoltre che, *se in particolare* $\beta = \beta_1$, *la* (6) *è vera se e soltanto se* $au = a_1 u_1$. Infatti, se la (6) è vera, dalle (5) con $r' = r_1' = \rho \in M$ segue, per il precedente lemma, $\rho au = \rho a_1 u_1$, donde appunto (per la Ω)) $au = a_1 u_1$; il viceversa è immediato. Ne segue ad es. che ($b \in P$):

$$[(\beta, a, bu)] = [(\beta, ab, u)]. \tag{8}$$

Osserveremo infine che, *se* $r\beta = \alpha$ *con* $r \in P$, $\alpha \in M$, *si ha*

$$[(\beta, a, u)] = [(\alpha, r, au)]. \tag{9}$$

Infatti, se μ è un qualsiasi elemento di M, si ha $\mu r \cdot \beta = \mu\alpha \in M$, $\mu r \cdot au = \mu \cdot rau$.

3. - Diamo in G′ la seguente *definizione di addizione*:

$$[(\beta, a, u)] + [(\beta_1, a_1, u_1)] = [(\alpha^2, \alpha, rau + r_1 a_1 u_1)], \tag{10}$$

dove $\alpha \in M$, r, $r_1 \in P$ son tre elementi per cui valgono le (4).

La somma a 2° membro della (10) non dipende dalla scelta degli elementi (certo esistenti: [5], Lemma 1) r, $r_1 \in P$, $\alpha \in M$, soddisfacenti alle (4). Infatti, se r', $r_1' \in P$, $\alpha' \in M$ son tali che $r'\beta = r_1'\beta_1 = \alpha'$, ed s, $s' \in P$, $\gamma \in M$ son tali che ([5], Lemma 1):

$$s\alpha^2 = s'\alpha'^2 = \gamma, \tag{11}$$

da questa e dalle (4), (5) si trae $s\alpha r = s'\alpha' r'$, $s\alpha r_1 = s'\alpha' r_1'$, donde

$$s\alpha(rau + r_1 a_1 u_1) = s'\alpha'(r'au + r_1' a_1 u_1),$$

che, assieme alle (11), prova appunto l'asserto.

La somma a 2° membro della (10) non dipende neppure dalla scelta dei rappresentanti delle due classi a 1° membro. Infatti, se $[(\beta, a, u)] = [(\beta', a', u')]$, cioè se esistono c, $c' \in P$, $\delta \in M$ tali che

$$c\beta = c'\beta' = \delta\ , \quad cau = c'a'u', \tag{12}$$

e se inoltre $[(\beta_1, a_1, u_1)] = [(\beta_1', a_1', u_1')]$, cioè se esistono c_1, $c_1' \in P$, $\delta_1 \in M$ tali che

$$c_1\beta_1 = c_1'\beta_1' = \delta_1\ , \quad c_1 a_1 u_1 = c_1' a_1' u_1', \tag{13}$$

assunti ([5], Lemma 1) $d, d_1 \in P$, $\lambda \in M$ tali che $d\delta = d_1\delta_1 = \lambda$, da queste e dalle $(12)_1$, $(13)_1$ si trae

$$dc \cdot \beta = d_1c_1 \cdot \beta_1 = \lambda \quad , \quad dc' \cdot \beta' = d_1c_1' \cdot \beta_1' = \lambda$$

donde risp.

$$[(\beta, a, u)] + [(\beta_1, a_1, u_1)] = [(\lambda^2, \lambda, dcau + d_1c_1a_1u_1)],$$
$$[(\beta', a', u')] + [(\beta_1', a_1', u_1')] = [(\lambda^2, \lambda, dc'a'u' + d_1c_1'a_1'u_1')].$$

Ma poichè dalle $(12)_2$, $(13)_2$ discende

$$\lambda(dcau + d_1c_1a_1u_1) = \lambda(dc'a'u' + d_1c_1'a_1'u_1'),$$

per un'osservazione del n.° 2 (penult. capov.) è provato l'asserto.

Si osservi che, *se in particolare* $\beta = \beta_1$, *si ha*

$$[(\beta, a, u)] + [(\beta, a_1, u_1)] = [(\beta^2, \beta, au + a_1u_1)]. \tag{14}$$

Infatti dalle (4), con $\beta = \beta_1$, $r = r_1 = \beta$, segue $[(\beta, a, u)] + [(\beta, a_1 u_1)] = [(\beta^4, \beta^2, \beta au + \beta a_1u_1)] = [(\beta^4, \beta^3, au + a_1u_1)] = [(\beta^2, \beta, au + a_1u_1)]$ avendo tenuto conto del penult. capov. del n.° 2 e della (7).

Se l'addizione in G è *associativa*, tale è pure la (10) in $\mathcal{G}'$. Infatti, in corrispondenza a tre qualsiasi addendi $[(\beta, a, u)]$, $[(\beta_1, a_1, u_1)]$, $[(\beta_2, a_2, u_2)]$ esistono ([5], Lemma 1) $r, r_1, r_2 \in P$, $\alpha \in M$ tali che $r\beta = r_1\beta_1 = r_2\beta_2 = \alpha$. In relazione a queste eguaglianze, basta allora scrivere ciascun addendo nella forma (9) ed applicare quindi la (14) (ricordando la (7)).

È poi evidente che se l'addizione in G è *commutativa*, tale è pure la (10) in $\mathcal{G}'$.

Se il gruppoide G è un *semigruppo* ([2], n.° 1), anche $\mathcal{G}'$ è un semigruppo. Infatti, posto $\xi' = [(\beta, a, u)]$, $\xi_i' = [(\beta_i, a_i, u_i)]$ $(i = 1, 2)$ e supponendo, com'è lecito (cfr. il penult. capov.) $\beta = \beta_1 = \beta_2$, da $\xi' + \xi_1' = \xi' + \xi_2'$, cioè (v. (14) e penult. capov. del n.° 2) da $\beta(au + a_1u_1) = \beta(au + a_2u_2)$, segue (per la Ω)) $au + a_1u_1 = au + a_2u_2$, donde ($G$ semigruppo) $a_1u_1 = a_2u_2$, ossia appunto (penult. capov. del n.° 2) $\xi_1' = \xi_2'$. Analogamente, da $\xi_1' + \xi' = \xi_2' + \xi'$ segue $\xi_1' = \xi_2'$.

Se il gruppoide G è dotato di *zero* 0 $(u+0=0+u=u$ per ogni $u \in G$ — cfr. [3], p. 34 —) tale che

$$a0 = 0 \text{ per ogni } a \in P, \tag{15}$$

$[(\beta, a, 0)]$ $(\beta \in M, a \in P)$ è lo zero di $\mathcal{G}'$, (v. (14), (7) e penult. capov. del n.° 2). La (15) è in particolare soddisfatta se G è un semigruppo dotato di zero (infatti $a0 + au = a(0+u) = au = 0 + au$ implica appunto $a0 = 0$).

Nelle ipotesi del precedente capov., se u' è un *opposto* di u in G $(u'+u=u+u'=0)$, $[(\beta, a, u')]$ è un opposto di $[(\beta, a, u)]$ in $\mathcal{G}'$ (v. (14)). Dunque in particolare se G è un *gruppo* anche $\mathcal{G}'$ è un gruppo.

4. - Diamo ora la seguente *definizione di moltiplicazione di* $b \in P$ *per* $[(\beta, a, u)] \in \mathcal{G}'$:

$$b \cdot [(\beta, a, u)] = [(\nu, qa, u)], \tag{16}$$

dove $\nu \in M$, $q \in P$ son due elementi tali che

$$\nu b = q\beta. \tag{16'}$$

Il prodotto a 2° membro della (16) non dipende dalla scelta degli elementi $\nu \in M$, $q \in P$ soddisfacenti alla (16') (i quali esistono certamente: [5], Th. 1). Se infatti si ha $\nu' b = q'\beta$, con $\nu' \in M$, $q' \in P$, ed $s, s' \in P$ son tali che ([5], Lemma 1):

$$s\nu = s'\nu' \in M, \tag{17}$$

segue $s\nu b = s'\nu' b$, $sq\beta = s'q'\beta$, donde $sq = s'q'$ e quindi $sqau = s'q'au$, che, insieme alla (17), prova appunto che $[(\nu, qa, u)] = [(\nu', q'a, u)]$.

Inoltre da $b = b'$, $[(\beta, a, u)] = [(\beta', a', u')]$ segue $b[(\beta, a, u)] = b'[(\beta', a', u')]$. Infatti, se $\nu_1 \in M$, $q_1 \in P$ son tali che $\nu_1 b' = q_1 \beta'$, assunti $r, r_1 \in P$, $\gamma \in M$ tali che $r\nu = r_1\nu_1 = \gamma$, da (v. (16')) $r\nu b = rq\beta$, $r_1\nu_1 b' = r_1 q_1 \beta'$ segue (poichè $b' = b$) $\gamma b = rq \cdot \beta = r_1 q_1 \cdot \beta'$, donde

$$b[(\beta, a, u)] = [(\gamma, rqa, u)], \quad b'[(\beta', a', u')] = [(\gamma, r_1 q_1 a', u')].$$

Quindi, poichè $[(\beta, a, u)] = [(\beta', a', u')]$, $rq\beta = r_1 q_1 \beta'$ implicano (lemma del n.° 2) $rqau = r_1q_1a'u'$, si è dimostrato l'asserto (penult. capov. del n.° 2).

Verifichiamo adesso che rispetto all'eguaglianza (6), all'addizione (10) e alla moltiplicazione (16)) $\mathcal{G}'$ è un P-gruppoide sinistro, cioè che valgono le II), III) del n.° 1 (ove si legga ξ', $\xi_1' \in \mathcal{G}'$ invece di u, $u_1 \in G$). Infatti, quanto alla II), posto

$$\xi' = [(\beta,\ a,\ u)]\ ,\quad \xi_1' = [(\beta_1,\ a_1,\ u_1)] \tag{18}$$

e supponendo, com'è lecito (cfr. il 5° — ult. capov. del n.° preced.), $\beta = \beta_1$, se $\nu_0 \in M$, $q_0 \in P$ son tali che $\nu_0 b = q_0\beta^2$, ricordando le (14), (7), (8) risulta appunto ($b \in P$):

$$\begin{aligned} b(\xi' + \xi_1') &= [(\nu_0,\ q_0\beta,\ au + a_1u_1)] = [(\nu_0^2,\ \nu_0,\ q_0\beta(au + a_1u_1))] = \\ &= [(\nu_0,\ q_0\beta,\ au)] + [(\nu_0,\ q_0\beta,\ a_1u_1)] = b\xi' + b\xi_1'. \end{aligned}$$

Quanto alla III), dati b_1, $b \in P$, $\xi' \in \mathcal{G}'$, se $\nu \in M$, $q \in P$ soddisfano alla (16') e ν^*, q^* son tali che $\nu^* b_1 = q^*\nu$, si ha appunto

$$b_1(b\xi') = [(\nu^*,\ q^*qa,\ u)] = (b_1b)\xi',$$

poichè $\nu^* b_1 b = q^*\nu b = q^*q\beta$.

Lemma: I simboli P ed M abbiano il significato detto nell'enunciato del teorema del n.° 1, ed esista lo pseudogruppo dei quozienti a sinistra di P rispetto ad M. Allora, se $b\beta \in M$, con $b \in P$, $\beta \in M$, esiste un $a \in P$ tale che $ab \in M$.

Dimostrazione: nelle fatte ipotesi esistono ([5], th. 1) $a \in P$, $\lambda \in M$ tali che $a \cdot b\beta = \lambda\beta$, donde appunto, semplificando per β, $ab = \lambda$.

Il P-gruppoide sinistro $\mathcal{G}'$ soddisfa alla condizione Ω) del n. 1 (ove si legga ξ', $\xi_1' \in \mathcal{G}'$ invece di u, $u_1 \in G$). Infatti, dato $\alpha \in M$ e supponendo ancora nelle (18) $\beta = \beta_1$, se $\nu_2 \in M$, $q_2 \in P$ son tali che

$$\nu_2\alpha = q_2\beta, \tag{19}$$

da $\alpha\xi' = \alpha\xi_1'$ segue (v. la (16) e il penult. capov. del n.° 2) $q_2au = q_2a_1u_1$, quindi pure, dato che (per la (19)) $q_2\beta \in M$: $cq_2au = cq_2a_1u_1$, con $c \in P$ tale che (lemma preced.) $cq_2 \in M$.

Per la Ω) del n.° 1 ne segue allora $au = a_1 u_1$, ossia appunto (penult. capov. del n.° 2) $\xi' = \xi_1'$.

Verifichiamo ora che l'equazione (1), ove si legga $\xi_1' \in \mathcal{G}'$ invece di $u \in G$, ammette sempre una soluzione $\xi = \xi_0' \in \mathcal{G}'$. Se $\xi_1' = [(\beta_1, a_1, u_1)]$, si ha precisamente

$$\xi_0' = [(\bar{\nu}\beta, \bar{q}a_1, u_1)],$$

con $\bar{\nu} \in M$, $\bar{q} \in P$ tali che $\bar{\nu}a = \bar{q}\beta_1$. Infatti, per la (16) ($\bar{\nu}^2\beta = = \bar{\nu} \cdot \bar{\nu}\beta$) e la (7), si ha appunto $\beta\xi'_0 = [(\bar{\nu}^2, \bar{\nu}\bar{q}a_1, u_1)] = [(\bar{\nu}, \bar{q}a_1, u_1)] = a\xi_1'$.

Resta perciò definita (n.° 1, terzult. capov.) una *moltiplicazione di* $x = \beta^{-1}a \in \mathfrak{F}$ *per* $\xi_1' = [(\beta_1, a_1, u_1)] \in \mathcal{G}'$, e precisamente si ha la regola:

$$(\beta^{-1}a) \cdot [(\beta_1, a_1, u_1)] = [(\bar{\nu}\beta, \bar{q}a_1, u_1)], \tag{20}$$

dove $\bar{\nu} \in M$, $\bar{q} \in P$ son due elementi tali che

$$\bar{\nu}a = \bar{q}\beta_1. \tag{20'}$$

(Naturalmente questa moltiplicazione avrebbe potuto anche esser definita direttamente mediante le (20), (20').)

Rispetto all'eguaglianza (6), *all'addizione* (10) *e alla moltiplicazione* (20), *l'insieme* $\mathcal{G}'$ (n.° 2) *delle classi di equivalenza* $[(\beta, a, u)]$ ($\beta \in M$, $a \in P$, $u \in G$) *è un* $\mathfrak{F}$*-gruppoide sinistro* (n.° 1, penult. capov.). In questo si ha in particolare

$$1 \cdot \xi_1' = \xi_1' \quad \text{per ogni } \xi_1' \in \mathcal{G}', \tag{21}$$

1 denotando l'elemento unità di $\mathfrak{F}$, (infatti, per la Ω) — v. qui sopra —, da $\beta\xi_0' = \beta\xi_1'$ segue appunto $\xi_0' = \xi_1'$).

5. - Consideriamo la corrispondenza

$$u \rightarrow [(\beta, \beta, u)] \tag{22}$$

fra il dato P-gruppoide sinistro G e il sottinsieme G' di $\mathcal{G}'$ così definito:

$$[(\beta, \beta, u)] \in G' \qquad (\beta \in M,\ u \in G). \tag{23}$$

La (22), che è manifestazione biunivoca (si ricordi la Ω)), è un P-isomorfismo (cfr. [6], p. 149). Infatti, posto

$$\eta_i' = [(\beta, \beta, u_i)] \qquad (i = 1, 2),$$

si ha (per le (7), (8), (14)): $[(\beta, \beta, u_1 + u_2)] = [(\beta^2, \beta, \beta u_1 + + \beta u_2)] = \eta_1' + \eta_2'$, cioè

$$u_1 + u_2 \to \eta_1' + \eta_2'.$$

Inoltre, se $b \in P$, scelti $\nu \in M$, $q \in P$ tali che $\nu b = q\beta$, per le (8), (16) risulta $[(\nu, \nu, bu_1)] = [(\nu, \nu b, u_1)] = [(\nu, q\beta, u_1)] = = b[(\beta, \beta, u_1)]$, ossia

$$bu_1 \to b\eta_1'.$$

Posto allora

$$\mathcal{G} = (\mathcal{G}' \dot{-} G') \dot{+} G, \tag{24}$$

detta Ψ la corrispondenza biunivoca fra $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ che subordina l'identità in $\mathcal{G}' \dot{-} G'$ e il P-isomorfismo (22) fra G e G', definiti, se $\xi_1 \to \xi_1'$ e $\xi_2 \to \xi_2'$ in Ψ ($\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{G}$, $\xi_1', \xi_2' \in \mathcal{G}'$), la somma $\xi_1 + \xi_2$ in $\mathcal{G}$ e il prodotto $x\xi_1$ di $x \in \mathfrak{F}$ per $\xi_1 \in \mathcal{G}$ risp. come i corrispondenti in Ψ di $\xi_1' + \xi_2'$ ed $x\xi_1'$, l'insieme $\mathcal{G}$ risulta un $\mathfrak{F}$-gruppoide sinistro $\mathfrak{F}$-isomorfo (mediante la Ψ) a $\mathcal{G}'$.

È chiaro che questo $\mathfrak{F}$-gruppoide sinistro $\mathcal{G}$ è un'estensione del lato P-gruppoide sinistro G. Inoltre, se $\xi \in \mathcal{G}$ ed in Ψ si ha

$$\xi \to \xi' = [(\beta, a, u,)]$$

dato che, per la (20), in $\mathcal{G}'$ è

$$\xi' = (\beta^{-1}a) \cdot [(\beta, \beta, u)]$$

(infatti questo prodotto, se $\nu \in M$, $q \in P$ son tali che $\nu a = q\beta$, vale appunto $[(\nu\beta, \nu a, u)] = \xi'$), in $\mathcal{G}$ risulta

$$\xi = (\beta^{-1}a)u,$$

cioè si ha $\mathcal{G} = \mathfrak{F}G$.

Supponiamo adesso che $\bar{\mathcal{G}}$ sia un qualsiasi $\mathfrak{F}$-gruppoide sinistro, estensione del dato P-gruppoide sinistro G, tale che $\bar{\mathcal{G}} = \mathfrak{F}G$. È facile allora vedere che $\bar{\mathcal{G}}$ è $\mathfrak{F}$-isomorfo al $\mathfrak{F}$-gruppoide sinistro $\mathcal{G}$ sopra costruito. Basta infatti considerare fra $\bar{\mathcal{G}}$ e $\mathcal{G}$ la corrispondenza che si ottiene associando gli elementi che ammettono una medesima rappresentazione $\beta^{-1}au$ ($\beta \in M$, $a \in P$, $u \in G$):

$$\bar{\xi} = \beta^{-1}au \rightarrow \xi = \beta^{-1}au. \tag{25}$$

Affinchè sia $\beta^{-1}au = \beta_1^{-1}a_1u_1$ in $\bar{\mathcal{G}}$ (in $\mathcal{G}$) è necessario e sufficiente (come subito si verifica) che estano r, $r_1 \in P$, $\alpha \in M$ soddisfacenti alle (4), (4'); perciò la (25) è biunivoca. Inoltre, se r, $r_1 \in P$, $\alpha \in M$ soddisfano alle (4), sia in $\bar{\mathcal{G}}$ che in $\mathcal{G}$ si ha $\beta^{-1}au + \beta_1^{-1}a_1u_1 = (\alpha^2)^{-1}\alpha(rau + r_1a_1u_1)$, e se $\bar{\nu} \in M$, $\bar{q} \in P$ soddisfano alla (20'), si ha $(\beta^{-1}a)(\beta_1^{-1}a_1u_1) = (\bar{\nu}\beta)^{-1}\bar{q}a_1u_1$; donde l'asserto.

Il teorema enunciato al n.$_0$ 1 è quindi completamente dimostrato.

6. - Se nello pseudogruppo P di cui si parla nell'enunciato del teor. del n.° 1 è definita, oltre alla moltiplicazione, anche un'addizione in modo che, rispetto a queste due operazioni, P sia un anello, è noto (cfr. [5], p. 4) che nello pseudogruppo $\mathfrak{F}$ (dei quozienti a sinistra di P rispetto ad M) si può allora definire un'addizione in modo che anche $\mathfrak{F}$ diventi un anello: l'anello dei quozienti a sinistra di P rispetto ad M.

In questa ipotesi (P anello), dicendo che G è un *P-gruppoide sinistro* (cfr. n.° 1) intenderemo che, oltre alle I), II), III) del n.° 1, valga pure la:

IV) $(a + a_1)u = au + a_1u$.

Si vede allora facilmente che nel penult. capov. del n.° 1 si può concludere inoltre (se P è un anello) che vale anche la IV). Infatti da $\beta v = au$, $\beta_1 v_1 = a_1u$, se r, $r_1 \in P$, $\alpha \in M$ son tali che valgono le (4), segue $\alpha v = rau$, $\alpha v_1 = r_1a_1u$, donde (per le II), IV)) $\alpha(v + v_1) = (ra + r_1a_1)u$. Ma questa, posto $x = \beta^{-1}a$, $x_1 = \beta_1^{-1}a_1$, dato che in $\mathfrak{F}$ si ha $x + x_1 = \alpha^{-1}(\alpha x + \alpha x_1) = \alpha^{-1}(ra + r_1a_1)$, dimostra appunto che $v + v_1 = xu + x_1u = (x + x_1)u$.

Anche nel 3° capov. del n.° 4 si può inoltre concludere (se P è un anello) che vale la IV). Infatti, posto $\xi' = [(\beta, a, u)]$, se b, $b_1 \in P$, scelti ν, $\nu_1 \in M$, q, $q_1 \in P$ tali che

$$\nu b = q\beta \quad , \quad \nu_1 b_1 = q_1\beta, \tag{26}$$

si ha $b\xi' = [(\nu, qa, u)]$, $b_1\xi' = [(\nu_1, q_1a, u)]$, donde, se s, $s_1 \in P$, $\gamma \in M$ son tali che $s\nu = s_1\nu_1 = \gamma$, risulta appunto (ricordando le (8), (7)):

$$b\xi' + b_1\xi' = [(\gamma^2, \gamma, (sq + s_1q_1)au)] = [(\gamma, (sq + s_1q_1)a, u)] = \\ = (b + b_1)\xi',$$

l'ultimo passaggio conseguendo dall'osservare che dalle (26) discende $\gamma b = sq\beta$, $\gamma b_1 = s_1q_1\beta$, $\gamma(b + b_1) = (sq + s_1q_1)\beta$.

Ne consegue che la conclusione dell'ultimo capov. del n.° 4 si può ora intendere nel senso che $\mathcal{G}'$ è un P-gruppoide sinistro secondo la definizione di questo n.°; quindi vale il

TEOREMA: *Di un anello R sia M un sottinsieme moltiplicativamente chiuso e costituito da elementi non divisori dello zero* (cfr. [2], n. 8), *ed esista l'anello $\mathfrak{R}$ dei quozienti a sinistra di R rispetto ad M* (cfr. [1], p. 73). *Se G è un R-gruppoide sinistro soddisfacente alla condizione* Ω) *del n.°* 1, *è possibile immergere G in un $\mathfrak{R}$-gruppoide sinistro $\mathcal{G}$, univocamente determinato a meno di isomorfismi, tale che $\mathcal{G} = \mathfrak{R}G$.*

Se supponiamo inoltre che il gruppoide G sia un gruppo commutativo (ossia un modulo — cfr. [6], p. 23 —), dal precedente teorema, per quanto osservato al n.° 3 (ult. e 4°-ult. capov.), segue il

COROLLARIO: *R, M ed $\mathfrak{R}$ avendo il significato detto nell'enunciato del teorema precedente, se G è un R-modulo sinistro tale che da $\alpha v = 0$ ($\alpha \in M$, $v \in G$) segue sempre $v = 0$, è possibile immergere G in un $\mathfrak{R}$-modulo sinistro $\mathcal{G}$, univocamente determinato a meno di isomorfismi, tale che $\mathcal{G} = \mathfrak{R}G$.*

Questo risultato, qui ritrovato per altra via, è dovuto ad Asano ([1], *Satz* 7 a p. 76).

7. - È chiaro (cfr. [4], p. 163) cosa debba intendersi per un *P-gruppoide destro* (n.° 1) oppure per un *R-gruppoide destro* (n.° 6), P ed R essendo risp. uno pseudogruppo ed un anello.

Vale il teorema che si deduce da quello del n.° 1 *leggendo destra* (-o) *invece di sinistra* (-o), *ed $u\alpha$, $u_1\alpha$, $G\mathfrak{P}$, ux invece risp. di αu, αu_1, $\mathfrak{P}G$, xu.* Infatti, se P' è lo pseudogruppo che ha gli stessi elementi di P ma questa nuova definizione di moltiplicazione (a', $b' \in P'$, a, $b \in P$): $a'b' = ba$, con $b = b'$, $a = a'$, e se G' è il P'-gruppoide sinistro che ha gli stessi elementi e la stessa definizione di addizione di G ma la seguente definizione di moltiplicazione di $a' \in P'$ per $u' \in G'$: $a'u' = ua$, con $u = u'$, $a = a'$ $(u \in G,\ a \in P)$, allora, per il teorema del n.° 1, G' è immergibile in un $\mathfrak{F}'$-gruppoide sinistro $\mathfrak{G}'$ tale che $\mathfrak{G}' = \mathfrak{F}'G'$, dove $\mathfrak{F}'$ è lo pseudogruppo dei quozienti a sinistra di P' rispetto ad M; ne segue che il $\mathfrak{F}$-gruppoide destro $\mathfrak{G}$ che si deduce da $\mathfrak{G}'$ con procedimento analogo a quello seguito per dedurre G' da G è appunto quello la cui esistenza è affermata dal teorema in discorso. Inoltre, considerato un qualsiasi $\mathfrak{F}$-gruppoide destro $\bar{\mathfrak{G}}$, estensione del dato P-gruppoide destro G, tale che $\bar{\mathfrak{G}} = G\mathfrak{F}$, il $\mathfrak{F}'$-gruppoide sinistro $\bar{\mathfrak{G}}'$ dedotto da $\bar{\mathfrak{G}}$ come sopra G' da G è $\mathfrak{F}'$-isomorfo (per il teor. del n.° 1) a $\mathfrak{G}'$; quindi $\bar{\mathfrak{G}}$ risulta appunto $\mathfrak{F}$-isomorfo a $\mathfrak{G}$.

Vale pure il teorema che si deduce da quello del n.° 6 leggendo destra (-o) invece di sinistra (-o), ed $u\alpha$, $u_1\alpha$, $G\mathfrak{R}$ invece risp. di αu, αu_1, $\mathfrak{R}G$. La dimostrazione è pressochè identica a quella del preced. capov. (si considererà ora l'anello R' avente lo stesso gruppo additivo di R ma il nuovo pseudogruppo moltiplicativo dedotto da quello di R come sopra G' da G).

Se in particolare lo pseudogruppo P è commutativo, ogni P-gruppoide sinistro G si può considerare (con la convenzione che sia $au = ua$ per ogni coppia di elementi $a \in P$, $u \in G$) come un P-gruppoide destro, e viceversa (cfr. [4], p. 164), onde si può in tal caso semplicemente parlare di un *P-gruppoide*; analogamente si parlerà (se l'anello R è commutativo) di un *R-gruppoide.*

Con referenza al teor. del n.° 1, se P è commutativo, nel $\mathfrak{F}$-gruppoide $\mathfrak{G}$ (ogni elemento ξ del quale è rappresentabile nella forma $\xi = \beta^{-1}au$, con $\beta \in M$, $a \in P$, $u \in G$) valgono evidentemente le seguenti usuali regole di calcolo (posto $\beta^{-1}a = a/\beta$):

$$\frac{a}{\beta}u = \frac{a_1}{\beta_1}u_1 \text{ se e soltanto se } \beta_1 a u = \beta a_1 u_1, \tag{27}$$

$$\frac{a}{\beta}u + \frac{a_1}{\beta_1}u_1 = \frac{\beta}{\beta^2\beta_1}(\beta_1 a u + \beta a_1 u_1), \tag{27}$$

$$\frac{a}{\beta}\left(\frac{a_1}{\beta_1}u_1\right) = \frac{aa_1}{\beta\beta_1}u_1. \tag{27}$$

Quindi, poichè $\mathfrak{G}$ è $\mathfrak{F}$-isomorfo (n.° 5), mediante la corrispondenza $\beta^{-1}au \rightarrow [(\beta, a, u)]$, al $\mathfrak{F}$-gruppoide $\mathfrak{G}'$ delle classi di equivalenza $[(\beta, a, u)]$ (n.° 4), *se P è commutativo, le definizioni* (6), (10), (20) *sono risp. equivalenti alle seguenti*:

$(\overline{6})$ $[(\beta, a, u)] = [(\beta_1, a_1, u_1)]$ se e soltanto se $\beta_1 au = \beta a_1 u_1$,

$(\overline{10})$ $[(\beta, a, u)] + [(\beta_1, a_1, u_1)] = [(\beta^2\beta_1, \beta, \beta_1 au + \beta a_1 u_1)]$,

$(\overline{20})$ $$\frac{a}{\beta}[(\beta_1, a_1, u_1)] = [(\beta\beta_1, aa_1, u_1)].$$

Ciò può anche dedursi direttamente dalle (6), (10), (20) (assumendo $r = \beta_1$, $r_1 = \beta$, $\alpha = \beta\beta_1$, $\bar{\nu} = \beta_1$, $\bar{q} = a$, e ricordando la (7)).

Naturalmente le osservazioni del preced. capov. valgono pure, se l'anello R è commutativo, con referenza al teor. del n.° 6 (e al relativo corollorio). Ad es. ogni modulo G (cioè ogni gruppo abeliano additivo) può notoriamente considerarsi (cfr. [6], p. 45, form. (2)) come un I-modulo, I denotando l'anello dei numeri interi; quindi nel corollario del n.° 6 è contenuto in particolare il risultato seguente (M insieme degli interi positivi):

Di un modulo G, non contenente elementi non nulli di ordine finito, esiste un sopramodulo $\mathfrak{G}$, univocamente determinato a meno di isomorfismi, ogni elemento ξ del quale è rappresentabile nella forma

$$\xi = \frac{a}{\beta}\, u \quad (\beta > 0,\ a \text{ num. interi},\ u \in G),$$

cioè (n.° 1) è la soluzione dell'equazione $\beta\xi = au$. In $\mathfrak{G}$ valgono le regole di calcolo (27), rispetto alle quali $\mathfrak{G}$ è un K-modulo, K denotando il corpo dei numeri razionali.

Per la costruzione di questo modulo $\mathfrak{G}$ si possono appunto sfruttare le classi di equivalenza $[(\beta, a, u)]$ ($\beta > 0$, a numeri interi, $u \in G$) (n.° 2), con le regole di calcolo $(\overline{6})$, $(\overline{10})$. Partendo, ad esempio, dal gruppo moltiplicativo (abeliano) G dei numeri razionali positivi, il sopragruppo $\mathfrak{G}$, al quale (in notazione moltiplicativa) in tal modo si perviene, non è altro (a meno di isomorfismi) che il gruppo moltiplicativo dei numeri algebrici reali positivi del tipo

$$u^{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[\beta]{u^{\alpha}} \tag{28}$$

(u numero razionale positivo, $\beta > 0$, α numeri interi), soluzioni cioè di equazioni binomie $\xi^{\beta} = u^{\alpha}$.

8. - È ben noto (cfr. [6], p. 147, oppure [4], p. 164) che un anello R può considerarsi, nel modo più naturale, come un P-modulo sinistro (o destro), P denotando lo pseudogruppo moltiplicativo di R.

Nella prima di queste due accezioni, e nell'ipotesi che esista lo pseudogruppo $\mathfrak{Z}$ dei quozienti a sinistra di P rispetto ad un suo sotto-pseudogruppo M di elementi semplificabili, la condizione Ω) essendo ora manifestatamente soddisfatta, possiamo applicare a questo P-modulo sinistro R il teor. del n.° 1 (ricordando le osservazioni del n.° 3 — ult. e quartult. capov. —). Detto $\mathfrak{R}$ un $\mathfrak{Z}$-modulo sinistro, estensione di R, la cui esistenza è affermata dal detto teorema, si osservi che ogni elemento x di $\mathfrak{Z}$ si può rappresentare nella forma $x = \beta^{-1}au$, con $\beta \in M$, a, $u \in P$ ($x = \gamma^{-1}v$, con $\gamma \in M$, $v \in P$, implica appunto $x = (\gamma^2)^{-1}\gamma v$), e che la corrispondenza fra $\mathfrak{Z}$ ed $\mathfrak{R}$:

$$x = \beta^{-1}au \rightarrow \xi = \beta^{-1}au, \tag{29}$$

che associa cioè gli elementi che ammettono una medesima rappresentazione $\beta^{-1}au$ (si ricordi che ora $P = R$, nel senso della teoria degli insiemi), è biunivoca (cfr. il penult. capov. del n.° 5) e subordina in $P = R$ l'identità. Dunque (cfr. [6], p. 38, 3° capov.), mediante la (29), si può definire nel modulo $\mathfrak{R}$ una moltiplicazione, rispetto alla quale $\mathfrak{R}$ è un sopra-pseudogruppo di P, isomorfo (mediante la (29) stessa) a $\mathfrak{Z}$, col quale possiamo dunque identificare $\mathfrak{Z}$ stesso. La moltiplicazione, or ora definita in $\mathfrak{R} (= \mathfrak{Z})$, coincide, come facilmente si verifica, con quella che era già definita fra $\mathfrak{Z}$ ed $\mathfrak{R}$, perciò (v. la II) del n.° 1) vale in $\mathfrak{R}$ la proprietà distributiva:

$$\xi(\xi_1 + \xi_2) = \xi\xi_1 + \xi\xi_2 . \tag{30}$$

Ma anche l'altra proprietà distributiva: $(\xi_1 + \xi_2)\xi = \xi_1\xi + \xi_2\xi$ è soddisfatta in $\mathfrak{R}$, che dunque risulta un sopraanello del dato R. Infatti, posto $\xi = \beta^{-1}au$, $\xi_i = \beta_i^{-1}a_iu_i$ $(i = 1, 2)$ e supponendo, com'è lecito (cfr. il 5°-ult. capov. del n.° 3), $\beta = \beta_1 = \beta_2$, considerati $\nu_i \in M$, $q_i \in R$ tali che $\nu_i a_i u_i = q_i\beta$ $(i = 1, 2)$ e inoltre r_1, $r_2 \in R$, $\alpha \in M$ tali che $r_1\nu_1 = r_2\nu_2 = \alpha$, di modo quindi che risulta $\alpha(a_1u_1 + a_2u_2) = (r_1q_1 + r_2q_2)\beta$, si ha appunto (applicando due volte la (30)):

$$(\xi_1 + \xi_2)\xi = \beta^{-1}(a_1u_1 + a_2u_2)\cdot\beta^{-1}au = (\alpha\beta)^{-1}(r_1q_1 + r_2q_2)au =$$
$$= \sum_{i=1}^{2}(\alpha\beta)^{-1}r_iq_iau = \xi_1\xi + \xi_2\xi.$$

Questo anello $\mathfrak{R}$ è evidentemente un anello dei quozienti a sinistra di R rispetto ad M.

Dunque (sfruttando il teor. del n.° 1) si è ritrovato il noto risultato (cfr. [5], Th. 2) che, affinchè esista l'anello dei quozienti a sinistra rispetto ad M dell'anello R, è (necessario e) sufficiente che esista lo pseudogruppo dei quozienti a sinistra rispetto ad M dello pseudogruppo moltiplicativo di R.

Si osservi che d'altra parte (ammesso questo risultato come noto) ogni anello dei quozienti a sinistra di R rispetto ad M può evidentemente considerarsi come il $\mathfrak{S}$-modulo sinistro la cui esistenza è affermata dal teor. del n.° 1, e quindi che viceversa in ogni tale $\mathfrak{S}$-modulo $\mathfrak{R}$ può essere immediatamente definita (sfruttando l'isomorfismo col precedente: v. n.° 5, penult. capov.) una moltiplicazione in modo che $\mathfrak{R}$ (cioè la sua parte additiva) diventi un anello dei quozienti a sinistra di R rispetto ad M.

9. - I simboli P ed M abbiano il significato detto nell'enunciato del teor. del n.° 1, ed esista lo pseudogruppo $\mathfrak{S}$ dei quozienti a sinistra di P rispetto ad M.

Se G è un P-gruppoide sinistro, diremo che un $\mathfrak{S}$-gruppoide sinistro $\mathfrak{G}$, estensione di G, è un *$\mathfrak{S}$-gruppoide dei quozienti a sinistra di G rispetto ad M* se ogni elemento ξ di $\mathfrak{G}$ è rappresentabile nella forma

$$\xi = \beta^{-1}v \qquad (\beta \in M,\ v \in G). \tag{31}$$

Tale è evidentemente il $\mathfrak{F}$-gruppoide sinistro $\mathfrak{G}$ la cui esistenza è affermata dal teor. del n.° 1, e viceversa ($\beta^{-1}v = (\gamma\beta)^{-1}\gamma v$ con $\gamma \in M \subseteq P$); onde si può enunciare senz'altro il

TEOREMA: I simboli P, M e $\mathfrak{F}$ avendo il significato detto nell'enuniato del teor. del n.° 1, affinchè esista un $\mathfrak{F}$-gruppoide $\mathfrak{G}$ dei quozienti a sinistra rispetto ad M di un dato P-gruppoide sinistro G è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione Ω) del n.° 1. Se $\mathfrak{G}$ esiste, esso è univocamente determinato a meno di isomorfismi.

Questo teorema è dunque un'immediata conseguenza di quello del n.° 1 (poichè la necessità della Ω) è evidente).

Se in particolare M coincide coll'insieme degli elementi semplificabili in P, $\mathfrak{G}$ si dirà un *$\mathfrak{F}$-gruppoide dei quozienti a sinistra di G.*

Quanto è stato detto fin qui in questo n.° 9 può evidentemente ripetersi parola per parola (con le uniche varianti: R invece di P, n.° 6 invece di n.° 1, anello $\mathfrak{R}$ invece di pseudogruppo $\mathfrak{F}$) con referenza al teor. del n.° 6, restando quindi in particolare stabilito cosa debba intendersi per un *$\mathfrak{R}$-gruppoide dei quozienti a sinistra di G rispetto ad M* (G essendo adesso un dato R-gruppoide sinistro).

10. - Le osservazioni del precedente n.° 9 suggeriscono un'altra dimostrazione del teorema quivi enunciato (cioè, in sostanza, di quello del n.° 1), concettualmente ancora più semplice di quella esposta nei n.^{i} 2-5.

Per la costruzione di $\mathfrak{G}$ si può infatti partire (nell'ipotesi che valga la Ω)) dall'insieme $\mathfrak{C}$ delle coppie ordinate (β, v) ($\beta \in M$, $v \in G$), che, mediante la relazione di equivalenza:

$$(\beta, v) \backsim (\beta_1, v_1)$$

se esistono $r, r_1 \in P$, $\alpha \in M$ soddisfacenti alle (4) ed alla

$$rv = r_1 v_1, \tag{32}$$

viene suddiviso in classi disgiunte $[(\beta, v)]$ costituenti un nuovo insieme $\mathfrak{G}'$, nel quale si ha quindi la seguente *definizione di eguaglianza*:

$$[(\beta, v)] = [(\beta_1, v_1)] \tag{33}$$

se e soltanto se esistono tre elementi r, $r_1 \in P$, $\alpha \in M$ per cui valgono le (4), (32), In $\mathcal{G}'$ si ha in particolare $[(\beta, v)] = [(\mu\beta, \mu v)]$ $(\mu \in M)$. Se $\beta = \beta_1$, la (33) è vera se e soltanto se $v = v_1$. Se $r\beta = \alpha$ con $r \in P$, $\alpha \in M$, si ha $[(\beta, v)] = [(\alpha, rv)]$. (Cfr. n.° 2.)

Rispetto alla seguente *definizione di addizione*:

(34) $$[(\beta, v)] + [(\beta_1, v_1)] = [(\alpha, rv + r_1 v_1)],$$

dove $\alpha \in M$, r, $r_1 \in P$ soddisfano alle (4), $\mathcal{G}'$ è un gruppoide. Se $\beta = \beta_1$, si ha in particolare $[(\beta, v)] + [(\beta, v_1)] = [(\beta, v + v_1)]$. Se G è uno pseudogruppo (un semigruppo), anche $\mathcal{G}'$ è uno pseudogruppo (risp. un semigruppo). Se il gruppoide G è commutativo, tale è pure $\mathcal{G}'$. Se il gruppoide G possiede uno zero 0 per cui vale la (15), $[(\beta, 0)]$ $(\beta \in M)$ è lo zero di $\mathcal{G}'$. Se G è un gruppo, anche $\mathcal{G}'$ è un gruppo. (Cfr. n.° 3.)

Diamo ora la seguente *definizione di moltiplicazione* di $x = \alpha^{-1}b \in \mathfrak{F}$ per $\xi_1' = [(\beta_1, v_1)] \in \mathcal{G}'$:

(35) $$(\alpha^{-1}b) \cdot [(\beta_1, v_1)] = [(\nu\alpha, qv_1)],$$

dove $\nu \in M$, $q \in P$ son tali che

(35') $$\nu b = q\beta_1.$$

Si verifica (cfr. [5], pp. 2-3) che il prodotto a 2° membro della (35) non dipende dalla scelta dei due elementi $\nu \in M$, $q \in P$ soddisfacenti alla (35'), e che inoltre esso è univocamente determinato dai fattori $\alpha^{-1}b$, $[(\beta_1, v_1)]$.

Rispetto all'eguaglianza (33), *all'addizione* (34) *e alla moltiplicazione* (35), *l'insieme* $\mathcal{G}'$ *delle classi di equivalenza* $[(\beta, v)]$ $(\beta \in M,\ v \in G)$ *è un $\mathfrak{F}$-gruppoide sinistro*. Valgono cioè le I), II), III) del n.° 1 (ove si legga x, $x_1 \in \mathfrak{F}$ e ξ', $\xi_1' \in \mathcal{G}'$ invece risp. di a, $a_1 \in P$ ed u, $u_1 \in G$). E invero, quanto alla II), posto

$$x = \alpha^{-1}b,\quad x_1 = \alpha_1^{-1}b_1,\quad \xi' = [(\beta, v)],\quad \xi_1' = [(\beta_1, v_1)],$$

supponendo, com'è lecito (v. la fine del 2° capov. di questo n.°), $\beta = \beta_1$, se $\nu \in M$, $q \in P$ soddisfano alla (35'), si ha appunto

$$x(\xi' + \xi_1') = x \cdot [(\beta_1, v + v_1)] = [(\nu\alpha, qv + qv_1)] = \\ = [(\nu\alpha, qv)] + [(\nu\alpha, qv_1)] = x\xi' + x\xi_1'.$$

Quanto alla III), se si ha $\nu_1 b_1 = q_1\beta$ $(\nu_1 \in M,\ q_1 \in P)$, $\delta b = c \cdot \nu_1 \alpha_1$ $(\delta \in M,\ c \in P)$, risulta $x_1\xi' = [(\nu_1\alpha_1,\ q_1 v)]$, $x(x_1\xi') = [(\delta\alpha,\ cq_1 v)]$, $xx_1 = \alpha^{-1}(b\alpha_1^{-1}\nu_1^{-1})\nu_1 b_1 = \alpha^{-1}(\delta^{-1}c)\nu_1 b_1 = (\delta\alpha)^{-1}c\nu_1 b_1$, donde appunto (poichè $\lambda \cdot c\nu_1 b_1 = \lambda c q_1 \cdot \beta$, qualunque sia $\lambda \in M$):

$$(xx_1)\xi' = [(\lambda\delta\alpha,\ \lambda c q_1 v)] = [(\delta\alpha,\ cq_1 v)] = x(x_1\xi').$$

Evidentemente vale anche adesso la (21).

Osservato infine che la corrispondenza biunivoca

$$u \to [(\beta,\ \beta u)],$$

fra G e il sottinsieme G' di $\mathfrak{G}'$ costituito dalle classi del tipo $[(\beta,\ \beta u)]$ $(\beta \in M,\ u \in G)$, è un P-isomorfismo, si possono immediatamente definire (cfr. n.° 5) in $\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}' \dot{-} G') + G$ un'addizione e fra $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ una moltiplicazione in modo che $\mathfrak{G}$ risulti un $\mathfrak{F}$-gruppoide sinistro ($\mathfrak{F}$-isomorfo a $\mathfrak{G}'$), estensione del dato P-gruppoide sinistro G. Questo $\mathfrak{G}$ è appunto un $\mathfrak{F}$-gruppoide dei quozienti a sinistra di G rispetto ad M, poichè, se $\xi \in \mathfrak{G}$ e nel $\mathfrak{F}$-isomorfismo suddetto fra $\mathfrak{G}$ e $\mathfrak{G}'$ si ha $\xi \to \xi' = [(\beta,\ v)]$, in $\mathfrak{G}$ risulta $\xi = \beta^{-1}v$.

Questa nuova dimostrazione vale naturalmente pure per il teor. del n.° 6 (v. ult. capov. del n.° 9), con l'unica aggiunta della verifica della IV) a quelle delle II), III), fatte qui sopra. Pensando adesso che P sia un anello R (e G un R-gruppoide sinistro), questa verifica si fa subito. E infatti, supponendo (com'è lecito) $\alpha = \alpha_1$, se $\mu,\ \mu_1 \in M$, $p,\ p_1 \in P$ son tali che $\mu b = p\beta$, $\mu_1 b_1 = p_1\beta$, scelti $s,\ s_1 \in P$, $\gamma \in M$ tali che $s\mu = s_1\mu_1 = \gamma$, si ha appunto

$$(x + x_1)\xi' = \alpha^{-1}(b + b_1) \cdot \xi' = [(\gamma\alpha,\ spv + s_1 p_1 v)] = x\xi' + x_1\xi',$$

poichè

$$\gamma b = sp\beta,\ \gamma b_1 = s_1 p_1 \beta,\ \gamma(b + b_1) = (sp + s_1 p_1)\beta.$$

È interessante notare che, se lo pseudogruppo P e il gruppoide G sono risp. la parte moltiplicativa ed additiva di un dato anello, e son soddisfatte le ipotesi del n.° 8 (inizio 2° capov.), rispetto all'eguaglianza (33), all'addizione (34) e alla seguente moltiplicazione

$$[(\alpha,\ b)] \cdot [(\beta_1,\ v_1)] = [(\nu\alpha,\ qv_1)], \tag{35}$$

dove $\nu b = q\beta_1$ $(\nu \in M,\ q \in P)$, l'insieme $\mathcal{G}'$ delle classi $[(\beta, v)]$ $(\beta \in M,\ v \in G)$ è un anello, e quindi $\mathcal{G} = (\mathcal{G}' \dot{-} G') \dot{+} G$ è un anello dei quozienti a sinistra rispetto ad M dell'anello dato. Ciò perchè la sostituzione della $(\overline{35})$ alla (35) non altera affatto nella forma la dimostrazione svolta nel presente numero.

BIBLIOGRAFIA

[1] ASANO K.: *Über die Quotientenbildung von Schiefringen*, Journ. Math. Soc. Japan, vol. 1 (1949), pp. 73-78.

[2] BOCCIONI D.: *Semianelli complementarizzabili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 24 (1955), pp. 474-509.

[3] DUBREIL P.: *Algèbre, I*, Gauthier-Villars (1946).

[4] JACOBSON N.: *Lectures in Abstract Algebra, Vol. I*, Van Nostrand (1951).

[5] MURATA K.: *On the Quotient Semi-group of a Noncommutative Semi-group*, Osaka Math. Journ., vol. 2 (1950), pp. 1-5.

[6] VAN DER WAERDEN B. L.: *Moderne Algebra, I*, dritte Auf., Springer (1950).