

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE DARBO

**Sulla permanenza di certe proprietà in una
trasformazione dipendente da un parametro -
Un criterio di invertibilità completa**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 25 (1956), p. 357-370

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__25__357_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLA PERMANENZA DI CERTE PROPRIETÀ IN UNA TRASFORMAZIONE DIPENDENTE DA UN PARAMETRO - UN CRITERIO DI INVERTIBILITÀ COMPLETA

Nota () di GABRIELE DARBO (a Padova)*

In questo lavoro ¹⁾ considero, in uno spazio di Banach, trasformazioni (equazioni) dipendenti da un parametro reale. E vincolando (n. 2) soltanto la dipendenza della trasformazione (equazione) dal parametro, stabilisco, utilizzando il risultato fondamentale del n. 4, la permanenza, al variar del parametro, di alcune proprietà, quali la completa invertibilità della trasformazione ovvero la sua completa invertibilità in una colla bicontinuità (eventualmente uniforme), completa risolubilità dell'equazione (qualunque sia il termine noto), ecc....

1. - Sia $\zeta(\lambda)$ un punto di uno spazio di Banach ²⁾ Σ , funzione (continua e) derivabile della variabile reale λ in un intervallo J .

Nell'intervallo J sia quasi ovunque

$$(1) \quad \|\dot{\zeta}(\lambda)\| \leq A(\lambda)k(\|\zeta(\lambda)\|) \quad \left(\dot{\zeta}(\lambda) = \frac{d\zeta(\lambda)}{d\lambda} \right)$$

(*) Pervenuta in Redazione il 9 gennaio 1956.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università Padova.

¹⁾ Il contenuto del presente lavoro è stato oggetto di una comunicazione presentata al 5° Congresso Nazionale di Matematica a Pavia.

²⁾ Cioè uno spazio lineare Σ dotato di una norma soddisfacente alle seguenti proprietà: se $z, z_1, z_2 \in \Sigma$, a è un numero reale, $\|z\|$ = norma di z , è:

$$\begin{aligned} \|z\| &> 0 \quad \text{se } z \neq 0, \\ \|az\| &= |a| \cdot \|z\|, \\ \|z_1 + z_2\| &\leq \|z_1\| + \|z_2\|. \end{aligned}$$

con $A(\lambda)$ positiva e sommabile in J e $k(\xi)$ continua crescente (in senso debole³⁾) e non negativa per $\xi \geq 0$. Orbene, come vedremo, sussiste il seguente

LEMMA PRELIMINARE. - *In tali ipotesi, scelti comunque λ_1 e λ_2 in J e ζ_0 in Σ , vale, per ogni $\varepsilon > 0$, la disuguaglianza*

$$(2) \quad \left| \int_{\|\zeta_0\| + \|\zeta_1 - \zeta_0\|}^{\|\zeta_0\| + \|\zeta_2 - \zeta_0\|} \frac{d\xi}{k(\xi) + \varepsilon} \right| \leq \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right|,$$

dove si è posto $\zeta_1 = \zeta(\lambda_1)$ e $\zeta_2 = \zeta(\lambda_2)$.

In particolare, se $\zeta_0 = 0$ si ha

$$(3) \quad \left| \int_{\|\zeta_1\|}^{|\zeta_2|} \frac{d\xi}{k(\xi) + \varepsilon} \right| \leq \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right|;$$

invece se $\zeta_0 = \zeta_1$, la (2) porge

$$\int_{\|\zeta_1\|}^{\|\zeta_1\| + \|\zeta_2 - \zeta_1\|} \frac{d\xi}{k(\xi) + \varepsilon} \leq \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right|;$$

da cui

$$\frac{\|\zeta_2 - \zeta_1\|}{k(\|\zeta_1\| + \|\zeta_2 - \zeta_1\|) + \varepsilon} \leq \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right|,$$

essendo $k(\xi)$ crescente, ed infine

$$(4) \quad \|\zeta_2 - \zeta_1\| \leq k(\|\zeta_1\| + \|\zeta_2 - \zeta_1\|) \cdot \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right|$$

attesa l'arbitrarietà di ε .

DIMOSTRAZIONE. - Fissato comunque $\zeta_0 \in \Sigma$, la disuguaglianza triangolare porge, per ogni coppia λ' e λ'' di J ,

$$\| \|\zeta(\lambda') - \zeta_0\| - \|\zeta(\lambda'') - \zeta_0\| \| \leq \|\zeta(\lambda') - \zeta(\lambda'')\|$$

³⁾ Ossia monotona non decrescente.

e, supposto $\lambda' \neq \lambda''$,

$$\left| \frac{\|\zeta(\lambda') - \zeta_0\| - \|\zeta(\lambda'') - \zeta_0\|}{\lambda' - \lambda''} \right| \leq \left\| \frac{\zeta(\lambda') - \zeta(\lambda'')}{\lambda' - \lambda''} \right\|;$$

ne segue che la funzione

$$\varphi(\lambda) = \|\zeta(\lambda) - \zeta_0\|$$

ha tutti i numeri derivati non superiori, in valore assoluto, a $\|\dot{\zeta}(\lambda)\|$ e perciò finiti in tutto J .

Poichè $\|\zeta(\lambda)\|$ è una funzione continua, al pari di $k(\xi)$, la funzione $k(\|\zeta(\lambda)\|)$ è limitata in J e, per la (1), tutti i numeri derivati di $\varphi(\lambda)$ sono maggiorati da una funzione sommabile. Ne segue, in virtù di teoremi noti⁴⁾, che $\varphi(\lambda)$ è una funzione assolutamente continua in tutto J . Allora in quasi tutto J , risulta

$$\left| \frac{d}{d\lambda} \|\zeta(\lambda) - \zeta_0\| \right| \leq A(\lambda)k(\|\zeta(\lambda)\|)$$

e quindi a più forte ragione

$$(5) \quad \left| \frac{d}{d\lambda} \|\zeta(\lambda) - \zeta_0\| \right| \leq A(\lambda)k(\|\zeta(\lambda) - \zeta_0\| + \|\zeta_0\|),$$

essendo $k(\xi)$ crescente.

Scelto ε positivo la (5) porge

$$\left| \frac{\dot{\varphi}(\lambda)}{k(\varphi(\lambda) + \|\zeta_0\|) + \varepsilon} \right| \leq A(\lambda)$$

quasi ovunque in J e, integrando tra λ_1 e λ_2 ,

$$\left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\dot{\varphi}(\lambda) d\lambda}{k(\varphi(\lambda) + \|\zeta_0\|) + \varepsilon} \right| \leq \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right|;$$

⁴⁾ Cfr.: S. SAKS, *Theory of the integral*, pag. 239 (10.14) nonché pag. 242 (1.1).

da cui la (2) con la sostituzione

$$\varphi(\lambda) + \|\zeta_0\| = \xi,$$

lecita nelle ipotesi attuali ⁵⁾.

2. - Ci sarà utile in seguito adottare la seguente definizione di raggio lacunare:

Sia Σ uno spazio di Banach e Φ una trasformazione dell'insieme arbitrario \mathbb{E} ⁶⁾ in una porzione di Σ . Detto $\Phi(\mathbb{E})$ il codominio della trasformazione Φ , chiameremo raggio lacunare di Φ l'estremo superiore dei raggi degli sferoidi contenuti nel complementare (rispetto a Σ) di $\Phi(\mathbb{E})$, convenendo di assumere uguale a zero il raggio lacunare di Φ se $\Phi(\mathbb{E})$ è denso in Σ .

In virtù di questa definizione avremo dunque che per ogni ε positivo e per ogni $z_0 \in \Sigma$, esiste sempre in \mathbb{E} un elemento x per il quale è

$$\|\Phi(x) - z_0\| < \rho + \varepsilon,$$

se ρ è il raggio lacunare (supposto finito) di Φ .

Noi considereremo ora una trasformazione $\Phi_\lambda: \mathbb{E} \rightarrow \Sigma$ ⁷⁾, dipendente da un parametro reale λ variabile in un intervallo J , e dimostreremo il seguente

TEOREMA FONDAMENTALE: siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

I_1) per ogni x fissato in \mathbb{E} , $\Phi_\lambda(x)$ è funzione derivabile rispetto a λ in tutto J ;

I_2) per ogni fissata coppia di elementi x_1 e x_2 di \mathbb{E} , è verificata per quasi ogni λ la disuguaglianza

$$\|\dot{\Phi}_\lambda(x_1) - \dot{\Phi}_\lambda(x_2)\| \leq A(\lambda)k(\|\Phi_\lambda(x_1) - \Phi_\lambda(x_2)\|),$$

⁵⁾ Cfr.: CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse*, T. 1, 3^a éd., p. 283.

⁶⁾ Non facciamo per ora alcuna ipotesi sulla natura dell'insieme \mathbb{E} ne supponiamo assegnata su \mathbb{E} alcuna struttura topologica.

⁷⁾ Senza bisogno di ripeterlo ulteriormente, supporremo sempre che Σ sia uno spazio lineare di Banach.

dove $A(\lambda)$ è una funzione positiva e sommabile in J e $k(\xi)$ è non negativa e crescente (in senso debole) per $\xi \geq 0$ mentre per $\xi > 0$, $k(\xi)/\xi$ è positiva e decrescente (in senso debole) e l'integrale di $1/k(\xi)$ in un intorno destro dello zero è divergente.

Allora si verifica necessariamente una delle seguenti circostanze:

- 1) il raggio lacunare di Φ_λ è identicamente nullo in J ;
- 2) il raggio lacunare di Φ_λ è finito e positivo per ogni $\lambda \in J$;
- 3) il raggio lacunare di Φ_λ è sempre infinito.

DIMOSTRAZIONE. - Osserviamo intanto che le ipotesi fatte su $k(\xi)$, implicano la continuità di $k(\xi)$ per ogni $\xi \geq 0$. Inoltre esiste finito e non negativo il limite

$$(6) \quad \mu = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} k(\xi)/\xi.$$

Supponiamo in un primo tempo che si abbia

$$(6) \quad \mu \int_J A(\lambda) d\lambda < \frac{1}{2}.$$

Scelti comunque in J due valori distinti λ_1 e λ_2 indichiamo con ρ_i ($i = 1, 2$) il raggio lacunare di Φ_{λ_i} e supponiamo che ρ_1 sia finito.

Fissati ad arbitrio un punto $z_0 \in \Sigma$, un elemento $x_0 \in \mathbb{E}$ ed un numero positivo ε , potremo trovare un elemento $x_1 \in \mathbb{E}$ in guisa che sia

$$\Phi_{\lambda_1}(x_1) = \Phi_{\lambda_1}(x_0) - \Phi_{\lambda_2}(x_0) + z_0 + \sigma_1$$

con

$$\|\sigma_1\| < \rho_1 + \varepsilon;$$

analogamente potremo trovare un elemento $x_2 \in \mathbb{E}$ tale che sia

$$\Phi_{\lambda_1}(x_2) = \Phi_{\lambda_1}(x_1) - \Phi_{\lambda_2}(x_1) + z_0 + \sigma_2$$

con

$$\|\sigma_2\| < \rho_1 + \varepsilon;$$

così continuando, potremo costruire una successione $\{x_n\}$ di elementi di Ξ siffatti, da aversi

$$(8) \quad \Phi_{\lambda_1}(x_n) = \Phi_{\lambda_1}(x_{n-1}) - \Phi_{\lambda_1}(x_{n-1}) + z_0 + \sigma_n$$

con

$$(9) \quad \|\sigma_n\| < \rho_1 + \varepsilon.$$

Dalla (8) si ricava allora

$$(10) \quad \Phi_{\lambda_1}(x_n) - \Phi_{\lambda_1}(x_{n-1}) = z_0 - \Phi_{\lambda_1}(x_{n-1}) + \sigma_n$$

e

$$(11) \quad \{\Phi_{\lambda_1}(x_n) - \Phi_{\lambda_1}(x_{n-1})\} - \{\Phi_{\lambda_2}(x_n) - \Phi_{\lambda_2}(x_{n-1})\} = z_0 - \Phi_{\lambda_2}(x_n) + \sigma_n.$$

Se si pone

$$\zeta(\lambda) = \Phi_{\lambda_1}(x_n) - \Phi_{\lambda_1}(x_{n-1})$$

tutte le condizioni del lemma preliminare sono soddisfatte e per le (10) e (11) risulta

$$\zeta_1 = \zeta(\lambda_1) = z_0 - \Phi_{\lambda_2}(x_{n-1}) + \sigma_n$$

e

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \zeta(\lambda_1) - \zeta(\lambda_2) = z_0 - \Phi_{\lambda_2}(x_n) + \sigma_n;$$

pertanto

$$(12) \quad \begin{aligned} & \|z_0 - \Phi_{\lambda_2}(x_{n-1}) + \sigma_n\| \leq \\ & \leq k \{ \|z_0 - \Phi_{\lambda_2}(x_{n-1}) + \sigma_n\| + \|z_0 - \Phi_{\lambda_2}(x_n) + \sigma_n\| \} \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right|, \end{aligned}$$

in virtù della (4).

Inoltre per la (9) risulta

$$(13) \quad \begin{aligned} & \|z_0 - \Phi_{\lambda_2}(x_{n-1}) + \sigma_n\| \leq \|z_0 - \Phi_{\lambda_2}(x_{n-1}) + \sigma_{n-1}\| + \\ & + \|\sigma_n - \sigma_{n-1}\| \leq \|z_0 - \Phi_{\lambda_2}(x_{n-1}) + \sigma_{n-1}\| + 2\rho_1 + 2\varepsilon \end{aligned}$$

e, posto

$$(14) \quad \eta_n = \|z_0 - \Phi_{\lambda_2}(x_n) + \sigma_n\| \quad (n = 0, 1, \dots),$$

si ottiene

$$(15) \quad \eta_n \leq k(\eta_{n-1} + \eta_n + 2\rho_1 + 2\varepsilon) \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right|.$$

per la (12) la (13) e la crescenza di $k(\xi)$.

Consideriamo ora la funzione di η

$$f(\eta) = \frac{1}{2\eta} k(2\eta + 2\rho_1 + 2\varepsilon) \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right| \quad (\eta > 0);$$

essa risulta decrescente perchè

$$f(\eta) = \frac{k(2\eta + 2\rho_1 + 2\varepsilon)}{2\eta + 2\rho_1 + 2\varepsilon} \cdot \frac{2\eta + 2\rho_1 + 2\varepsilon}{2\eta} \cdot \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) p\lambda \right|$$

cioè perchè essa si può presentare come prodotto di funzioni positive decrescenti.

Si ha inoltre

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} f(\eta) = +\infty,$$

nonchè, per la (6) e la (7),

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} f(\eta) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{k(\xi)}{\xi} \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right| \leq \mu \int A(\lambda) d\lambda < \frac{1}{2};$$

perciò, scelto un qualunque numero θ con la condizione

$$\mu \int A(\lambda) d\lambda < \theta < \frac{1}{2},$$

per la continuità di $f(\eta)$ vi sarà un $\bar{\eta} > 0$ per cui

$$f(\bar{\eta}) = \theta,$$

La relazione

$$(16) \quad \eta_n > \bar{\eta}$$

non può aver luogo per ogni valore di n , perchè per la (15) e la decrescenza di $f(\eta)$ in tal caso sarebbe

$$\eta_n \leq f\left(\frac{\eta_{n-1} + \eta_n}{2}\right) \cdot (\eta_{n-1} + \eta_n) \leq \theta(\eta_{n-1} + \eta_n)$$

e quindi

$$\eta_n \leq \frac{1-\theta}{\theta} \eta_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

da cui, essendo $\theta/(1-\theta) < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$$

in contrasto con la (16).

Esiste dunque almeno un valore di n per cui è

$$\eta_n \leq \bar{\eta}$$

e per tale valore di n si ha, per la (9) e la (14),

$$\|z_0 - \Phi_{\lambda_n}(x_n)\| \leq \bar{\eta} + \rho_1 + \varepsilon.$$

Ciò vuol dire che nello sferoide di centro z_0 (arbitrario) e di raggio $\bar{\eta} + \rho_1 + \varepsilon$ (indipendente da z_0) vi è almeno un punto del codominio di Φ_{λ_n} , ossia Φ_{λ_n} ha un raggio lacunare ρ_2 finito e soddisfacente anzi alla

$$\rho_2 \leq \bar{\eta} + \rho_1 + \varepsilon.$$

Da questa relazione si trae

$$(17) \quad \rho_2 - \rho_1 - \varepsilon \leq \bar{\eta};$$

epperò, se

$$(18) \quad \rho_2 - \rho_1 - \varepsilon > 0,$$

risulta, $f(\eta)$ essendo decrescente,

$$f(\rho_2 - \rho_1 - \varepsilon) \geq f(\bar{\eta}) = \theta$$

vale a dire risulta

$$(19) \quad 2\theta(\rho_2 - \rho_1 - \varepsilon) \leq k(2\rho_2) \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right|.$$

relazione che sussiste ovviamente anche se la (18) non è verificata.

La (19) è valida per ε positivo arbitrario e per θ comunque prossimo a $\frac{1}{2}$; perciò sussiste anche la disuguaglianza

$$(20) \quad \rho_2 - \rho_1 \leq k(2\rho_2) \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right|,$$

e per simmetria anche la

$$(21) \quad \rho_1 - \rho_2 \leq k(2\rho_1) \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right|,$$

atteso che anche ρ_2 è finito, come ora sappiamo.

Osserviamo che al variare di λ_2 in J ; la (20) costituisce una effettiva limitazione superiore per il corrispondente ρ_2 . Infatti l'estremo superiore dell'insieme dei ρ che soddisfano alla disequazione

$$\rho - \rho_1 \leq k(2\rho) \int_J A(\lambda) d\lambda,$$

è certamente finito in virtù dell'ipotesi (7).

Dalle (20) e (21) si trae quindi

$$(22) \quad |\rho_2 - \rho_1| \leq M \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right| \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in J),$$

dove M è una costante conveniente.

Se indichiamo con $\rho(\lambda)$ il raggio lacunare di Φ_λ , questo, in conseguenza della (22), è una funzione assolutamente continua di λ in J e in quasi tutto J risulta

$$(23) \quad \left| \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} \right| \leq k[2\rho(\lambda)] \cdot A(\lambda),$$

in virtù della (20) e della (21).

Se la limitazione (7), ammessa in via provvisoria, non avesse luogo, basterebbe dividere J in un numero finito d'intervali, ciascuno dei quali soddisfatti ad una limitazione analoga alla (7) per poter concludere ugualmente in modo abbastanza ovvio.

Dalla (23) si ricava la seguente relazione, valida per ogni ϵ positivo;

$$(24) \quad \left| \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\xi}{k(2\xi) + \epsilon} \right| \leq \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right|.$$

Da qui si vede che se è $\rho_1 = 0$ deve esser pure $\rho_2 = 0$. Infatti supponiamo per assurdo $\rho_1 = 0$ e $\rho_2 > 0$; il primo membro di (24) allora diverge per $\varepsilon \rightarrow 0$ e ciò in contrasto con la (24) stessa. Con ciò il nostro asserto è completamente dimostrato.

3. - Dimostriamo ora che: *sotto le ipotesi I_1, I_2 , esiste una corrispondenza biunivoca T tra i codomini $\Phi_{\lambda_1}(\mathbb{E})$ e $\Phi_{\lambda_2}(\mathbb{E})$, tale che*

$$(25) \quad T\Phi_{\lambda_1}(x) = \Phi_{\lambda_2}(x) \quad \text{per } x \text{ variabile in } \mathbb{E},$$

e la corrispondenza T così determinata, risulta uniformemente continua assieme alla sua inversa T^{-1} .

Infatti, detti x' e x'' due elementi qualsiasi di \mathbb{E} , se poniamo

$$\zeta(\lambda) = \Phi_{\lambda}(x') - \Phi_{\lambda}(x'') \quad (\lambda \in J),$$

le ipotesi del lemma preliminare sono verificate e perciò per ogni ε positivo sussiste la limitazione

$$(26) \quad \left| \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\|\Phi_{\lambda}(x') - \Phi_{\lambda}(x'')\|}{\|\Phi_{\lambda_1}(x') - \Phi_{\lambda_1}(x'')\|} \frac{d\xi}{k(\xi) + \varepsilon}}{\|\Phi_{\lambda_1}(x') - \Phi_{\lambda_1}(x'')\|} \right| \leq \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right|,$$

in virtù della (3).

Dalla (26) si vede intanto che le

$$\|\Phi_{\lambda_1}(x') - \Phi_{\lambda_1}(x'')\| = 0, \quad \|\Phi_{\lambda_2}(x') - \Phi_{\lambda_2}(x'')\| = 0$$

si equivalgono, perchè se uno solo degli estremi dell'integrale al primo membro di (26) fosse nullo e l'altro positivo, quell'integrale dovrebbe divergere per ε tendente a zero, talchè la (26) verrebbe ad essere contraddetta per ε sufficientemente piccolo.

Ciò prova la biunivocità della T . Mediante considerazioni ovvie si prova che i due estremi dell'integrale considerato devono esser simultaneamente infinitesimi perchè possa sussistere la (26) per ogni ε positivo; da ciò la bicontinuità uniforme della T .

4. - Facciamo ora la seguente ulteriore ipotesi

I_3) *Lo spazio lineare Σ sia completo, e dimostriamo il seguente*

TEOREMA: *sotto le ipotesi I_1) I_2) I_3), se il codominio $\Phi_{\lambda_1}(\Xi)$ coincide con l'intero spazio Σ , lo stesso deve succedere per $\Phi_{\lambda_2}(\Xi)$. La trasformazione T in questo caso è un autoomeomorfismo uniforme di Σ .*

Essendo infatti $\Phi_{\lambda_1}(\Xi) = \Sigma$ è $\rho_1 = 0$; per il teorema fondamentale deve esser pure $\rho_2 = 0$, il che significa che $\Phi_{\lambda_2}(\Xi)$ è denso in Σ . Scelto comunque z in Σ , potremo estrarre da $\Phi_{\lambda_2}(\Xi)$ una successione $\{z_n\}$ convergente verso \bar{z} . Posto quindi

$$w_n = T^{-1}(z_n) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$\{w_n\}$ è una successione di Cauchy, in conseguenza dell'uniforme continuità di T^{-1} . In virtù della completezza di Σ , $\{w_n\}$ converge verso un determinato punto \bar{w} di Σ , ed essendo

$$T(w_n) = z_n \quad \text{per } n = 1, 2, \dots$$

risulta

$$T(\bar{w}) = \bar{z}.$$

Sia quindi \bar{x} un elemento di Ξ tale che $\Phi_{\lambda_1}(\bar{x}) = \bar{w}$, allora

$$T\Phi_{\lambda_1}(\bar{x}) = \Phi_{\lambda_2}(\bar{x}) = \bar{z}$$

cioè \bar{z} appartiene a $\Phi_{\lambda_2}(\Xi)$. Da cui, essendo \bar{z} arbitrario in Σ , segue $\Phi_{\lambda_2}(\Xi) = \Sigma$.

5. - Il risultato ottenuto ci consente senz'altro di indicare la *permanenza* (al variare di λ) di alcune proprietà di Φ_λ , nel senso che Φ_λ le possiede per ogni λ di J se le possiede per un particolare λ di J .

Per esempio:

Se sono soddisfatte le ipotesi I_1) I_2) I_3), le seguenti proprietà Φ_λ permangono al variare di λ in J :

Completa invertibilità di Φ_λ tra Ξ e Σ ;

Esistenza di almeno una soluzione [almeno n , al più n]

dell'equazione

$$\Phi_\lambda(x) = z$$

per ogni termine noto $z \in \Sigma$;

Completa invertibilità e bicontinuità [o bicontinuità uniforme] della trasformazione Φ_λ . In questo caso naturalmente \mathbb{E} si suppone dotato di una struttura topologica [eventualmente di una struttura uniforme].

6. - Particolarizziamo ulteriormente le nostre considerazioni.

Siano Φ_0 e Φ_1 due trasformazioni di \mathbb{E} in Σ e poniamo per brevità

$$\Delta\Phi_i = \Phi_i(x_1) - \Phi_i(x_2) \quad (i=0, 1; x_1, x_2 \in \mathbb{E}).$$

Se per ogni coppia x_1, x_2 di elementi di \mathbb{E} e per ogni $\lambda \in 0^{1-1}$ sussiste la disuguaglianza

$$(27) \quad \|\Delta\Phi_0 - \Delta\Phi_1\| \leq A(\lambda) \|(1-\lambda)\Phi_0 + \lambda\Phi_1\|,$$

con $A(\lambda)$ sommabile in 0^{1-1} le condizioni $I_1)$ $I_2)$ sono verificate qualora si assuma

- a) $\Phi_\lambda(x) = (1-\lambda)\Phi_0(x) + \lambda\Phi_1(x)$,
- b) $k(\xi) = \xi \quad (\xi \geq 0)$,
- c) $J = 0^{1-1}$;

e ciò si constata immediatamente.

Basterà dunque supporre che sia verificata la (27) e che Σ sia completo per poter affermare la completa invertibilità di Φ_1 , nota che sia quella di Φ_0 .

La (27) a sua volta è verificata se sussiste identicamente in \mathbb{E} una disuguaglianza del tipo

$$(28) \quad \|\Delta\Phi_0 - \Delta\Phi_1\| \leq \theta \|\Delta\Phi_0\| + \theta \|\Delta\Phi_1\|$$

con θ costante positiva minore di 1. Infatti per ogni $\lambda \in 0^{1-1}$ risulta

$$\begin{aligned} \|\Delta\Phi_0\| - \lambda \|\Delta\Phi_0 - \Delta\Phi_1\| &\leq \|(1-\lambda)\Delta\Phi_0 + \lambda\Delta\Phi_1\|, \\ \|\Delta\Phi_1\| - (1-\lambda) \|\Delta\Phi_0 - \Delta\Phi_1\| &\leq \|(1-\lambda)\Delta\Phi_0 + \lambda\Delta\Phi_1\| \end{aligned}$$

da cui sommando membro a membro,

$$\|\Delta\Phi_0\| + \|\Delta\Phi_1\| - \|\Delta\Phi_0 - \Delta\Phi_1\| \leq 2\|(1-\lambda)\Delta\Phi_0 + \lambda\Delta\Phi_1\|;$$

da quest'ultima e dalla (28) si trae

$$\|\Delta\Phi_0 - \Delta\Phi_1\| \leq \frac{2\theta}{1-\theta} \|(1-\lambda)\Delta\Phi_0 + \lambda\Delta\Phi_1\|,$$

e quindi la (27) con $A(\lambda) = 2\theta/(1-\theta)$.

In particolare: se Ξ coincide con Σ e Σ è completo; $\Phi_1 = \Phi$ è una trasformazione di Σ in se soddisfacente alla condizione

$$(29) \quad \|\Delta x - \Delta\Phi(x)\| \leq \theta \|\Delta x\| + \theta \|\Delta\Phi(x)\|,$$

con θ conveniente minore di 1, Φ è completamente invertibile, atteso che tale è la trasformazione identica (l'attuale Φ_0 !).

Questo risultato generalizza il ben noto criterio di invertibilità completa per le trasformazioni del tipo $\Phi(x) = x + K(x)$, in cui K sia una contrazione.

Alla condizione (29) si può dare una forma più espressiva quando Σ è uno spazio Hilbertiano (completo). Indichiamo con $[u, v]$ il prodotto interno dei due vettori $u, v \in \Sigma$ e sia $\|u\| = \sqrt{[u, u]}$.

Dalla (29) si ha

$$\|\Delta x - \Delta\Phi(x)\|^2 \leq \theta^2 \{ \|\Delta x\|^2 + \|\Delta\Phi(x)\|^2 + 2\|\Delta x\| \cdot \|\Delta\Phi(x)\| \},$$

cioè

$$\begin{aligned} & \|\Delta x\|^2 + \|\Delta\Phi(x)\|^2 - 2[\Delta x, \Delta\Phi(x)] \leq \\ & \leq \theta^2 \|\Delta x\|^2 + \theta^2 \|\Delta\Phi(x)\|^2 + 2\theta^2 \|\Delta x\| \cdot \|\Delta\Phi(x)\|; \end{aligned}$$

da cui, posto per brevità

$$(30) \quad r = \frac{\|\Delta\Phi(x)\|}{\|\Delta x\|} \quad (\|\Delta x\| \neq 0),$$

$$\cos \alpha = \frac{[\Delta x, \Delta\Phi(x)]}{\|\Delta x\| \cdot \|\Delta\Phi(x)\|} \quad (0 \leq \alpha \leq \pi),$$

segue

$$(31) \quad (1 - \theta^2) \frac{1 + r^2}{2r} \leq \theta^2 + \cos \alpha$$

atteso che $r > 0$; e quindi separatamente

$$(32) \quad \frac{1+r^2}{2r} \leq \frac{1+\theta^2}{1-\theta^2}$$

$$0 \leq \theta^2 + \cos \alpha.$$

Sicchè una relazione quale la (29) può sussistere soltanto se r è compreso tra due costanti positive ed α discosto da π , come segue dalle (32). Viceversa, se esistono tre costanti positive m , M , ε per cui si abbia

$$m \leq r \leq M,$$

$$\alpha \leq \pi - \varepsilon,$$

anche la (31) sarà verificata per una conveniente scelta della costante θ minore di 1. Dalla (31) si può facilmente risalire alla (29). Potremo perciò concludere, ricordando il significato di r e di α , che:

Se Φ è una trasformazione, lipschitziana nei due sensi, dello spazio Hilbertiano (completo) Σ in sè, e se l'angolo α tra i vettori Δx e $\Delta \Phi(x)$ si mantiene discosto da π , la trasformazione Φ è completamente invertibile in Σ .