

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO VOLPATO

Sull'esistenza di soluzioni periodiche per equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 25 (1956), p. 371-385

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__25__371_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULL'ESISTENZA DI SOLUZIONI PERIODICHE PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL SECONDO ORDINE

Nota () di MARIO VOLPATO (a Ferrara)*

Proseguo in questa Nota le ricerche sull'esistenza di soluzioni periodiche per equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, iniziate altrove¹⁾ con lo studio dell'equazione

$$(1) \quad \ddot{x} + k^2 x = F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}), \quad \left[\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \right].$$

(*) Pervenuta in Redazione il 9 aprile 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Ferrara.

¹⁾ M. VOLPATO, *Sull'esistenza e unicità di soluzioni periodiche per equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine*, Annali Univ. Ferrara, Nuova Serie, vol. III (1955), pp. 99-111.

Colgo l'occasione per correggere alcune sviste di calcolo o tipografiche. La (13) va sostituita con la

$$(13 \text{ bis}) \quad x(t) = \frac{\cos kt}{2k \operatorname{sen} k \frac{T}{2}} \int_0^T \cos \frac{k}{2} (T - 2\xi) F(\xi, \theta(\xi), \dot{\theta}(\xi), \ddot{\theta}(\xi)) d\xi -$$

$$- \frac{\operatorname{sen} kt}{2k \operatorname{sen} k \frac{T}{2}} \int_0^T \operatorname{sen} \frac{k}{2} (T - 2\xi) F(\xi, \theta(\xi), \dot{\theta}(\xi), \ddot{\theta}(\xi)) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{k} \int_0^t \operatorname{sen} k(t - \xi) F(\xi, \theta(\xi), \dot{\theta}(\xi), \ddot{\theta}(\xi)) d\xi;$$

Ora, invece, mi occupo della seguente equazione

$$(2) \quad \ddot{x} + \mathfrak{F}(t, x, \dot{x})x = Q(t, x, \dot{x}), \quad \left[\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \right],$$

e dimostro il

TEOREMA. - *Siano:*

I) $\mathfrak{F}(t, x, \dot{x})$, $Q(t, x, \dot{x})$ due funzioni, di variabili reali, continue per ogni terna (t, x, \dot{x}) di numeri reali, e periodiche, considerate come funzioni della sola variabile t , con periodo ω ($\omega > 0$).

Inoltre:

II) Esistano due funzioni $p(t)$, $P(t)$, [$p(t) \leq P(t)$], non negative, non identicamente nulle, continue e periodiche con periodo ω , per le quali risultano soddisfatte le

$$(3) \quad 0 \leq p(t) \leq \mathfrak{F}(t, x, \dot{x}) \leq P(t),$$

$$(4) \quad \omega \int_0^\omega P(t) dt \leq 4,$$

(t, x, \dot{x}) essendo una qualsiasi terna di numeri reali;

III) la funzione $Q(t, x, \dot{x})$ sia [al pari della $P(t, x, \dot{x})$] limitata.

Allora esiste almeno una funzione $x(t)$, continua, nell'intervallo $0 \leq t \leq \omega$, assieme alla sua derivata prima e seconda, soluzione del problema

$$(5) \quad \begin{cases} \ddot{x} + \mathfrak{F}(t, x, \dot{x})x = Q(t, x, \dot{x}), \\ x(0) = x(\omega); \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\omega), \end{cases}$$

nelle (7), (9), (15) il fattore $\left(\frac{|k|T}{|\text{sen } k \frac{T}{2}|} + 1 \right)$ va sostituito con

$\left(\frac{|k|T}{|\text{sen } k \frac{T}{2}|} + |k| + 1 \right)$; negli enunciati di pag. 110 il fattore $\left(\frac{1}{|\text{sen } k \frac{T}{2}|} \right)$

va sostituito con $\left(\frac{1}{|\text{sen } k \frac{T}{2}|} + 1 \right)$.

e quindi esiste almeno una soluzione periodica, con periodo ω , dell'equazione (2).

È noto che la (4) è la condizione sufficiente, non migliorabile, di Liapounoff²⁾ per la stabilità degli integrali dell'equazione

$$(6) \quad \ddot{x} + P(t)x = 0,$$

stabilità che ha come conseguenza l'esistenza e unicità di una soluzione periodica, di periodo ω , per l'equazione

$$(7) \quad \ddot{x} + P(t)x = F(t),$$

se $F(t)$ è continua e periodica dello stesso periodo ω ³⁾.

Si vede così che il teorema enunciato estende all'equazione non lineare (2) il criterio esistenziale relativo all'equazione lineare (7).

Volendo, si può estendere il teorema enunciato abbandonando la continuità delle varie funzioni rispetto alla variabile t e introducendo l'ordine di idee di Carathéodory. Un'altra estensione si può ottenere supponendo che la funzione $Q(t, x, \dot{x})$ dipenda anche dalla variabile \ddot{x} , nel qual caso il procedimento che seguiremo andrebbe opportunamente modificato sulla falsariga di quello, indicato nel loco citato in¹⁾, per lo studio dell'equazione (1).

1. - Dalla Memoria di Liapounoff, passo citato in²⁾, riportiamo alcuni risultati che raggruppiamo nel seguente

²⁾ A. LIAPOUNOFF, *Problème général de la stabilité du mouvement*, tradotto dal russo da E. DAVAUX, Fac. de Toulouse, 2^e s., vol. IX, pp. 203-477, cap. III, n. 49, p. 402. Per quanto si riferisce alla non migliorabilità della condizione espressa dalla (4) si vegga: E. R. v. KAMPEN e A. WINTNER, *On an absolute constant in the theory of variational stability*, Am. Journ. of Math., vol. 59 (1937), pp. 270-274. Tutti questi risultati sono ricordati in G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, parte prima, Zanichelli, Bologna (1941), cap. VI, § 2, n. 2, a), pp. 317-321.

³⁾ Per questa deduzione cfr., per es., nel loco cit. per ultimo in²⁾, al cap. VI, § 1, la proposizione, a pag. 311, del n. 6, a) e la proposizione, a pag. 313, alla fine del n. 7, a).

LEMMA 1. - Se $\mathcal{F}^*(t)$ è una funzione reale, della variabile reale t , non negativa, non identicamente nulla, continua e periodica, di periodo ω ($\omega > 0$), e se $\mathcal{M}^*(t)$, $\mathcal{N}^*(t)$ sono due integrali dell'equazione

$$(8) \quad \ddot{x} + \mathcal{F}^*(t)x = 0,$$

soddisfacenti, rispettivamente, le condizioni iniziali

$$(9) \quad \begin{cases} \mathcal{M}^*(0) = 0, \\ \dot{\mathcal{M}}^*(0) = 1 \end{cases} \quad (10) \quad \begin{cases} \mathcal{N}^*(0) = 1, \\ \dot{\mathcal{N}}^*(0) = 0 \end{cases}$$

posto

$$(11) \quad 2\mathcal{A}^* = \mathcal{M}^*(\omega) + \dot{\mathcal{N}}^*(\omega),$$

risulta:

I₁)

$$(12) \quad \mathcal{A}^* = 1 + \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} (-1)^n [\mathcal{M}_n^*(\omega) + \dot{\mathcal{N}}_n^*(\omega)],$$

dove

$$(13) \quad \mathcal{M}_n^*(t) = \int_0^t (t - \xi) \mathcal{F}^*(\xi) \mathcal{M}_{n-1}^*(\xi) d\xi;$$

$$\mathcal{N}_n^*(t) = \int_0^t (t - \xi) \mathcal{F}^*(\xi) \dot{\mathcal{N}}_{n-1}^*(\xi) d\xi,$$

$$(14) \quad \mathcal{M}_0^*(t) = 1 \quad ; \quad \dot{\mathcal{N}}_0^*(t) = t,$$

e la serie è assolutamente convergente;

II₁) è verificata la relazione

$$(15) \quad \mathcal{M}_n^*(\omega) + \dot{\mathcal{N}}_n^*(\omega) < [\mathcal{M}_{n-1}^*(\omega) + \dot{\mathcal{N}}_{n-1}^*(\omega)] \frac{\omega}{2n} \int_0^\omega \mathcal{F}^*(\xi) d\xi,$$

III₁) sussistono le disuguaglianze

$$(16) \quad \mathcal{A}^* < 1 - \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} \left(1 - \frac{\omega}{4n} \int_0^\omega \mathcal{F}^*(\xi) d\xi \right) [\mathcal{M}_{2n-1}^*(\omega) + \dot{\mathcal{N}}_{2n-1}^*(\omega)],$$

$$(17) \quad \mathcal{A}^* > 1 - \frac{1}{2} \int_0^\omega \mathfrak{S}^*(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} \left(1 - \frac{\omega}{4n+2} \int_0^\omega \mathfrak{S}^*(\xi) d\xi \right) [\mathcal{M}_{2n}^*(\omega) + \mathcal{N}_{2n}^*(\omega)],$$

di guisa che, se si suppone inoltre che sia

$$(18) \quad \omega \int_0^\omega \mathfrak{S}^*(\xi) d\xi \leq 4,$$

allora

IV₁) la costante \mathcal{A}^* soddisfa le

$$(19) \quad -1 < \mathcal{A} < 1.$$

2. - Conserviamo il significato dei simboli introdotti nel precedente lemma e siano inoltre:

$p(t), P(t)$, [$p(t) \leq P(t)$] due funzioni, reali di variabile reale, non negative e non identicamente nulle, continue e periodiche, dello stesso periodo ω della $\mathfrak{S}^*(t)$;

$u(t), v(t)$ due integrali dell'equazione.

$$(20) \quad \ddot{x} + p(t)x = 0,$$

soddisfacenti, rispettivamente, le condizioni iniziali

$$(21) \quad \begin{cases} u(0) = 1 \\ \dot{u}(0) = 0 \end{cases} ; \quad (22) \quad \begin{cases} v(0) = 0 \\ \dot{v}(0) = 1; \end{cases}$$

$U(t), V(t)$ due integrali dell'equazione

$$(23) \quad \ddot{x} + P(t)x = 0,$$

soddisfacenti, rispettivamente, le condizioni iniziali

$$(24) \quad \begin{cases} U(0) = 1 \\ \dot{U}(0) = 0 \end{cases} ; \quad (25) \quad \begin{cases} V(0) = 0 \\ \dot{V}(0) = 1 \end{cases}$$

Poniamo poi

$$(26) \quad 2a = u(\omega) + \dot{v}(\omega) \quad ; \quad 2A = U(\omega) + \dot{V}(\omega),$$

$$(27) \quad u_0(t) = U_0(t) = 1 \quad ; \quad v_0(t) = V_0(t) = t,$$

$$(28) \quad u_n(t) = \int_0^t (t - \xi) p(\xi) u_{n-1}(\xi) d\xi \quad ; \quad v_n(t) = \int_0^t (t - \xi) p(\xi) v_{n-1}(\xi) d\xi,$$

$$(29) \quad U_n(t) = \int_0^t (t - \xi) P(\xi) U_{n-1}(\xi) d\xi \quad ; \quad V_n(t) = \int_0^t (t - \xi) P(\xi) V_{n-1}(\xi) d\xi,$$

di guisa che, a norma del lemma 1, risulta

$$(30) \quad a < 1 - \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} \left(1 - \frac{\omega}{4n} \int_0^\omega p(\xi) d\xi \right) [u_{2n-1}(\omega) + \dot{v}_{2n-1}(\omega)],$$

$$(31) \quad a > 1 - \frac{\omega}{2} \int_0^\omega p(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} \left(1 - \frac{\omega}{4n+2} \int_0^\omega p(\xi) d\xi \right) [u_{2n}(\omega) + \dot{v}_{2n}(\omega)],$$

e similmente

$$(32) \quad A < 1 - \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} \left(1 - \frac{\omega}{4n} \int_0^\omega P(\xi) d\xi \right) [U_{2n-1}(\omega) + \dot{V}_{2n-1}(\omega)],$$

$$(33) \quad A > 1 - \frac{\omega}{2} \int_0^\omega P(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} \left(1 - \frac{\omega}{4n+2} \int_0^\omega P(\xi) d\xi \right) [U_{2n}(\omega) + \dot{V}_{2n}(\omega)].$$

Ebbene, si stabilisce allora, in modo immediato, il seguente

LEMMA 2. - Se

$$(34) \quad p(t) \leq \mathfrak{S}^*(t) \leq P(t),$$

I₂) allora esistono due costanti

$$(35) \quad \mathcal{A}_1^* = 1 - \frac{\omega}{2} \int_0^{\omega} P(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} \left(1 - \frac{\omega}{4n+2} \int_0^{\omega} P(\xi) d\xi \right) [u_{2n}(\omega) + \dot{v}_{2n}(\omega)],$$

$$(36) \quad \mathcal{A}_2^* = 1 - \frac{\omega}{2} \sum_1^{+\infty} \left(1 - \frac{\omega}{4n} \int_0^{\omega} P(\xi) d\xi \right) [u_{2n-1}(\omega) + \dot{v}_{2n-1}(\omega)],$$

che dipendono, evidentemente, soltanto da $p(t)$, $P(t)$ e non da $\mathfrak{F}^*(t)$, tali che

$$(37) \quad \mathcal{A}_1^* < \mathcal{A}^* < \mathcal{A}_2^*.$$

Se inoltre risulta

$$(38) \quad \omega \int_0^{\omega} P(\xi) d\xi \leq 4,$$

allora

II₂) sussiste anche la

$$(39) \quad -1 < \mathcal{A}_1^* < \mathcal{A}^* < \mathcal{A}_2^* < 1.$$

Infatti la (16) e la (34) porgono

$$(40) \quad \mathcal{A}^* < 1 - \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} \left(1 - \frac{\omega}{4n} \int_0^{\omega} P(\xi) d\xi \right) [\mathcal{U}_{2n-1}^*(\omega) + \mathcal{V}_{2n-1}^*(\omega)] \leq \\ \leq 1 - \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} \left(1 - \frac{\omega}{4n} \int_0^{\omega} P(\xi) d\xi \right) [u_{2n-1}(\omega) + \dot{v}_{2n-1}(\omega)] = \mathcal{A}_2^*,$$

mentre la (17) e la (34) porgono

$$\begin{aligned}
 (41) \quad \mathcal{A}^* &> 1 - \frac{\omega}{2} \int_0^\omega P(\xi) d\xi + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\omega}{4n+2} \int_0^\omega P(\xi) d\xi \right) [\mathcal{Q}_{2n}^*(\omega) + \dot{\mathcal{Q}}_{2n}^*(\omega)] \geq 1 - \frac{\omega}{2} \int_0^\omega P(\xi) d\xi + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\omega}{4n+2} \int_0^\omega P(\xi) d\xi \right) [u_{2n}(\omega) + \dot{v}_{2n}(\omega)] = \mathcal{A}_1^*.
 \end{aligned}$$

3. - Conserviamo il significato dei simboli finora introdotti, e procuriamoci una limitazione per gli integrali $\mathcal{Q}^*(t)$, $\dot{\mathcal{Q}}^*(t)$ della equazione (8). A tale scopo, stabiliamo il seguente

LEMMA 3. - *Nelle ipotesi del lemma 1 sussistono le*

$$\begin{aligned}
 (42) \quad |\mathcal{Q}^*(t)| + |\dot{\mathcal{Q}}^*(t)| &\leq e^{\int_0^t [1+\mathfrak{F}^*(\xi)] d\xi}; \\
 |\mathcal{Q}^*(t)| + |\dot{\mathcal{Q}}^*(t)| &\leq e^{\int_0^t [1+\mathfrak{F}^*(\xi)] d\xi},
 \end{aligned}$$

per ogni t dell'intervallo: $0 \leq t \leq \omega$; di guisa che se è soddisfatta la (18), sussistono le

$$(43) \quad |\mathcal{Q}^*(t)| + |\dot{\mathcal{Q}}^*(t)| \leq e^{\omega + \frac{4}{\omega}}; \quad |\mathcal{Q}^*(t)| + |\dot{\mathcal{Q}}^*(t)| \leq e^{\omega + \frac{4}{\omega}},$$

per ogni t dello stesso intervallo.

Proveremo il lemma nell'ipotesi, più generale, che $\mathfrak{F}^*(t)$ sia soltanto non negativa e sommabile (secondo Lebesgue) nell'intervallo $(0, \omega)$, di modo che $\mathcal{Q}^*(t)$, $\dot{\mathcal{Q}}^*(t)$ possono essere solo assolutamente continue assieme alla loro derivata prima e soddisfacenti, quasi ovunque in $(0, \omega)$, l'equazione (8). Sia allora $x(t)$ una qualsiasi funzione assolutamente continua assieme alla sua derivata prima in $(0, \omega)$ ed ivi soddisfacente,

quasi ovunque, la (8), ossia l'equivalente sistema

$$(44) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \frac{d\dot{x}}{dt} = -\mathfrak{F}^*(t)x. \end{cases}$$

Consideriamo dei singoli membri della (44) il valore assoluto e poi sommiamo membro a membro. Con una evidente maggiorazione si ottiene la

$$(45) \quad \left| \frac{dx}{dt} \right| + \left| \frac{d\dot{x}}{dt} \right| \leq [1 + \mathfrak{F}^*(t)](|x| + |\dot{x}|),$$

soddisfatta, quasi ovunque, in $(0, \omega)$.

Di qui, posto

$$(46) \quad Z(t) = |x(t)| + |\dot{x}(t)|,$$

e osservato che, quasi ovunque in $(0, \omega)$, sussiste la

$$(47) \quad \left| \frac{dZ(t)}{dt} \right| = \left| \frac{d|x|}{dt} + \frac{d|\dot{x}|}{dt} \right| \leq \left| \frac{d|x|}{dt} \right| + \left| \frac{d|\dot{x}|}{dt} \right| = \left| \frac{dx}{dt} \right| + \left| \frac{d\dot{x}}{dt} \right|,$$

segue

$$(48) \quad \left| \frac{dZ(t)}{dt} \right| \leq [1 + \mathfrak{F}^*(t)]Z(t).$$

Moltiplicando la (48) per $e^{-\int_0^t [1 + \mathfrak{F}^*(\xi)] d\xi}$, si ottiene

$$(49) \quad \frac{d}{dt} \left\{ Z(t) e^{-\int_0^t [1 + \mathfrak{F}^*(\xi)] d\xi} \right\} \leq 0,$$

e quindi la

$$(50) \quad Z(t) \leq Z(0) e^{\int_0^t [1 + \mathfrak{F}^*(\xi)] d\xi}.$$

Di qui, dalla (46) e dalle (9) e (10) seguono le (42) del lemma 3, che, pertanto, è provato ⁴⁾.

4. - Indichiamo ora con \mathcal{J} lo spazio delle funzioni continue in $(0, \omega)$, quando come distanza di due tali funzioni si assuma il massimo, in $(0, \omega)$, modulo della loro differenza, e con \mathcal{J}^* l'insieme degli elementi $\lambda = \mathcal{F}^*(t)$ di \mathcal{J} soddisfacenti le (34). Al variare del parametro $\lambda = \mathcal{F}^*(t)$ nell'insieme \mathcal{J}^* , gli integrali $\mathcal{U}^*(t), \mathcal{V}^*(t)$ dell'equazione (8) risultano funzioni del parametro λ . Ebbene, noti risultati, dovuti a G. ZWIRNER ⁵⁾, assicurano che

LEMMA 4. - *Gli integrali $\mathcal{U}^*(t), \mathcal{V}^*(t)$, dell'equazione (8), e le loro derivate prime $\mathcal{U}'^*(t), \mathcal{V}'^*(t)$, sono funzioni continue del parametro λ in \mathcal{J}^* .*

5. - Sia ora $Q^*(t)$ una nuova funzione, non identicamente nulla, continua e periodica, di periodo ω , e studiamo le eventuali soluzioni periodiche dell'equazione non omogenea

$$(51) \quad \ddot{x} + \mathcal{F}^*(t)x = Q^*(t),$$

l'omogenea associata essendo l'equazione (8).

Sussiste, in proposito, il seguente

LEMMA 5. - *Se è soddisfatta la (18), allora l'equazione (51) ammette una e una sola soluzione periodica, di periodo ω ,*

⁴⁾ Per il ragionamento che abbiamo seguito, cfr. M. CINQUINI-CIERRABIO e S. CINQUINI, *Sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$* , Annali di Matematica pura e applicata, tomo XXXII, (1951), pp. 121-155, p. 125.

⁵⁾ G. ZWIRNER, *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e teoremi di differenziabilità rispetto a un parametro*, Annali Triestini, vol. XVIII, (serie IV, vol. II), (1949-50), pp. 1-24, § 2, n. 8, p. 21.

data dalla

$$\begin{aligned}
 (52) \quad \Phi(t) = & \int_0^t \left| \begin{array}{cc} \varrho^*(t) & \varrho \mathcal{L}^*(t) \\ \varrho^*(\xi) & \varrho \mathcal{L}^*(\xi) \end{array} \right| Q^*(\xi) d\xi + \frac{\int_0^{\omega} \left| \begin{array}{cc} \varrho^*(t) & \varrho \mathcal{L}^*(t) \\ \varrho^*(\xi) & \varrho \mathcal{L}^*(\xi) \end{array} \right| Q^*(\xi) d\xi}{2(\mathcal{A}^* - 1)} - \\
 & - \varrho^*(t) \frac{\int_0^{\omega} \left| \begin{array}{cc} \dot{\varrho}^*(\omega) & \dot{\varrho} \mathcal{L}^*(\omega) \\ \varrho^*(\xi) & \varrho \mathcal{L}^*(\xi) \end{array} \right| Q^*(\xi) d\xi}{2(\mathcal{A}^* - 1)} - \\
 & - \varrho \mathcal{L}^*(t) \frac{\int_0^{\omega} \left| \begin{array}{cc} \varrho^*(\omega) & \varrho \mathcal{L}^*(\omega) \\ \varrho^*(\xi) & \varrho \mathcal{L}^*(\xi) \end{array} \right| Q^*(\xi) d\xi}{2(\mathcal{A}^* - 1)}
 \end{aligned}$$

e la sua derivata prima dalla

$$\begin{aligned}
 (53) \quad \dot{\Phi}(t) = & \int_0^t \left| \begin{array}{cc} \dot{\varrho}^*(t) & \dot{\varrho} \mathcal{L}^*(t) \\ \varrho^*(\xi) & \varrho \mathcal{L}^*(\xi) \end{array} \right| Q^*(\xi) d\xi + \frac{\int_0^{\omega} \left| \begin{array}{cc} \dot{\varrho}^*(t) & \dot{\varrho} \mathcal{L}^*(t) \\ \varrho^*(\xi) & \varrho \mathcal{L}^*(\xi) \end{array} \right| Q^*(\xi) d\xi}{2(\mathcal{A}^* - 1)} - \\
 & - \dot{\varrho}^*(t) \frac{\int_0^{\omega} \left| \begin{array}{cc} \dot{\varrho}^*(\omega) & \dot{\varrho} \mathcal{L}^*(\omega) \\ \varrho^*(\xi) & \varrho \mathcal{L}^*(\xi) \end{array} \right| Q^*(\xi) d\xi}{2(\mathcal{A}^* - 1)} - \\
 & - \dot{\varrho} \mathcal{L}^*(t) \frac{\int_0^{\omega} \left| \begin{array}{cc} \dot{\varrho}^*(\omega) & \dot{\varrho} \mathcal{L}^*(\omega) \\ \varrho^*(\xi) & \varrho \mathcal{L}^*(\xi) \end{array} \right| Q^*(\xi) d\xi}{2(\mathcal{A}^* - 1)}.
 \end{aligned}$$

Infatti, essendo

$$(54) \quad \varphi(t) = c_1 \varrho^*(t) + c_2 \varrho \mathcal{L}^*(t) + \int_0^t \left| \begin{array}{cc} \varrho^*(t) & \varrho \mathcal{L}^*(t) \\ \varrho^*(\xi) & \varrho \mathcal{L}^*(\xi) \end{array} \right| Q^*(\xi) d\xi.$$

l'integrale generale della (51), le condizioni di periodicità si

traducono nelle seguenti equazioni nelle incognite c_1, c_2 ,

$$(55) \quad \begin{cases} -\mathcal{V}^*(\omega)c_1 + [1 - \mathcal{M}^*(\omega)]c_2 = \int_0^\omega \left| \begin{array}{cc} \mathcal{V}^*(\omega) & \mathcal{M}^*(\omega) \\ \mathcal{V}^*(\xi) & \mathcal{M}^*(\xi) \end{array} \right| Q^*(\omega) d\xi, \\ [1 - \mathcal{V}^*(\omega)]c_1 - \mathcal{M}^*(\omega)c_2 = \int_0^\omega \left| \begin{array}{cc} \mathcal{V}^*(\omega) & \mathcal{M}^*(\omega) \\ \mathcal{V}^*(\xi) & \mathcal{M}^*(\xi) \end{array} \right| Q^*(\xi) d\xi \end{cases}$$

il cui determinante, tenendo presente che il Wronschiano di $\mathcal{M}^*(t), \mathcal{V}^*(t)$ è costantemente uno e che si è fatta la posizione (11), è uguale a

$$(56) \quad 2(\mathcal{A}^* - 1),$$

certamente diverso da zero a norma della (19). Con calcoli elementari si trova che la soluzione del sistema (55) è data dalle

$$(57) \quad c_1 = \frac{\int_0^\omega \left\{ \mathcal{M}^*(\xi) - \left| \begin{array}{cc} \mathcal{V}^*(\omega) & \mathcal{M}^*(\omega) \\ \mathcal{V}^*(\xi) & \mathcal{M}^*(\xi) \end{array} \right| \right\} Q^*(\xi) d\xi}{2(\mathcal{A}^* - 1)},$$

$$(58) \quad c_2 = \frac{-\int_0^\omega \left\{ \mathcal{V}^*(\xi) + \left| \begin{array}{cc} \mathcal{V}^*(\omega) & \mathcal{M}^*(\omega) \\ \mathcal{V}^*(\xi) & \mathcal{M}^*(\xi) \end{array} \right| \right\} Q^*(\xi) d\xi}{2(\mathcal{A}^* - 1)},$$

di guisa che, sostituendo i valori di c_1, c_2 così trovati in (54) e indicando con $\Phi(t)$ l'integrale particolare che si ottiene, si trova la (52).

6. - Procuriamoci ora una maggiorazione dell'integrale periodico $\Phi(t)$ dell'equazione (51). A tale scopo, stabiliamo il seguente

LEMMA 6. - *Supponiamo che sussistano la (34) e la (38) e indichiamo con \bar{Q} una conveniente costante per cui*

$$(59) \quad |Q^*(t)| \leq \bar{Q}, \quad (0 \leq t \leq \omega).$$

Allora esiste una conveniente costante M , dipendente solo da $p(t)$, $P(t)$, \bar{Q} e non da $\mathcal{S}^*(t)$, $Q^*(t)$, tale che, per ogni t dell'intervallo $(0, \omega)$, sussistono le

$$(60) \quad |\Phi(t)| \leq M \quad , \quad |\dot{\Phi}(t)| \leq M.$$

Infatti, posto $\bar{\mathcal{A}} = \max(|\mathcal{A}_1^*|, |\mathcal{A}_2^*|)$, la (39) del lemma 2 porge la

$$(61) \quad |\mathcal{A}^*| < \bar{\mathcal{A}} < 1,$$

di guisa che:

$$|\mathcal{A}^*| - 1 < \bar{\mathcal{A}} - 1 < 0.$$

Di qui segue:

$$|\bar{\mathcal{A}} - 1| < ||\mathcal{A}^*| - 1| \leq |\mathcal{A}^* - 1|,$$

e quindi

$$(62) \quad \frac{1}{|\mathcal{A}^* - 1|} < \frac{1}{|\bar{\mathcal{A}} - 1|},$$

con $\bar{\mathcal{A}}$ dipendente solo da $p(t)$ e $P(t)$, perchè, a norma del lemma 2, tali sono \mathcal{A}_1^* , \mathcal{A}_2^* .

Dalla (62), e dal fatto che la (34) e la (38) porgono la (18) e quindi la (43) del lemma 3, attesa la (59) segue subito la tesi del lemma 6.

7. - Siamo ora in grado di dimostrare il teorema di esistenza enunciato nella introduzione.

Per la limitatezza della $Q(t, x, \dot{x})$, assunta nell'ipotesi III), possiamo addirittura ammettere che per ogni terna di numeri reali (t, x, \dot{x}) sia

$$(63) \quad |Q(t, x, \dot{x})| \leq \bar{Q},$$

\bar{Q} essendo la stessa costante che figura in (59).

Ciò posto, indichiamo con Σ lo spazio lineare, normale completo delle funzioni continue, in $(0, \omega)$, assieme alla loro derivata prima, la metrica essendo quella lagrangiana, e con Σ_ω la porzione chiusa e convessa di Σ formata dagli elementi

$[\theta(t), \dot{\theta}(t)]$ di Σ che soddisfano le

$$(64) \quad \theta(0) = \theta(\omega) \quad ; \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}(\omega),$$

e inoltre le

$$(65) \quad |\theta(t)| \leq M \quad ; \quad |\dot{\theta}(t)| \leq M,$$

M essendo la costante di cui abbiamo stabilito l'esistenza nel precedente lemma 6.

Definiamo in Σ_ω una trasformazione funzionale nel modo che segue.

Fissiamo un elemento $[\theta(t), \dot{\theta}(t)]$ di Σ_ω e consideriamo il problema

$$(66) \quad \begin{cases} \ddot{x} + \mathfrak{F}(t, \theta(t), \dot{\theta}(t))x = Q(t, \theta(t), \dot{\theta}(t)) \\ x(0) = x(\omega) \quad ; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\omega), \end{cases}$$

nella funzione incognita $x(t)$. Attesa la periodicità, rispetto a t , di periodo ω , delle funzioni $\mathfrak{F}(t, x, \dot{x})$, $Q(t, x, \dot{x})$, ricordate le (64), le funzioni $\mathfrak{F}(t, \theta(t), \dot{\theta}(t))$, $Q(t, \theta(t), \dot{\theta}(t))$ sono continue, periodiche di periodo ω , e, a norma della (4), non identicamente nulle. Inoltre la (3) e la (4) porgono la

$$(67) \quad \omega \int_0^\omega \mathfrak{F}(t, \theta(t), \dot{\theta}(t)) dt \leq 4.$$

Allora, a norma del lemma 5, esiste una e una sola soluzione del problema (66), la quale, posto

$$(68) \quad \mathfrak{F}^*(t) = \mathfrak{F}(t, \theta(t), \dot{\theta}(t)) \quad , \quad Q^*(t) = Q(t, \theta(t), \dot{\theta}(t)),$$

è data dalla $\Phi(t)$ indicata in (52). Ebbene, la trasformazione funzionale che vogliamo definire in Σ_ω sia quella che all'elemento $[\theta(t), \dot{\theta}(t)]$ di Σ_ω fa corrispondere l'elemento $[\Phi(t), \dot{\Phi}(t)]$ dato dalle (52), (53), elemento che, essendo $\Phi(t)$ soluzione del problema (65) e valendo per $\Phi(t)$, $\dot{\Phi}(t)$ le maggiorazioni indicate in (60), appartiene a Σ_ω . Indichiamo con T la trasformazione funzionale ora definita. Attesa la continuità della funzione $Q(t, x, \dot{x})$, le (52) e (53) mostrano chiaramente

che la trasformazione T è continua non appena siano continue

$$(69) \quad \mathcal{Q}^*(t), \dot{\mathcal{Q}}^*(t), \mathcal{Q}^{\prime*}(t), \dot{\mathcal{Q}}^{\prime*}(t)$$

in quanto funzioni dell'elemento $[\theta(t), \dot{\theta}(t)]$ di Σ_ω . Ciò nel fatto è vero, perchè le (69), a norma del lemma 4, sono funzioni continue del parametro $\lambda = \mathfrak{F}^*(t) = \mathfrak{F}(t, \theta(t), \dot{\theta}(t))$, e tale parametro, attesa la continuità uniforme della funzione $\mathfrak{F}(t, x, \dot{x})$ nel dominio chiuso: $0 \leq t \leq \omega, |x| \leq M, |\dot{x}| \leq M$, è appunto una funzione continua dell'elemento $[\theta(t), \dot{\theta}(t)]$ di Σ_ω . Ma vi è di più. La trasformazione continua T è addirittura completamente continua, perchè l'equilimitatezza degli elementi $[\Phi(t), \dot{\Phi}(t)]$, messa in evidenza dalle (60), e la disuguaglianza

$$(70) \quad |\ddot{\Phi}(t)| \leq \bar{Q} + \|P(t)\| M,$$

conseguenza del fatto che $\Phi(t)$ è soluzione del problema (66), porgono la compattezza dell'insieme degli elementi $[\Phi(t), \dot{\Phi}(t)]$ di Σ_ω . Riassumendo, abbiamo provato che T è una trasformazione completamente continua, definita in un insieme chiuso, convesso e limitato Σ_ω , di uno spazio lineare normale e completo Σ , la quale ad ogni elemento di Σ_ω fa corrispondere un altro elemento pure di Σ_ω . È quanto basta per affermare che in Σ_ω vi è almeno un elemento unito per la trasformazione T ; esiste cioè un elemento $[\Phi(t), \dot{\Phi}(t)]$ di Σ_ω per cui risulta

$$(71) \quad \begin{cases} \ddot{\Phi}(t) + \mathfrak{F}(t, \Phi(t), \dot{\Phi}(t))\Phi(t) = Q(t, \Phi(t), \dot{\Phi}(t)) \\ \Phi(0) = \Phi(\omega) \quad ; \quad \dot{\Phi}(0) = \dot{\Phi}(\omega). \end{cases}$$

Di qui risulta che il problema (5) ammette almeno una soluzione. Il nostro teorema è così provato.