

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNO PINI

Una generalizzazione del problema biarmonico fondamentale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 25 (1956), p. 196-213

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__25__196_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UNA GENERALIZZAZIONE DEL PROBLEMA BIARMONICO FONDAMENTALE

Nota () di BRUNO PINI (a Cagliari)*

1. - Sia D un dominio piano limitato semplicemente connesso¹⁾. La sua frontiera sia una curva C le cui equazioni parametriche rispetto all'arco siano

$$x = \bar{x}(s) \quad , \quad y = \bar{y}(s) \quad , \quad 0 \leq s \leq l ;$$

supponiamo che C sia dotata di tangente e curvatura continue. Una corona attorno a C e appartenente a D , di altezza abbastanza piccola δ , è suscettibile della rappresentazione

$$x = \bar{x}(s) - t\bar{y}'(s), \quad y = \bar{y}(s) + t\bar{x}'(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad 0 \leq t \leq \delta .$$

Indichiamo con C_t la curva corrispondente a un fissato valore di t e con D_t il dominio limitato che ha C_t per frontiera.

Il problema biarmonico fondamentale nella forma ordinaria si pone al seguente modo: assegnate su $0 \leq s \leq l$ due funzioni $f(s)$ e $g(s)$ di cui la prima di classe $C^{(1)}$ e la seconda di classe $C^{(0)}$ ($f(l) = f(0)$, $f'(l) = f'(0)$, $g(l) = g(0)$), determi-

(*) Pervenuta in Redazione il 13 settembre 1955.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Cagliari.

¹⁾ Noi ci siamo posti nelle ipotesi più semplici possibili; i ragionamenti che seguono si potrebbero però adattare per trattare il caso più generale in un arbitrario numero di variabili, nell'ipotesi, tuttavia, di una opportuna regolarità della frontiera del dominio; è inoltre presumibile che di tali ragionamenti ci si possa servire per trattare anche il problema poliarmonico generalizzato.

nare una funzione $u(P)$ di classe $C^{(1)}$ in D tale che

$$(1) \quad \Delta\Delta u = 0 \quad \text{per } P \subset D - C$$

$$(2) \quad u = f, \quad \frac{du}{dv} = g \quad \text{per } P \subset C,$$

essendo v la normale a C diretta verso l'interno di D .

Questo problema può venir formulato imponendo, in luogo delle (2), le condizioni

$$(2') \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi \quad \text{per } P \subset C$$

essendo φ e ψ due assegnate funzioni di classe $C^{(0)}$ su $0 \leq s \leq l$ ($\varphi(l) = \varphi(0)$, $\psi(l) = \psi(0)$, $\varphi(s)$ a integrale nullo su $0 \leq s \leq l$), e imponendo inoltre il valore della u in un punto di C .

Una generalizzazione di questo problema è stata data da O. K. Friedrichs²⁾ e, successivamente, nel medesimo ordine di idee e in ipotesi molto generali sulla frontiera, è stata estesa al caso poliarmonico in n variabili da S. Sobolev³⁾. Limitatamente al caso biarmonico e nelle ipotesi di regolarità della frontiera fatte all'inizio, questo problema può essere posto al modo seguente: determinare una funzione $u(P)$ tale che

$$\Delta\Delta u = 0 \quad \text{per } P \subset D - C$$

$$(2'') \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{C_t} \left[(u - f)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - f_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - f_2 \right)^2 \right] ds_t = 0$$

(ove con s_t s'intende l'arco di C_t), essendo f, f_1, f_2 tre funzioni di classe $L^{(2)}$ costituenti la traccia in media quadratica su C di una funzione $\varphi(P)$ dotata delle derivate seconde di classe $L^{(2)}$ in D . Questa ipotesi restrittiva sui dati è essenziale per l'applicabilità del metodo variazionale di cui si servono gli A.A. citati.

2) O. K. FRIEDRICHS, *Die Randwert- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten*, Math. Ann. 98 (1928).

3) S. SOBOLEV, *Su un problema limite per le equazioni poliarmoniche*, Mat. Sbornik (1937) (in russo).

È facile verificare come il problema (1)-(2'') possa avere soluzione prescindendo da tale restrizione. Consideriamo ad esempio il cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$ e la funzione biarmonica

$$(3) \quad u(\rho, \theta) = (1 - \rho^2) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \rho^n \right]$$

con

$$\sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < +\infty.$$

Ovviamente si ha

$$(4) \quad \lim_{\rho \rightarrow 1-} \int_0^{2\pi} u^2(\rho, \theta) d\theta = 0.$$

È poi

$$(5) \quad \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial u}{\partial \rho} + a_0 + 2 \sum_1^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right]^2 d\theta = \\ = 2\pi a_0^2 (1 - \rho)^2 + \pi \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) [2 + n\rho^{n-1} - (2+n)\rho^{n+1}]^2$$

$$(6) \quad \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 d\theta = \pi (1 - \rho^2)^2 \sum_1^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \rho^{2n}$$

$$(7) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} (\Delta u)^2 \rho d\rho d\theta = 4\pi a_0^2 \rho^2 + 8\pi \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) (n+1) \rho^{2n+2}.$$

Poichè $2 + n\rho^{n-1} - (2+n)\rho^{n+1}$ è, per $0 \leq \rho \leq 1$ ed $n = 1, 2, \dots$, minore di 4 ed eguale a zero per $\rho = 1$, la serie a secondo membro in (5) è totalmente convergente e quindi $\partial u / \partial \rho$ converge a $-a_0 - 2 \sum_1^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ in media d'ordine 2 sul sistema delle circonferenze $\rho = \text{cost.}$ per $\rho \rightarrow 1-$. Poichè

$$\max_{0 \leq \rho \leq 1} n^2 (1 - \rho^2)^2 \rho^{2n} = \frac{4n^2}{(n+2)^2} \left(\frac{n}{n+2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4e^{-2},$$

il secondo membro di (6) converge uniformemente onde $\partial u / \partial \theta$ converge a zero in media d'ordine 2. La sola ipotesi che sia

$\sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < +\infty$ non assicura però l'integrabilità di $(\Delta u)^2$ su $x^2 + y^2 \leq 1$ ⁴⁾).

2. - Nella presente Nota trattiamo il seguente problema:

Assegnate tre funzioni di classe $L^{(1)}$, $f(s)$, $f_1(s)$, $f_2(s)$, $0 \leq s \leq l$, determinare una funzione $u(P)$ tale che

$$(1) \quad \Delta \Delta u = 0 \quad \text{per} \quad P \subset D - C$$

$$(2'') \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{C_t} \left(|u - f| + \left| \frac{\partial u}{\partial s_t} - f_1 \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial t} - f_2 \right| \right) ds_t = 0.$$

È chiaro che le funzioni f, f_1, f_2 , debbono essere tra loro legate da una certa condizione di compatibilità. Dalla (2'') segue che f_1 è ad integrale nullo su $0 \leq s \leq l$ e che

$$(8) \quad \iint_{D-D_8} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial s_t} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \right) dx dy < +\infty.$$

Poniamo per semplicità

$$u(s, t) = u(\bar{x}(s) - t\bar{y}'(s), \bar{y}(s) + t\bar{x}'(s)).$$

Dalla (8) segue che $\partial u / \partial t$ è sommabile su quasi-tutti i seg-

⁴⁾ L'unicità della soluzione del problema (1)-(2'') nell'ipotesi di compatibilità dei dati si ha anche senza l'ipotesi che questi costituiscano la traccia in media quadratica su C di una funzione dotata delle derivate seconde di classe $L^{(2)}$ su D . Ciò seguirà ovviamente da quanto sarà provato nel seguito. Osserviamo intanto che, nell'ipotesi che D sia stellato rispetto a un suo punto interno O , l'affermazione è immediatamente deducibile da una formula di maggiorazione del tipo

$$|u(P)| < k_1 \int_{C_t} u^2 ds_t + k_2 \int_{C_t} \left(\frac{\partial u}{\partial s_t} \right)^2 ds_t + k_3 \int_{C_t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 ds_t$$

stabilita da L. E. PAYNE ed H. WEINBERGER in *New bounds in harmonic and biharmonic problems* (Journal of Math. and Phys. XXXIII, 1955). In tale formola P è un arbitrario punto interno a D_t e k_1, k_2, k_3 sono tre quantità positive che dipendono da C_t e dalla distanza di P da C_t . Questa formola non è però utilizzabile ai fini del presente lavoro.

menti $s = \text{cost.}$ della corona $D - D_\delta$; da

$$u(s, t) = u(s, \tau) + \int_{\tau}^t \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

si deduce quindi che, per quasi-tutti i valori di s , $0 \leq s \leq l$, esiste il $\lim_{t \rightarrow 0+} u(s, t)$. Ovviamente tale limite coincide quasi-dappertutto con $f(s)$.

Ora, posto

$$\bar{\gamma}(s) = \bar{x}'(s)\bar{y}''(s) - \bar{x}''(s)\bar{y}'(s),$$

si ha

$$ds_t = [1 - \bar{\gamma}(s)t]ds, \quad \frac{\partial u}{\partial s_t} = \frac{1}{1 - \bar{\gamma}t} \frac{\partial u}{\partial s};$$

dalla (2''') segue evidentemente

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^l \left| \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_{C_t} - f_1(s) \right| ds = 0.$$

Indichiamo con $\varphi(s)$ l'integrale della $f_1(s)$ tra s_0 ed s ; si ha anche

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^l \left| \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_{C_t} - \varphi'(s) \right| ds = 0;$$

poichè

$$|[\varphi(s) - \varphi(0)] - [f(s) - f(0)]| \leq$$

$$\leq |u(s, t) - f(s)| + |u(0, t) - f(0)| + \int_0^s \left| \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_{C_t} - \varphi' \right| ds,$$

se $\lim_{t \rightarrow 0+} u(0, t) = f(0)$, si ha, per quasi-tutti gli s ,

$$\varphi(s) - \varphi(0) = f(s) - f(0).$$

Dunque la funzione $f(s)$ differisce soltanto al più nei punti di un insieme di misura nulla da una funzione assolutamente continua la cui derivata coincide quasi-dappertutto con $f_1(s)$.

Modifichiamo quindi il problema (1)-(2''') sostituendo la (2''') con una condizione del tipo

$$(2^{iv}) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{C_t} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial s_t} - f_1 \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial t} - f_2 \right| \right) ds_t = 0.$$

Il problema (1)-(2^{iv}) ha, come vedremo, una sola soluzione (a meno di una costante additiva); ciò segue dall'esistenza di una costante positiva K , dipendente solo da D , tale che

$$(9) \quad \int_{C_t} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial s_t} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \right) ds_t < K \int_0^t (|f_1| + |f_2|) ds.$$

3. - Nell'ipotesi di un dominio semplicemente connesso con frontiera sufficientemente regolare la soluzione del problema armonico fondamentale si può far dipendere dalla determinazione del momento di un potenziale di doppio strato; analogamente la soluzione del problema (1)-(2') può farsi dipendere dalla determinazione dei momenti di due potenziali biarmonici. Infatti tale soluzione può essere posta sotto la forma ⁵⁾

$$(10) \quad u(P) = \frac{1}{\pi} \int_C \left(-\operatorname{arctg} \frac{Y}{X} + \frac{XY}{X^2 + Y^2} \right) m_1(s) ds + \\ + \frac{1}{\pi} \int_C \frac{Y^2}{X^2 + Y^2} m_2(s) ds,$$

ove

$$(11) \quad \begin{cases} X = X(P, Q) = (x - \bar{x}(s))\bar{x}'(s) + (y - \bar{y}(s))\bar{y}'(s) \\ Y = Y(P, Q) = -(x - \bar{x}(s))\bar{y}'(s) + (y - \bar{y}(s))\bar{x}'(s) \end{cases}$$

con $P \equiv (x, y)$, $Q \equiv (\bar{x}(s), \bar{y}(s))$.

⁵⁾ Cfr. Å. PLEIJEL, *On Green functions for elastic plates with clamped, supported and free edges*, Proceedings of the Symposium on spectral theory and differential problems; the Math. Dep. Oklahoma Agricultural and Mech. College Stillwater, Oklahoma (1951).

Sia ora

$$x = \bar{x}(\sigma) - t\bar{y}'(\sigma) \quad , \quad y = \bar{y}(\sigma) + t\bar{x}'(\sigma) \quad , \quad 0 \leq \sigma \leq l,$$

e poniamo

$$(11') \quad \begin{cases} \bar{X} = (x - \bar{x}(s))\bar{x}'(\sigma) + (y - \bar{y}(s))\bar{y}'(\sigma) \\ \bar{Y} = -(x - \bar{x}(s))\bar{y}'(\sigma) + (y - \bar{y}(s))\bar{x}'(\sigma). \end{cases}$$

Da (10) si deduce allora

$$(12_1) \quad \frac{\partial u}{\partial \sigma_t} = \frac{2}{\pi} \int_C \frac{\bar{Y}Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} m_1(s) ds - \frac{2}{\pi} \int_C \frac{XY\bar{Y}}{(X^2 + Y^2)^2} m_2(s) ds$$

$$(12_2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{2}{\pi} \int_C \frac{\bar{X}Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} m_1(s) ds + \frac{2}{\pi} \int_C \frac{X\bar{X}Y}{(X^2 + Y^2)^2} m_2(s) ds.$$

Ora per Q appartenente a C si ha

$$\frac{Y}{X^2 + Y^2} = \frac{\cos(\overline{PQ}, n_Q)}{\overline{PQ}}$$

onde

$$\int_C \frac{Y}{X^2 + Y^2} m(s) ds$$

è un ordinario doppio strato. Con ragionamenti simili a quelli classici relativi al doppio strato, per $t \rightarrow 0+$, si deduce da (12₁) e (12₂) il sistema di Fredholm

$$(13) \quad \mathbf{f}(s^*) = \frac{2}{\pi} \int_C \mathbf{K}(s^*, s) \mathbf{m}(s) ds + \mathbf{m}(s^*)$$

ove \mathbf{f} è il vettore (f_1, f_2) , \mathbf{m} è il vettore (m_1, m_2) , \mathbf{K} è la

matrice nucleare di elementi

$$K_{11} = \frac{\bar{Y}Y^2}{(X^2 + Y^2)^2}, \quad K_{12} = -\frac{XY\bar{Y}}{(X^2 + Y^2)^2},$$

$$K_{21} = -\frac{\bar{X}Y^2}{(X^2 + Y^2)^2}, \quad K_{22} = \frac{X\bar{X}Y}{(X^2 + Y^2)^2}.$$

Com'è ben noto, causa la continuità di $\bar{x}''(s)$ e $\bar{y}''(s)$, $Y/(X^2 + Y^2)$ è una funzione continua di s ed s^* anche per $s = s^*$ e per $s = 0, s^* = l$ e per $s = l, s^* = 0$, attribuendole in questi casi il valore di $\frac{1}{2}\bar{\gamma}$.

Con facili calcoli si riconosce poi che se s ed s^* convergono al medesimo valore s_0 , si ha

$$\frac{|\bar{X}|Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} = 0 \left(\frac{1}{4} \bar{\gamma}^2(s_0) |s - s^*| \right) = \frac{|XY\bar{Y}|}{(X^2 + Y^2)^2}$$

$$\frac{|\bar{Y}|Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} = 0 \left(\frac{1}{8} |\bar{\gamma}(s_0)|^2 (s - s^*)^2 \right)$$

$$\frac{X\bar{X}Y}{(X^2 + Y^2)^2} = 0 \left(\frac{1}{2} \bar{\gamma}(s_0) \right).$$

Ciò assicura che la matrice nucleare $\mathbf{K}(s^*, s)$ è continua in s^*, s anche per $s^* = s$. Analogo risultato per $s = 0, s^* = l$ ed $s = l, s^* = 0$. Ne segue che della stessa proprietà gode la matrice $\mathbf{H}(s^*, s)$. Da

$$(14) \quad \mathbf{m}(s^*) = \frac{2}{\pi} \int_C \mathbf{H}(s^*, s) \mathbf{f}(s) ds + \mathbf{f}(s^*)$$

segue poi la continuità di $\mathbf{m}(s)$ se $\mathbf{f}(s)$ è continuo.

Supponiamo ora che $u(P)$ sia soluzione del problema (1)-(2'''). Consideriamo una curva C_τ e siano

$$x = x(\sigma) \quad , \quad y = y(\sigma) \quad , \quad 0 \leq \sigma \leq l_\tau = \int_0^l (1 - \bar{\gamma}\tau) ds$$

le sue equazioni parametriche riferite all'arco $\sigma = s_\tau$.

Se

$$x(\sigma) = \bar{x}(s) - \tau \bar{y}'(s), \quad y(\sigma) = \bar{y}(s) + \tau \bar{x}'(s),$$

si ha

$$\frac{dx}{d\sigma} = \bar{x}', \quad \frac{dy}{d\sigma} = \bar{y}', \quad \frac{d^2x}{d\sigma^2} = \frac{\bar{x}''}{1 - \bar{\gamma}\tau}, \quad \frac{d^2y}{d\sigma^2} = \frac{\bar{y}''}{1 - \bar{\gamma}\tau};$$

pertanto le derivate prime e seconde di $x(\sigma)$, $y(\sigma)$ sono continue e, per $\tau \rightarrow 0+$, convergono uniformemente alle corrispondenti derivate di $\bar{x}(s)$, $\bar{y}(s)$.

Una curva C_t , con $t > \tau$, è suscettibile della rappresentazione parametrica

$$\begin{aligned} x &= x(\sigma) - \lambda y'(\sigma) \\ y &= y(\sigma) + \lambda x'(\sigma) \end{aligned}, \quad 0 \leq \sigma \leq l_\tau, \quad \lambda = t - \tau.$$

Indichiamo tale curva anche con C_λ .

Ci proponiamo di ottenere una maggiorazione dell'integrale

$$(15) \quad \int_{C_\lambda} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial \sigma_\lambda} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right| \right) d\sigma_\lambda.$$

Fissiamo un punto $Q_0(\sigma_0)$ su C_τ e indichiamo con P un punto corrente su C_λ . Sia P_0 il punto $x(\sigma_0) - \lambda y'(\sigma_0)$, $y(\sigma_0) + \lambda x'(\sigma_0)$ di C_λ , I_0 e $I_{0,\lambda}$ gl'intorni di Q_0 e P_0 su C_τ e C_λ corrispondenti a $\sigma_0 - \varepsilon \leq \sigma \leq \sigma_0 + \varepsilon$, essendo ε un prefissato numero positivo. Causa la continuità delle derivate prime e seconde di $x(\sigma)$ e $y(\sigma)$, esiste una costante positiva K_1 tale che

$$\int_{I_{0,\lambda}} \left| \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right|_{Q_0, P} d\sigma_\lambda < K_1 \int_{\sigma_0 - \varepsilon}^{\sigma_0 + \varepsilon} \frac{(\sigma - \sigma_0)^2 + \lambda}{(\sigma - \sigma_0)^2 + \lambda^2} d\sigma < K_1(2\varepsilon + \pi),$$

uniformemente al variare di Q_0 su C_τ e di τ e λ in un intorno dello zero. Ovviamente poi

$$\int_{C_\lambda - I_{0,\lambda}} \left| \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right|_{Q_0, P} d\sigma_\lambda < K_2,$$

uniformemente al variare di Q_0 su C_τ e di τ e λ in un intorno dello zero.

Dunque si ha

$$(16_1) \quad \int_{\dot{C}_\lambda} \left| \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right|_{Q_0, P} d\sigma_\lambda < H$$

con H costante positiva dipendente solo da C .

Analogamente si ha

$$(16_2) \quad \int_{\dot{C}_\lambda} \left| \frac{\bar{X}Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} \right|_{Q_0, P} d\sigma_\lambda < H, \quad \int_{\dot{C}_\tau} \left| \frac{X\bar{X}Y}{(X^2 + Y^2)^2} \right|_{Q_0, P} d\sigma_\lambda < H,$$

$$(16_3) \quad \int_{\dot{C}_\lambda} \left| \frac{\bar{Y}Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} \right|_{Q_0, P} d\sigma_\lambda < H, \quad \int_{\dot{C}_\lambda} \left| \frac{XY\bar{Y}}{(X^2 + Y^2)^2} \right|_{Q_0, P} d\sigma_\lambda < H.$$

Ciò premesso, consideriamo l'integrale (15). Per le (12₁) e (12₂) esso si può scrivere

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_{\dot{C}_\lambda} \left\{ \left| \int_{\dot{C}_\tau} \left[\frac{\bar{Y}Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} m_{1, \tau(\sigma)} - \frac{XY\bar{Y}}{(X^2 + Y^2)^2} m_{2, \tau(\sigma)} \right] d\sigma \right| + \right. \\ & \left. + \left| \int_{\dot{C}_\tau} \left[-\frac{\bar{X}Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} m_{1, \tau(\sigma)} + \frac{X\bar{X}Y}{(X^2 + Y^2)^2} m_{2, \tau(\sigma)} \right] d\sigma \right| \right\} d\sigma_\lambda \\ & < \frac{2}{\pi} \int_{\dot{C}_\tau} \left\{ |m_{1, \tau(\sigma)}| \int_{\dot{C}_\lambda} \frac{(|\bar{X}| + |\bar{Y}|) Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} d\sigma_\lambda + \right. \\ & \left. + |m_{2, \tau(\sigma)}| \int_{\dot{C}_\lambda} \frac{(|\bar{X}| + |\bar{Y}|) |XY|}{(X^2 + Y^2)^2} d\sigma_\lambda \right\} d\sigma \\ & < \frac{4H}{\pi} \int_{\dot{C}_\tau} (|m_{1, \tau(\sigma)}| + |m_{2, \tau(\sigma)}|) d\sigma. \end{aligned}$$

Ora dalla (14), scritta ponendo C_τ al posto di C e $\partial u / \partial s_\tau$, $\partial u / \partial t$ al posto di f_1 ed f_2 , si trae

$$\int_{\dot{C}_\tau} (|m_{1, \tau(\sigma)}| + |m_{2, \tau(\sigma)}|) d\sigma < \bar{H} \int_{\dot{C}_\tau} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial s_\tau} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \right) d\sigma,$$

con \bar{H} una costante positiva dipendente solo dalla matrice nucleare H_τ . D'altra parte la matrice $K_\tau(\sigma^*, \sigma)$ è continua rispetto agli argomenti, uniformemente al variare di τ in un intorno dello zero, onde \bar{H} si può ritenere dipendente soltanto da C . Dunque

$$\int_{\bar{C}_t} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial s_t} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \right) ds_t < \bar{H} \int_{\bar{C}_\tau} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial s_t} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \right) ds_\tau$$

e quindi, al limite per $\tau \rightarrow 0+$,

$$(17) \quad \int_{\bar{C}_t} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial s_t} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \right) ds_t < \bar{H} \int_C (|f_1| + |f_2|) ds.$$

Dalla (17) segue ovviamente l'unicità della soluzione del problema (1)-(2'').

4. - In possesso di una formola di maggiorazione quale la (17) si può agevolmente provare l'esistenza della soluzione del problema (1)-(2''), servendosi ad esempio di ragionamenti basati su certe proposizioni di analisi funzionale.

Indichiamo con Σ lo spazio di Banach dei vettori $[f(x, y), f_1(s), f_2(s)]$ con f di classe $L^{(2)}$ su D ed f_1, f_2 di classe $L^{(1)}$ su $0 \leq s \leq l$ ed f_1 ad integrale nullo su $0 \leq s \leq l$. Indichiamo con $\Sigma_{\Delta\Delta}$ il sottospazio di Σ dei vettori $\left[\Delta\Delta u(x, y), \frac{\partial}{\partial s} u(\bar{x}(s), \bar{y}(s)), \frac{\partial}{\partial v} u(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \right]$ ove v indica la normale a C diretta verso l'interno e u è una funzione di classe $C^{(1)}$ in D col $\Delta\Delta u$ di classe $L^{(2)}$ in D .

Mostriamo che l'involucro $\Sigma_{\Delta\Delta}^*$ di $\Sigma_{\Delta\Delta}$ coincide con Σ . Allo scopo, in base a un noto teorema di Hahn-Banach-Ascoli, basta provare che se il funzionale lineare

$$(18) \quad \iint_D \bar{f} \Delta\Delta u dx dy + \int_0^l \left[\bar{f}_1 \frac{\partial}{\partial s} u(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) + \bar{f}_2 \frac{\partial}{\partial v} u(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \right] ds$$

è nullo qualunque sia il vettore $[\Delta\Delta u, \partial u/\partial s, \partial u/\partial v]$ di $\Sigma_{\Delta\Delta}$, allora il vettore $[\bar{f}(x, y), \bar{f}_1(s), \bar{f}_2(s)]$ dello spazio duale di Σ è lo zero di questo stesso spazio.

Supponiamo dunque che, essendo $\bar{f}, \bar{f}_1, \bar{f}_2$ tre funzioni di cui la prima di classe $L^{(2)}$ su D e le altre due misurabili e limitate su $0 \leq s \leq l$, il funzionale (18) sia nullo per ogni vettore di $\Sigma_{\Delta\Delta}$.

Indichiamo con R un numero maggiore del massimo diametro di D , con Q un punto che fissiamo a piacere in $D - C$ o esternamente a D ma così prossimo a C che il cerchio di centro Q e raggio R contenga D , con P un punto variabile, e poniamo $\rho = P\bar{Q}$.

Consideriamo i polinomi

$$(19) \quad u_n(P) = \int_R^\rho \frac{dt}{t} \int_0^t \tau d\tau \int_R^\tau \left[1 - \left(1 - \frac{\sigma^2}{R^2} \right)^n \right] \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Si ha

$$\Delta\Delta u_n = \frac{2n}{R^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right)^{n-1},$$

onde, con un ragionamento noto ⁶⁾, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D \bar{f}(P) \Delta\Delta u_n(P) dP = \begin{cases} 2\pi\bar{f}(Q) & \text{per quasi-tutti i punti } Q \text{ di } D-C. \\ 0 & \text{per } Q \text{ esterno a } D. \end{cases}$$

Si ha poi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} u_n(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \\ \frac{\partial}{\partial v} u_n(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \end{cases} = \frac{1}{8} \operatorname{Igr} \frac{\rho^2}{eR^2} \begin{cases} \frac{\partial \rho^2}{\partial s} \\ \frac{\partial \rho^2}{\partial v} \end{cases}$$

⁶⁾ Cfr. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*, Rend. Circolo Mat. Palermo, LXI (1937) ;cfr. anche ZWIERNER, *Su una particolare classe di equazioni alle derivate parziali del quarto ordine sopra una superficie chiusa*, Rend. Sem. Math. Padova, 17 (1948).

e quindi

$$(20) \quad -\frac{1}{16\pi} \int_0^l \left[\bar{f}_1(s) \frac{\partial \rho^2}{\partial s} + \bar{f}_2(s) \frac{\partial \rho^2}{\partial v} \right] \lg \frac{\rho^2}{eR^2} ds = \begin{cases} \bar{f}(Q) & \text{per quasi-tutti i} \\ 0 & \text{punti } Q \text{ di } D-C \\ & \text{per } Q \text{ esterno a } D. \end{cases}$$

Il primo membro della (20), che nel seguito indicheremo con $\Phi(Q)$, è ovviamente una funzione continua del punto Q ; dovrà perciò annullarsi su C .

Ora è

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{1}{8\pi} \int_0^l \left\{ \left[\lg \frac{\rho^2}{eR^2} + 2 \frac{(\xi - \bar{x})^2}{\rho^2} \right] \varphi_1(s) + 2 \frac{(\xi - \bar{x})(\eta - \bar{y})}{\rho^2} \varphi_2(s) \right\} ds$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{1}{8\pi} \int_0^l \left\{ \left[\lg \frac{\rho^2}{eR^2} + 2 \frac{(\eta - \bar{y})^2}{\rho^2} \right] \varphi_2(s) + 2 \frac{(\xi - \bar{x})(\eta - \bar{y})}{\rho^2} \varphi_1(s) \right\} ds,$$

ove

$$\varphi_1(s) = \bar{x}'(s)\bar{f}_1(s) - \bar{y}'(s)\bar{f}_2(s) \quad , \quad \varphi_2(s) = \bar{y}'(s)\bar{f}_1(s) + \bar{x}'(s)\bar{f}_2(s).$$

Indichiamo con $Q \pm$ il punto $\bar{x}(s) \mp t\bar{y}'(s)$, $\bar{y}(s) \pm t\bar{x}'(s)$, $t > 0$, e, se F è una funzione di Q , poniamo $F' \pm = F(Q \pm)$. Si ha

$$\frac{\partial \Phi_+}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} (\Phi_+ - \Phi_-) \quad , \quad \frac{\partial \Phi_+}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} (\Phi_+ - \Phi_-).$$

Poichè C è dotata di tangente e curvatura continue, si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \lg \frac{\rho_+^2}{\rho_-^2} = 0,$$

uniformemente al variare di P su C e di Q su C_t .

Fissato un $\varepsilon > 0$ si può poi trovare un h tale che se $P_0(s_0)$ è un punto di C e I_t indica l'arco di C_t corrispondente a $s_0 - h \leq s \leq s_0 + h$, riesca, al variare di P_0 su C e di t in un intorno dello zero,

$$\int_{I_t} |\varphi(s)(\psi_+ - \psi_-)|_{P_0, P} ds < \varepsilon,$$

rappresentando con ψ indifferentemente una delle tre funzioni

$$\frac{(\xi - \bar{x})^2}{\rho^2}, \quad \frac{(\xi - \bar{x})(\eta - \bar{y})}{\rho^2}, \quad \frac{(\eta - \bar{y})^2}{\rho^2}$$

e con φ indifferentemente φ_1 e φ_2 (per ipotesi si ha $|\varphi| < M$ per una certa M , prescindendo al più dai punti di un insieme di misura nulla); ovviamente è poi

$$\int_{C_t - I_t} |\varphi(s)(\psi_+ - \psi_-)|_{P_0, P} ds_t < \varepsilon$$

per t abbastanza piccolo, una volta fissato h . Pertanto

$$\int_{C_t} \left| \int_0^l \varphi(s)(\psi_+ - \psi_-) ds \right| ds_t < 2\varepsilon l$$

e quindi

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{C_t} \left(\left| \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right| \right) ds_t = 0.$$

Perciò la funzione Φ nell'interno di D è biarmonica, è nulla su C , ed è tale che le sue derivate parziali, e quindi anche le sue derivate tangenziale e normale, convergono in media a zero (nel senso specificato); essa risulta dunque, per il premesso teorema di unicità, identicamente nulla. Perciò $\bar{f}(x, y)$ è un quasi-zero.

Dopo di ciò si ha per ogni funzione u di $\Sigma_{\Delta\Delta}$

$$(21) \quad \int_0^l \left[\bar{f}_1(s) \frac{\partial}{\partial s} u(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) + \bar{f}(s) \frac{\partial}{\partial v} u(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \right] ds = 0.$$

Ora, fissate ad arbitrio due funzioni $f_1(s)$ ed $f_2(s)$ di classe $C^{(0)}$ su $0 \leq s \leq l$ ($f_i(l) = f_i(0)$, $i = 1, 2$ ed f_1 ad integrale nullo su $0 \leq s \leq l$) esiste una funzione u tale che

$$\Delta\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad D - C$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = f_1, \quad \frac{\partial u}{\partial v} = f_2 \quad \text{su} \quad C.$$

Questa funzione dà luogo a un vettore di $\Sigma_{\Delta\Delta}$; ma allora è

$$\int_0^l [\bar{f}_1(s)f_1(s) + \bar{f}_2(s)f_2(s)]ds = 0$$

qualunque sia la coppia di funzioni continue $f_1(s)$ ed $f_2(s)$; perciò $\bar{f}_1(s)$ ed $\bar{f}_2(s)$ sono quasi-dappertutto eguali la prima a una costante e la seconda a zero.

Dal teorema di completezza ora provato segue che, assegnate ad arbitrio due funzioni $f_1(s)$, $f_2(s)$ di classe $L^{(1)}$ su $0 \leq s \leq l$, di cui la prima ad integrale nullo su $0 \leq s \leq l$, si può trovare una successione $\{u_n(x, y)\}$ di funzioni di classe $C^{(1)}$ in D col $\Delta\Delta u_n$ di classe $L^{(2)}$ in D , tale che

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D (\Delta\Delta u_n)^2 dx dy = 0$$

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \left(\left| \frac{\partial u_n}{\partial s} - f_1 \right| + \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} - f_2 \right| \right) ds = 0.$$

Supponiamo dapprima che le u_n siano funzioni biarmoniche; per la (17) si ha allora

$$(24) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_{C_t} \left(\left| \frac{\partial u_n}{\partial s_t} - \frac{\partial u_m}{\partial s_t} \right| + \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial u_m}{\partial t} \right| \right) ds_t = 0$$

uniformemente al variare di t in un intorno dello zero. Poichè ogni funzione u_n è determinata a meno di una costante, supponiamo di scegliere questa in modo che, per ogni n , sia

$$u_n(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) = \alpha$$

se α è il valore assegnato alla cercata soluzione nel punto di C corrispondente ad $s = 0$. Poniamo

$$u_n(s, t) = u_n(\bar{x}(s) - t\bar{y}'(s), \bar{y}(s) + t\bar{x}'(s));$$

si ha

$$u_n(s, t) - \alpha = \int_0^s \frac{\partial}{\partial s} u_n(s, 0) ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} u_n(s, t) dt$$

onde

$$\int_{C_t} |u_n - u_m| ds_t \leq \int_{C_t} \left(\int_0^s \left| \frac{\partial}{\partial s} [u_n(s, 0) - u_m(s, 0)] \right| ds + \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial t} [u_n(s, t) - u_m(s, t)] \right| dt \right) ds_t$$

e quindi anche

$$(25) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_{C_t} |u_n - u_m| ds_t = 0.$$

Consideriamo ora una corona $D_{t_1} - D_{t_2}$ con $0 < t_1 < t_2 < \delta$ e in questa la corona $D_{t_1+T} - D_{t_2-T}$ essendo $0 < 2T < t_2 - t_1$. Comunque si prenda un punto P di quest'ultima e un numero positivo $r \leq T$, si ha⁷⁾

$$u_n(P) - u_m(P) = \frac{3}{2\pi r^3} \iint_{\mathfrak{D}(P, r)} (4r - 5\rho)[u_n(Q) - u_m(Q)] dQ,$$

indicando con $\mathfrak{D}(P, r)$ il cerchio di centro P e raggio r .

Ora dalla (25) segue anche

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \iint_{D_{t_1+T} - D_{t_2-T}} |u_n - u_m| dP = 0.$$

Perciò

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} |u_n(P) - u_m(P)| = 0$$

uniformemente al variare di P nella già detta corona. Da ciò segue che la successione $\{u_n(x, y)\}$ converge uniformemente nella corona e quindi in definitiva in ogni insieme chiuso contenuto in $D - C$.

⁷⁾ Cfr. B. PINI, *Sulle funzioni sub e super-biarmoniche*, Rend. Acc. Lincei, 8, XVI (1954).

La funzione limite $u(x, y)$ è pertanto una funzione biarmonica⁸⁾. Ne segue che anche le $\{\partial u_n/\partial s_t\}$ e $\{\partial u_n/\partial t\}$ convergono uniformemente a $\partial u/\partial s_t$ e $\partial u/\partial t$ in ogni insieme chiuso contenuto in $D - C$.

È poi

$$\int_{C_t} \left| \frac{\partial u}{\partial s_t} - f_1 \right| ds_t \leq \int_{C_t} \left| \frac{\partial u}{\partial s_t} - \frac{\partial u_n}{\partial s_t} \right| ds_t + \int_{C_t} \left| \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial s_t} - \frac{\partial}{\partial s} u_n(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \right| ds_t + \int_0^1 (1 - \bar{\gamma}t) \left| \frac{\partial}{\partial s} u_n(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) - f_1 \right| ds.$$

Per la (23) il terzo integrale a secondo membro si può rendere minore di un ε positivo arbitrario, per n abbastanza grande; il primo si può rendere $< \varepsilon$, come si deduce dalla (24) ove si faccia tendere m all'infinito, per n abbastanza grande; fissato n , il secondo si può rendere $< \varepsilon$, per t abbastanza piccolo.

Pertanto

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{C_t} \left| \frac{\partial u}{\partial s_t} - f_1 \right| ds_t = 0.$$

In modo analogo si prova che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{C_t} \left| \frac{\partial u}{\partial t} - f_2 \right| ds_t = 0.$$

⁸⁾ Cfr. M. NICOLESCO, *Les fonctions polyharmoniques*, Paris 1936, p. 23.

Poichè si ha

$$u(P) = \frac{3}{2\pi r^3} \iint_{\mathfrak{D}(P, r)} (4r - 5\rho) u(Q) dQ,$$

la biarmonicità di u segue anche da una osservazione contenuta nella Nota citata in 7).

Supponiamo infine che le u_n non siano funzioni biarmiche. Poniamo allora

$$v_n(P) = u_n(P) - \frac{1}{8\pi} \iint_D \Delta \Delta u_n(Q) \rho^2 \lg \rho dQ \quad (\rho = \overline{PQ}).$$

Le funzioni v_n sono biarmiche in $D - C$ e su esse si possono ripetere i ragionamenti precedenti.

Resta in tal modo provato che *esiste una ed una sola soluzione del problema (1)-(2''')*.