

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUCIANO DE VITO

## **Sugli autoomeomorfismi periodici di una striscia**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 26 (1956), p. 124-138

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1956\\_\\_26\\_\\_124\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__124_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## SUGLI AUTOOMEOMORFISMI PERIODICI DI UNA STRISCIA

*Nota (\*) di LUCIANO DE VITO (a Trieste).*

Il teorema di Poincaré sugli autoomeomorfismi periodici e privi di punti uniti di una striscia afferma che, se in un tal autoomeomorfismo i lati della striscia sono uniti e sono spostati in versi opposti, quell'autoomeomorfismo ammette come libera almeno una linea contenuta nella striscia e periodica dello stesso periodo dell'autoomeomorfismo.

Nel presente lavoro mi propongo invece di esaminare quali conseguenze si possano trarre dall'ipotesi che i lati della striscia siano spostati nello stesso verso<sup>1)</sup>. A tal proposito c'è da osservare che, tanto nella dimostrazione del teorema di Poincaré data recentemente da Scorza Dragoni<sup>2)</sup> quanto in quella datane da Kerékjártó<sup>3)</sup>, non si prova soltanto che, se ogni continuo che collega i due lati della striscia incontra il proprio trasformato, esiste una linea libera e periodica, come vuole il teorema di Poincaré, ma si prova anche implicita-

---

(\*) Pervenuta in Redazione il 9 luglio 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Trieste.

1) Poichè non ci sono punti uniti, ogni retta che sia invariante nell'autoomeomorfismo viene da questo spostata tutta in un medesimo verso.

2) G. SCORZA DRAGONI: *Una dimostrazione dell'ultimo teorema geometrico di Poincaré*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XXV (1956), pagg. 1-104.

3) B. v. KERÉKJÁRTÓ: *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré*, Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Vol. IV (1928), pagg. 87-102.

mente (come peraltro chiariremo) che, *se un autoomeomorfismo  $t$  periodico e privo di punti uniti di una striscia  $S$  trasforma in sè ciascuno dei lati di questa e non lascia libera nessuna linea periodica dello stesso periodo di  $t$ , allora esiste una curva semplice, libera rispetto a  $t$ , che unisce i lati della striscia e che non taglia mai le proprie immagini nelle traslazioni ordinarie di  $S$  di passo uguale al periodo dell'autoomeomorfismo  $t$  <sup>4)</sup>.*

Nella presente Nota si proverà che *a quella curva semplice, in quelle ipotesi, si può imporre la condizione ulteriore di essere libera anche in quelle traslazioni ordinarie di  $S$ .*

**1. Ipotesi e convenzioni.** - Nel piano cartesiano  $(x, y)$  sia  $S$  la striscia dei punti per i quali riesce  $0 \leq y \leq 1$ . La  $S$  sia trasformata in sè da un autoomeomorfismo  $t$  il quale sia periodico (nella  $x$ ) di periodo 1, sia privo di punti uniti, e trasformi in sè ciascuna delle rette  $y = 0$  e  $y = 1$ . Con  $\theta$  si indicherà la traslazione ordinaria che porta il punto  $(x, y)$  di  $S$  nel punto  $(x + 1, y)$ .

Supposto, il che non è restrittivo, che l'ascissa di  $t(0)$  sia uguale ad  $1/2$ , indichiamo con  $2\eta$  un summultiplo positivo di  $1/2$  tale che ogni insieme contenuto in  $S$ , di diametro minore di  $6\eta$ , sia libero in  $t$  <sup>5)</sup>. Consideriamo i quadrati:

- ... ;  $-2\eta \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2\eta; \quad 0 \leq x \leq 2\eta, 0 \leq y \leq 2\eta; \dots$
- ... ;  $-\eta \leq x \leq \eta, 2\eta \leq y \leq 4\eta; \quad \eta \leq x \leq 3\eta, 2\eta \leq y \leq 4\eta; \dots$
- .....
- ... ;  $-\eta \leq x \leq \eta, 1 - 2\eta \leq y \leq 1; \quad \eta \leq x \leq 3\eta, 1 - 2\eta \leq y \leq 1; \dots$

e suddividiamo i loro lati paralleli all'asse  $x$  mediante i rispettivi punti medi; otteniamo così delle celle esagonali, con

<sup>4)</sup> Questo teorema era stato enunciato da G. SCORZA DRAGONI in: *Sugli autoomeomorfismi del piano privi di punti uniti*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol. XVIII (1949), pagg. 1-53.

<sup>5)</sup> Per queste posizioni e per quelle che seguiranno in questa parte, si veda la Memoria di Scorza Dragoni citata in <sup>2)</sup>.

due lati, paralleli all'asse  $y$ , lunghi  $2\eta$  e con i rimanenti quattro, paralleli all'asse  $x$ , lunghi  $\eta$ .

Il complesso delle celle esagonali così ottenute sarà indicato con  $K$  e come lati e vertici di  $K$  s'intenderanno i lati ed i vertici delle celle di  $K$ . Ovviamente due celle di  $K$  che non siano disgiunte hanno in comune tutto un lato e soltanto un lato, ogni lato di  $K$  appartiene a due celle e soltanto a due celle di  $K$ , due lati di  $K$  che non siano disgiunti hanno in comune un vertice e soltanto un vertice, ogni vertice di  $K$  appartiene a tre e soltanto a tre celle di  $K$  ed a tre e soltanto a tre lati di  $K$ , ogni stella di  $K$ , cioè ogni somma di tre celle di  $K$  con un vertice comune, è libera in  $t$ . Infine il complesso  $K$  è mutato in se stesso da  $\vartheta$ .

Daremo il nome di *catena normale* ad ogni insieme di celle di  $K$  che goda delle seguenti proprietà:

- 1) è un insieme connesso;
- 2) se la catena non è costituita da una sola cella, ogni sua cella ha punti in comune con una o, al più, con due ulteriori celle della catena;
- 3) se la catena non è costituita da una sola cella, le sue celle che hanno punti in comune con una sola ulteriore cella della catena sono due e saranno le *celle estreme della catena*; se la catena è costituita da una sola cella, questa prenderà ancora il nome di *cella estrema della catena*.

Daremo il nome di *bisuccessione normale* ad ogni insieme di celle di  $K$  che goda delle seguenti proprietà:

- 1) ogni cella della bisuccessione ha punti in comune con due e soltanto con due ulteriori celle della bisuccessione;
- 2) ogni coppia di celle della bisuccessione può essere riguardata come coppia di celle estreme di una catena normale contenuta nella bisuccessione;
- 3) le celle della bisuccessione non sono in numero finito \*).

---

\* Le condizioni 2) e 3) hanno come conseguenza che ogni cella della bisuccessione divide in due complessi connessi le celle di questa.

Una bisuccessione normale  $\Gamma$  si dice periodica di periodo 1 se è mutata in sè dalla  $\vartheta: \Gamma = \vartheta(\Gamma)$ .

Si indichi ora con  $K_1$  l'insieme di tutte le celle di  $K$  che hanno un lato sull'asse  $x$  e con  $K_2$  quello di tutte le celle di  $K$  che hanno un lato sulla retta  $y=1$ . Ogni bisuccessione normale, periodica, *contenuta nell'interno di  $S$* , decompone, in senso ovvio, le rimanenti celle di  $K$  in due complessi connessi; se  $\Gamma$  è una tal bisuccessione,  $\Gamma'$  sarà sempre, di quei due complessi, quello che contiene  $K_1$  e  $\Gamma''$  quello che contiene  $K_2$ ; ovvia la convenzione da adottare nel caso in cui la bisuccessione normale periodica venga indicata con  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , etc..

Per quel che riguarda le spezzate, faremo la seguente convenzione: se una spezzata semplice e aperta  $j$  ha soltanto un estremo sulla retta  $y=0$  e soltanto l'altro estremo sulla retta  $y=1$ , di guisa che  $j$  decompone  $S$  in due insiemi chiusi e connessi (che hanno  $j$  come intersezione), indicheremo con  $J$ , di quei due insiemi, quello che contiene le immagini in  $\vartheta$  degli estremi di  $j$  e con  $J'$  l'altro; ovvia la convenzione da adottare se la spezzata semplice verrà indicata con  $j_1, j_2, j_1^*, j_2^*$ , etc..

**2. Considerazioni preliminari.** - Ciò premesso, Scorza Dragoni (in loc. cit.<sup>2</sup>) ha di fatto provato che, se ogni sottocontinuo di  $S$ , che abbia un punto sulla retta  $y=0$  ed un punto sulla retta  $y=1$ , incontra la propria immagine in  $t$ , allora  $K$  contiene almeno una bisuccessione normale, periodica di periodo 1, libera in  $t$ . Ma, se si riprende la dimostrazione di Scorza Dragoni, assumendo come ipotesi che ogni bisuccessione normale e periodica di periodo 1 incontri la propria immagine in  $t$ , si riconosce che vi è implicitamente dimostrato quanto segue:

I - o  $S$  contiene una catena normale  $\Delta$  libera in  $t$ , priva di celle in comune con  $\vartheta(\Delta)$  <sup>7</sup>) ed avente una cella estrema in  $K_1$  ed una in  $K_2$  e le rimanenti nell'interno di  $S$ ,

---

<sup>7</sup>) Di conseguenza  $\Delta$  e  $\vartheta(\Delta)$  possono avere in comune al più lati delle proprie celle.

oppure:

II -  $S$  contiene « libera in  $t$  » una catena

$$\Delta_0^* + T_1 + \Delta_1^* + T_2 + \Delta_2^* + \dots + \Delta_{t-1}^* + T_t + \Delta_t^* \quad 8),$$

dove

$$T_1, T_2, \dots, T_{t-1}, T_t$$

sono catene normali (libere in  $t$ ), rispettivamente contenute in bisuccessioni normali, periodiche di periodo 1:

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{t-1}, \Gamma_t$$

contenute nell'interno di  $S$  e tali che:

$$\Gamma_1 + \Gamma_1'' \supset \Gamma_2 + \Gamma_2'' \supset \dots \supset \Gamma_{t-1} + \Gamma_{t-1}'' \supset \Gamma_t;$$

e dove

$$\Delta_0^*, \Delta_1^*, \dots, \Delta_{t-1}^*, \Delta_t^*$$

sono catene normali (libere in  $t$ ), prive di celle in comune con le loro immagini in  $\vartheta^9$ ) e per le quali inoltre si verificano le seguenti circostanze: indicate con  $\delta_k^i$  ( $i = 1, 2$ ) le celle estreme di  $\Delta_k^*$ , la catena  $\Delta_0^*$  ha la sola cella  $\delta_0^1$  in  $K_1$  e la sola cella  $\delta_0^2$  in  $\Gamma_1$ ,  $\Delta_1^*$  ha la sola cella  $\delta_1^1$  in  $\Gamma_1$  e la sola cella  $\delta_1^2$  in  $\Gamma_2$ , ...,  $\Delta_t^*$  ha la sola cella  $\delta_t^1$  in  $\Gamma_t$  e la sola cella  $\delta_t^2$  in  $K_2$ ; inoltre riesce:

$$\delta_0^2 \subset T_1, \delta_1^1 \subset T_1, \delta_1^2 \subset T_2, \dots, \delta_{t-1}^2 \subset T_t, \delta_t^1 \subset T_t \quad 10).$$

**3. Dimostrazione del teorema.** - Nel primo dei due casi considerati precedentemente il teorema è ovvio; infatti ogni curva semplice, contenuta in  $\Delta$  e priva di punti in comune

8) La catena  $\Delta_0^*$ , con le notazioni usate da Scorza Dragoni in loc. cit. 2), sarebbe indicata con  $\Delta_{n+1}$ .

9) Di conseguenza anche  $\Delta_\mu^*$  e  $\vartheta(\Delta_\mu^*)(\mu = 0, 1, \dots, t)$  possono avere in comune al più lati delle proprie celle.

10) Non è escluso che qualche catena  $T_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, t$ ) si riduca ad una sola cella, al pari di qualcuna delle  $\Delta_\nu^*$  ( $\nu = 1, \dots, t-1$ ) e non è neppure escluso che  $T_\mu$  e  $T_\nu$  ( $1 \leq \mu < \nu \leq t$ ) abbiano qualche cella in comune, nel qual caso tutte le catene  $\Delta_\mu^*, \Delta_{\mu+1}^*, \dots, \Delta_{\nu-2}^*, \Delta_{\nu-1}^*$  si possono identificare con una qualsiasi di queste celle.

con le celle di  $K - \Delta$ , soddisfa alle condizioni richieste dalla tesi.

Basta pertanto che ci occupiamo del secondo caso.

Indichiamo con  $T_\mu^*$  la sottocatena normale di  $T_\mu$  che ha per celle estreme le celle (eventualmente coincidenti)  $\delta_{\mu-1}^2$  e  $\delta_\mu^1$  <sup>11)</sup>.

Posto  $\Delta^* = \Delta_0^* + T_1^* + \dots + T_t^* + \Delta_t^*$  di guisa che  $\Delta^*$  risulta, in particolare, un insieme connesso, libero in  $t$ , ed avente punti sulle rette  $y = 0$  e  $y = 1$ , indichiamo con  $j$  l'insieme di quei punti di  $\Delta^*$  che si possono unire con l'infinito negativo dell'asse  $x$  <sup>12)</sup> mediante una semilinea che appartenga ad  $S$  e che non abbia ulteriori punti in comune con  $\Delta^*$  oltre l'origine. È evidente che:

1)  $j$  ha soltanto un punto  $A$  sulla retta  $y = 0$  ed un punto  $B$  sulla retta  $y = 1$ ;

2)  $j$  è una spezzata semplice (contenuta in  $\Delta^*$  e quindi libera in  $t$ ) costituita esclusivamente da lati di  $K$ ;

3)  $\Delta^* \subset J$ , cioè tutti i punti di  $\Delta^* - j$  si possono unire con l'infinito positivo dell'asse  $x$  mediante una semilinea che appartenga ad  $S$  e che non incontri  $j$ .

Si vede immediatamente che:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\Delta_0^* - \delta_0^2) &\subset \Gamma_1' \cdot J \\ \mathfrak{A}(\Delta_\nu^* - \delta_\nu^1 - \delta_\nu^2) &\subset \Gamma_\nu'' \cdot \Gamma_{\nu+1}' \cdot J \\ \mathfrak{A}(\Delta_t^* - \delta_t^1) &\subset \Gamma_t'' \cdot J \quad \nu = 1, \dots, t-1 \\ \mathfrak{A}(T_\mu^*) &\subset \Gamma_\mu \cdot J \quad \mu = 1, \dots, t. \end{aligned}$$

Ne viene che  $\mathfrak{A}(j) \subset J$ .

In tal modo si è provata l'esistenza di una spezzata semplice, libera in  $t$ , che non taglia la propria immagine in  $\mathfrak{A}$  ed avente un sol punto sulla retta  $y = 0$  ed un sol punto sulla retta  $y = 1$ , tali essendo le proprietà della spezzata  $j$  <sup>13)</sup>.

11) Nel caso che  $\delta_{\mu-1}^2$  coincida con  $\delta_\mu^1$ ,  $T_\mu^*$  si riduce da una sola cella.

12) Il senso di questa locuzione è ovvio.

13) All'esistenza di una curva quale quella da noi indicata con  $j$  (libera in  $t$  e che non taglia la propria immagine in  $\mathfrak{A}$ ) si può anche arrivare

**4. Continua la dimostrazione del teorema.** - Ci proponiamo ora di costruire, partendo da  $j$ , una spezzata semplice, libera sia in  $t$  che in  $\vartheta$ .

A tale scopo incominciamo col costruire un'altra spezzata  $j_1$ , contenuta in  $\Delta^*$ , avente soltanto gli estremi sulle rette  $y=0$  e  $y=1$ , priva di punti in comune con  $j$ , e verificante anch'essa la  $\vartheta(j_1) \subset J_1$ .

Decomponiamo ogni cella di  $K$  in  $2^{2r+2}$  celle quadrate di lato  $\eta/2^r$ , essendo  $r$  un intero maggiore di 1. Indichiamo con

servendosi del metodo di Kerékjártó. La dimostrazione di Kerékjártó, applicata al caso attuale, porta facilmente alla esistenza di una curva semplice ed aperta, contenuta nella striscia  $S$ , con un estremo sull'asse  $x$  e l'altro su  $y=1$ , con i propri punti interni contenuti nell'interno di  $S$ , libera in  $t$ . Sia  $\iota$  una tal curva e sia  $n$  un intero positivo per cui risulti  $\iota \cdot \vartheta^n(\iota) = 0$ . Indichiamo con  $\iota_0$  l'insieme di quei punti di  $I \cdot \vartheta(I) \cdot \vartheta^2(I) \cdot \dots \cdot \vartheta^{n-1}(I)$  che si possono congiungere con l'infinito negativo dell'asse  $x$  mediante una semilinea, contenuta in  $S$ , che non abbia ulteriori punti in comune con  $I \cdot \vartheta(I) \cdot \vartheta^2(I) \cdot \dots \cdot \vartheta^{n-1}(I)$  oltre l'origine;  $\iota_0$  è una curva aperta e semplice di  $S$  ed ha soltanto gli estremi sulle rette  $y=0$  e  $y=1$ .

Mostriamo che la curva  $\iota_0$  non taglia la propria immagine in  $\vartheta$  ed è libera in  $t$ .

Il primo fatto segue subito dalle due relazioni, di verifica immediata:

$$(a) \quad \iota_0 \subset I \cdot \vartheta(I) \cdot \vartheta^2(I) \cdot \dots \cdot \vartheta^{n-1}(I), \quad \vartheta^n(I) \subset I;$$

infatti, dalla prima viene:

$$\vartheta(\iota_0) \subset \vartheta(I) \cdot \vartheta^2(I) \cdot \dots \cdot \vartheta^n(I)$$

e quindi, tenuto conto della seconda delle (a):

$$\vartheta(\iota_0) \subset I \cdot \vartheta(I) \cdot \vartheta^2(I) \cdot \dots \cdot \vartheta^{n-1}(I)$$

ovvero, per la definizione stessa di  $\iota_0$ :

$$\vartheta(\iota_0) \subset I_0.$$

Dimostriamo la libertà in  $t$  di  $\iota_0$ . È ovviamente lecito supporre che  $t$  e  $\vartheta$  spostino l'asse  $x$  nello stesso verso; allora, per il fatto che  $\iota_0$  è libera in  $t$ , si ha:

$$t(I) \subset I - \iota$$

e quindi, qualunque sia l'intero positivo  $k$ :

$$\vartheta^k t(I) \subset \vartheta^k(I - \iota)$$

ovvero:

$$(b) \quad t\vartheta^k(I) \subset \vartheta^k(I - \iota).$$



$K^{(1)}$  l'insieme delle celle quadrate che in tal modo si ottengono<sup>14)</sup> e con  $\Lambda^{(1)}$  la totalità delle celle di  $K^{(1)}$  che hanno almeno un punto in comune con  $j$  e che sono contenute in  $J$ . È evidente che  $\Lambda^{(1)} \subset \Delta^*$ .

Proviamo che la frontiera di  $\Lambda^{(1)}$  è una spezzata semplice e chiusa costituita da un segmento  $A_1A$  situato sull'asse  $x$ , dalla spezzata  $j$ , da un segmento  $BB_1$  situato su  $y=1$  e da un'altra spezzata  $j_1$  contenuta, ovviamente, in  $\Delta^*$ .

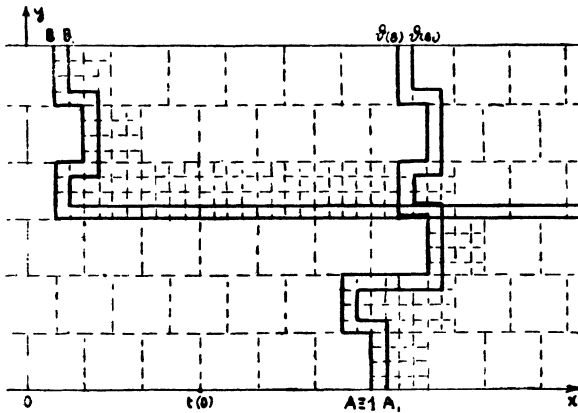


Fig. 1

Per la prima delle (a) e per la (b) si ha :

$$t(t_0) \subset t[I \cdot \vartheta(I) \cdot \vartheta^2(I) \cdot \dots \cdot \vartheta^{n-1}(I)] \equiv \\ \equiv t(I) \cdot t\vartheta(I) \cdot t\vartheta^2(I) \cdot \dots \cdot t\vartheta^{n-1}(I) \subset (I-t) \cdot \vartheta(I-t) \cdot \vartheta^2(I-t) \cdot \dots \cdot \vartheta^{n-1}(I-t)$$

e. poichè, com'è ovvio

$$(I-t) \cdot \vartheta(I-t) \cdot \vartheta^2(I-t) \cdot \dots \cdot \vartheta^{n-1}(I-t) \equiv I \cdot \vartheta(I) \cdot \dots \cdot \vartheta^{n-1}(I) - t_0,$$

riesce provato che

$$t(t_0) \subset I \cdot \vartheta(I) \cdot \vartheta^2(I) \cdot \dots \cdot \vartheta^{n-1}(I) - t_0$$

ovvero :

$$t(t_0) \cdot t_0 = 0.$$

Naturalmente si può pensare che  $t$  sia una spezzata costituita da lati di una suddivisione quale è  $K$  (purchè i lati della suddivisione siano abbastanza piccoli); allora anche  $t_0$  gode della medesima proprietà e può essere sostituita alla spezzata  $j$ .

14) Il complesso  $K^{(1)}$  è mutato in sè da  $\vartheta$ .

Per l'ipotesi fatta su  $r$ , ogni cella di  $\Lambda^{(1)}$ , che non abbia punti in comune con le rette  $y=0$  e  $y=1$ , è adiacente<sup>15)</sup> a due e soltanto a due celle di  $\Lambda^{(1)}$ . Ne viene che in ogni vertice di  $\Lambda^{(1)}$ <sup>16)</sup>, che non appartenga nè a  $j$  nè alle rette  $y=0$  e  $y=1$ , concorrono due e soltanto due lati di  $\Lambda^{(1)}$ <sup>17)</sup> privi di punti in comune con  $j$ . Consideriamo la cella di  $\Lambda^{(1)}$  che contiene  $A$  e indichiamo con  $A_1$  il suo ulteriore vertice sull'asse  $x$ ; evidentemente fra i lati di  $\Lambda^{(1)}$ , che non abbiano punti in comune con  $j$ , ce n'è uno solo con un estremo in  $A_1$ . Analoga proprietà sussiste per il punto  $B_1$  che si definisce in modo analogo al punto  $A_1$  sulla retta  $y=1$ . Queste osservazioni permettono di concludere che l'insieme dei lati di  $K^{(1)}$  ognuno dei quali appartiene ad una sola cella di  $\Lambda^{(1)}$  è costituito dalla spezzata semplice  $A_1A + j + BB_1$  e da una ulteriore spezzata semplice e aperta  $j_1$  che ha gli stessi estremi di  $A_1A + j + BB_1$  e che con questa non ha altri punti in comune.

Mostriamo ora che  $\vartheta(j_1) \subset J_1$ . Intanto  $\vartheta(J) \subset J$ ;  $\vartheta(j_1)$  appartiene a  $\vartheta(J)$  e non ha punti in comune con  $\vartheta(j)$ , com'è ovvio; quindi  $\vartheta(j_1)$  è contenuta in  $J$  ed ha soltanto gli estremi sulla frontiera di questo. Inoltre è evidente che le celle di  $K^{(1)}$  contenute in  $J$  o appartengono a  $\Lambda^{(1)}$  oppure sono contenute in  $J_1$ . Pertanto, se la spezzata  $\vartheta(j_1)$  avesse uno,  $P$ , dei propri punti interni nell'interno di  $J_1'$ ,  $P$  sarebbe contenuto in una cella di  $\Lambda^{(1)}$  senza appartenere nè a  $j$  nè a  $j_1$  e il lato di  $\vartheta(j_1)$  contenente  $P$  avrebbe un estremo su  $j$ , mentre si è già visto che questo è impossibile.

Passiamo ora alla costruzione di un'altra spezzata  $j_1^*$  contenuta in  $J_1' \cdot J$  e quindi in  $\Delta^*$ , priva di punti in comune con  $j + j_1$ , con un estremo (e soltanto un estremo) sull'asse delle  $x$  e l'altro (e soltanto l'altro) estremo sulla retta  $y=1$  e siffatta da aversi  $\vartheta(j_1^*) \subset J_1^*$ . A questo scopo decomponiamo ogni cella di  $K^{(1)}$  in  $2^{2r}$  celle quadrate di lato  $\eta/2^{2r}$ ,  $r$  essendo il

15) Due celle si diranno adiacenti se hanno un lato in comune.

16) Per *vertici* e *lati* di  $\Lambda^{(1)}$  si intenderanno i vertici ed i lati delle celle di  $\Lambda^{(1)}$ . Analoga convenzione si adotterà anche nel seguito per i complessi di celle:  $\Lambda^{(2)}$ ,  $\Lambda^{(3)}$  etc...

17) Cfr. nota 16).

solito intero maggiore di 1. Indichiamo con  $K^{(2)}$  l'insieme delle celle che così si ottengono<sup>18)</sup> e con  $\Lambda^{(2)}$  la totalità delle celle di  $K^{(2)}$  che hanno almeno un punto in comune con  $j_1$  e che sono contenute in  $J_1'$ . È evidente che  $\Lambda^{(2)} \subset \Lambda^{(1)}$ . Si riconosce subito che il caso attuale è del tutto analogo a quello precedente; basta infatti tenere presente l'ipotesi fatta su  $r$  ed osservare che  $j_1$  è una spezzata semplice, che ogni suo lato è di  $K^{(1)}$  e che non ha altri punti, oltre ai suoi estremi, sulle rette  $y=0$  e  $y=1$ . Come nel caso precedente si può quindi dimostrare che la frontiera di  $\Lambda^{(2)}$  è una spezzata semplice

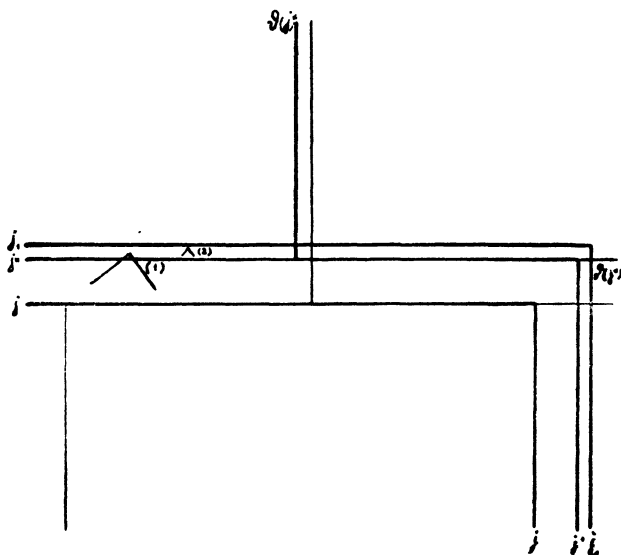


Fig. 2

costituita da un segmento  $A_1^*A_1$  contenuto nell'asse  $x$ , da  $j_1$ , da un segmento  $B_1B_1^*$  della retta  $y=1$  e da una ulteriore spezzata semplice aperta che sarà appunto la nostra  $j_1^*$ . Questa spezzata è ovviamente contenuta in  $J_1' \cdot J$ , e quindi in  $\Delta^*$ , non ha punti in comune con  $j + j_1$ , non ha punti sulle rette  $y=0$  e  $y=1$  ad eccezione dei suoi estremi  $A_1^*$  e  $B_1^*$ ; inoltre un ra-

18) Il complesso  $K^{(2)}$  è mutato in sè da  $\vartheta$ .

gionamento analogo a quello che prima ci aveva condotto alla  $\vartheta(j_1) \subset J_1$ , qui ci porta alla  $\vartheta(j_1^*) \subset J_1^*$ .

Si possono a questo punto presentare due casi: o  $\vartheta(j_1^*)$  è contenuta in  $J_1$ , oppure  $\vartheta(j_1^*)$  ha punti anche in  $J_1 - j_1$ .

Nel primo caso, e cioè che sia  $\vartheta(j_1^*) \subset J_1$ , il teorema è provato; infatti, per costruzione,  $J_1$  è contenuto in  $J_1^* - j_1^*$  e quindi  $\vartheta(j_1^*)$  appartiene a  $J_1^* - j_1^*$ . Ne viene che la spezzata  $j_1^*$ , libera in  $t$ , perchè contenuta in  $\Delta^*$ , riesce libera anche in  $\vartheta$ .

Nel secondo caso, e cioè che non sia vuoto l'insieme prodotto di  $J_1 - j_1$  con  $\vartheta(j_1^*)$ , si indichi con  $j_2$  l'insieme di quei punti di  $j_1 + \vartheta(j_1^*)$  che si possono unire con l'infinito

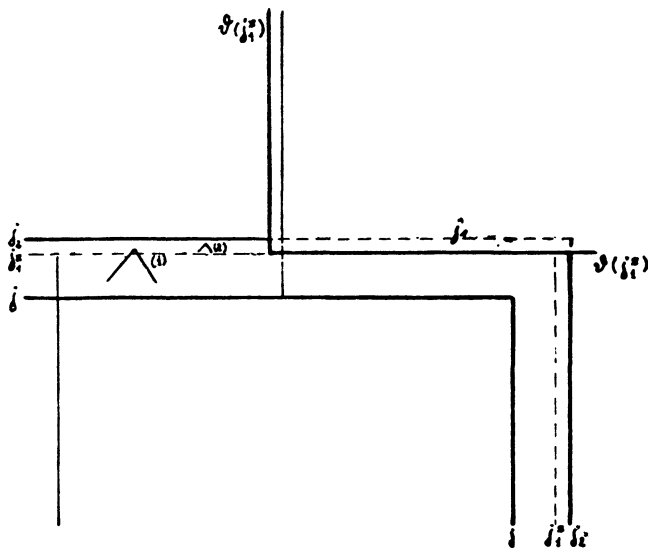


Fig. 3

nito negativo dell'asse  $x$  mediante una semilinea che appartenga ad  $S$  e che non incontri ulteriormente l'insieme  $j_1 + \vartheta(j_1^*)$ .

Osserviamo che:

- 1)  $j_2$  è una spezzata formata con lati di  $K^{(2)}$ , infatti da lati di  $K^{(2)}$  sono costituite le spezzate  $j_1$  e  $\vartheta(j_1^*)$ ;

2) la spezzata  $j_2$  è semplice, ciò viene, com'è noto, dal fatto che  $j_1$  e  $\vartheta(j_1^*)$  sono due spezzate semplici;

3)  $j_2$  ha soltanto gli estremi sulle rette  $y = 0$  e  $y = 1$ ; questi estremi sono  $A_1$  e  $B_1$  (estremi di  $j_1$ );

4) la spezzata  $j_2$  è contenuta in  $\Lambda^{(2)}$ , infatti  $j_2 \subset J_1' \cdot J_1^*$ ; da qui l'asserto, atteso che  $\Lambda^{(2)}$  è, per costruzione, formato dalle celle dell'insieme  $J_1' \cdot J_1^*$ ;

5)  $j_2$  è libera in  $t$ , infatti:  $j_2 \subset \Lambda^{(2)} \subset \Lambda^{(1)} \subset \Delta^*$ .

Inoltre si verificano subito le relazioni:

- (1)  $J_2' \subset J_1'$
- (2)  $J_1 + \vartheta(J_1^*) \subset J_2$
- (3)  $j_2 - \vartheta(j_1^*) \subset j_1$ .

Mostriamo da ultimo che:

(4)  $\vartheta(j_2) \subset J_2$

infatti:  $j_2 \subset j_1 + \vartheta(j_1^*)$  donde:  $\vartheta(j_2) \subset \vartheta(j_1) + \vartheta^2(j_1^*) \subset J_1 + \vartheta(J_1^*) \subset J_2$ .

Decomponiamo ogni cella di  $K^{(2)}$  in  $2^{2r}$  celle quadrate di lato  $\eta/2^{2r}$ . Indichiamo con  $K^{(3)}$  l'insieme delle celle che così si ottengono<sup>19)</sup> e con  $\Lambda^{(3)}$  la totalità delle celle di  $K^{(3)}$  che hanno almeno un punto in comune con  $j_2$  e che sono contenute in  $J_2'$ . È evidente che  $\Lambda^{(3)}$  è contenuto in  $\Lambda^{(1)}$ . Anche qui, come nei casi precedenti, il contorno di  $\Lambda^{(3)}$  è una spezzata semplice, chiusa, costituita da un segmento  $A_2^*A_1$  disposto sull'asse  $x$ , da  $j_2$ , da un segmento  $B_1B_2^*$  della retta  $y = 1$  e da una spezzata semplice e aperta  $j_2^*$  priva di punti in comune con  $j + j_2$ . Inoltre si prova, con lo stesso ragionamento fatto in precedenza per la spezzata  $j_1^*$ , che  $\vartheta(j_2^*)$  è contenuta in  $J_2^*$ .

Allora, se  $\vartheta(j_2^*)$  è contenuta in  $J_2$  la spezzata  $j_2^*$  soddisfa alla tesi; donde il teorema.

---

<sup>19)</sup> Il complesso  $K^{(3)}$  è mutato in sè da  $\vartheta$ .

Nel caso contrario, cioè nel caso che  $\vartheta(j_2^*)$  abbia punti anche in  $J_2' - j_2$ , si consideri l'insieme  $j_3$  di quei punti di  $j_2 + \vartheta(j_2^*)$  che si possono unire con l'infinito negativo dell'asse  $x$  mediante una semilinea che appartenga ad  $S$  e che non incontri ulteriormente  $j_2 + \vartheta(j_2^*)$ . Per  $j_3$  sussistono proprietà analoghe a quelle osservate per  $j_2$  e si può quindi affermare che  $j_3$  è una spezzata semplice, formata con i lati di  $K^{(3)}$ , contenuta in  $\Lambda^{(3)}$  e quindi anche in  $\Delta^*$ , con gli estremi in  $A_1$  e  $B_1$ , con i propri punti interni contenuti nell'interno di  $S$ ; inoltre:

$$J_3' \subset J_2', \quad J_2 + \vartheta(J_2^*) \subset J_3, \quad j_3 - \vartheta(j_2^*) \subset j_2, \quad \vartheta(j_3) \subset J_3.$$

Decomponiamo ogni cella di  $K^{(3)}$  in  $2^{2r}$  celle quadrate di lato  $\eta/2^{4r}$ . Indichiamo con  $K^{(4)}$  l'insieme delle celle che così si ottengono e con  $\Lambda^{(4)}$  la totalità delle celle di  $K^{(4)}$  che hanno almeno un punto in comune con  $j_3$  e che sono contenute in  $J_3'$ . Etc ...

Dimostriamo ora che, continuando la costruzione, ad un certo momento la spezzata  $j_n^*$  cui si giunge soddisfa alla  $\vartheta(j_n^*) \subset J_n$  e quindi  $j_n^*$  è libera in  $t$  ed in  $\vartheta$ .

Indichiamo con  $a$  la minima ascissa dei punti di  $\vartheta(j_1^*)$  e con  $C$  l'insieme dei punti di ascissa  $x \leq a - \eta/2^{3r}$ .

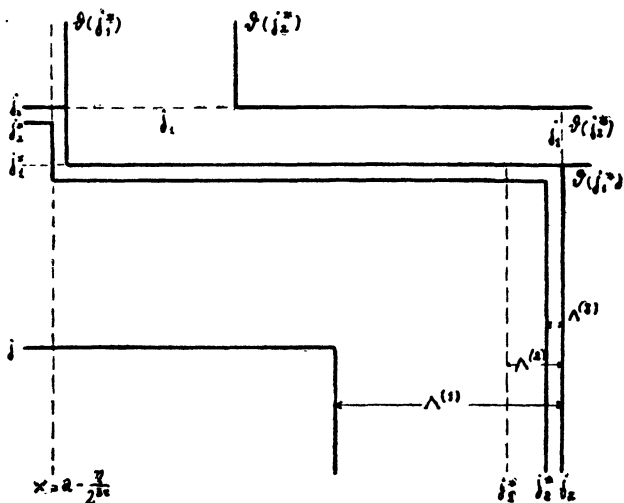


Fig. 4

Dico che  $\vartheta(C) \cdot \vartheta(j_2^*) \subset J_2$ .

Allo scopo, incominciamo col dimostrare che le celle di  $C \cdot \Lambda^{(3)}$  hanno punti in comune con  $j_1$  ed appartengono a  $J_1'$ . Infatti il complesso  $\Lambda^{(2)}$  (il complesso  $\Lambda^{(3)}$ ) è l'insieme delle celle di  $K^{(2)}$  (di  $K^{(3)}$ ) che hanno almeno un punto in comune con  $j_1$  (con  $j_2$ ) e che sono contenute in  $J_1'$  (in  $J_2'$ ); inoltre  $j_2 \cdot C \subset C \subset j_2 - \vartheta(j_1^*)$ ; da qui e dalla (3):  $j_2 \cdot C \subset j_1$ ; infine ogni cella di  $\Lambda^{(3)}$  è contenuta in  $J_2'$  e quindi anche in  $J_1'$ , attesa la (1). Facciamo ora vedere che  $C \cdot j_2^* \subset J_1^*$ . Le celle di  $K^{(2)}$  che contengono celle di  $C \cdot \Lambda^{(3)}$  hanno punti in comune con  $j_1$  e son contenute in  $J_1'$  appartengono quindi a  $\Lambda^{(2)}$ . Pertanto le celle di  $C \cdot \Lambda^{(3)}$  son contenute in  $J_1^*$  perchè  $\Lambda^{(2)}$  è appunto il complesso delle celle di  $K^{(2)}$  che appartengono  $J_1^* \cdot J_1'$ . Ma  $j_2^* \subset \Lambda^{(3)}$ , per costruzione; quindi:  $C \cdot j_2^* \subset C \cdot \Lambda^{(3)}$  donde  $C \cdot j_2^* \subset J_1^*$ . Ne viene  $\vartheta(C \cdot j_2^*) \subset \vartheta(J_1^*)$  da cui la conclusione in virtù della (2).

Dalla  $\vartheta(C) \cdot \vartheta(j_2^*) \subset J_2$  si trae facilmente:  $\vartheta^2(C) \cdot \vartheta(j_3^*) \subset J_3$ . Infatti gli eventuali punti di  $\vartheta(j_2^*) - j_2$  contenuti in  $\vartheta(C)$  non possono appartenere a  $j_3$  perchè  $\vartheta(C) \cdot \vartheta(j_2^*) \subset J_2$ ; pertanto i punti di  $j_3$  contenuti in  $\vartheta(C)$  appartengono a  $j_2$ . Da qui si arriva alla  $\vartheta^2(C) \cdot \vartheta(j_3^*) \subset J_3$  con il seguente ragionamento, del tutto analogo a quello che ci ha portato alla  $\vartheta(C) \cdot \vartheta(j_2^*) \subset J_2$ . Incominciamo col dimostrare che le celle di  $\vartheta(C) \cdot \Lambda^{(4)}$  hanno punti in comune con  $j_2$  ed appartengono a  $J_2'$ . Infatti il complesso  $\Lambda^{(3)}$  (il complesso  $\Lambda^{(4)}$ ) è l'insieme delle celle di  $K^{(3)}$  (di  $K^{(4)}$ ) che hanno almeno un punto in comune con  $j_2$  (con  $j_3$ ) e che sono contenute in  $J_2'$  (in  $J_3'$ ); inoltre, come ora si è dimostrato,  $j_3 \cdot \vartheta(C) \subset j_2$ ; infine ogni cella di  $\Lambda^{(4)}$  è contenuta in  $J_3'$  e quindi anche in  $J_2'$ . Facciamo vedere che  $\vartheta(C) \cdot j_3^* \subset J_2^*$ . Le celle di  $K^{(3)}$  che contengono celle di  $\vartheta(C) \cdot \Lambda^{(4)}$  hanno punti in comune con  $j_2$  e son contenute in  $J_2'$ ; appartengono quindi a  $\Lambda^{(3)}$ . Pertanto le celle di  $\vartheta(C) \cdot \Lambda^{(4)}$  sono contenute in  $J_2^*$  perchè  $\Lambda^{(3)}$  è appunto il complesso delle celle di  $K^{(3)}$  che appartengono  $J_2^* \cdot J_2'$ ; ma  $j_3^* \subset \Lambda^{(4)}$  per costruzione; quindi  $\vartheta(C) \cdot j_3^* \subset \vartheta(C) \cdot \Lambda^{(4)}$  donde  $\vartheta(C) \cdot j_3^* \subset J_2^*$ . Ne viene  $\vartheta^2(C) \cdot \vartheta(j_3^*) \subset \vartheta(J_2^*)$  e poichè:  $\vartheta(J_2^*) \subset J_3$ , riesce:  $\vartheta^2(C) \cdot \vartheta(j_3^*) \subset J_3$ .

Dalla  $\vartheta^2(C) \cdot \vartheta(j_3^*) \subset J_3$  si trae facilmente:  $\vartheta^3(C) \cdot \vartheta(j_4^*) \subset J_4$ . Infatti gli eventuali punti di  $\vartheta(j_3^*) - j_3$  contenuti in  $\vartheta^2(C)$

non possono appartenere a  $j_4$  perchè  $\vartheta^2(C) \cdot \vartheta(j_3^*) \subset J_3$ ; pertanto i punti di  $j_4$  contenuti in  $\vartheta^2(C)$  appartengono a  $j_3$ . Etc..

Così procedendo si ottengono le relazioni:

$$\vartheta^{k-1}(C) \cdot \vartheta(j_k^*) \subset J_k \quad (k > 1).$$

Poichè tutte le spezzate  $j_k^*$  sono contenute in  $\Delta^*$  e poichè, per  $k$  sufficientemente grande, si ha  $\vartheta^k(C) \supset \Delta^*$ , è evidente che esiste un intero  $n$  in corrispondenza al quale si avrà  $\vartheta(j_n^*) \subset J_n$  e quindi  $\vartheta(j_n^*) \subset J_n^* = j_n^*$ .

Con ciò il teorema è dimostrato.