RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALDO BRESSAN

Sulla possibilità di stabilire, limitazioni inferiori per le componenti intrinseche del tensore degli sforzi in coordinate generali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 26 (1956), p. 139-147

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__139_0>

SULLA POSSIBILITÀ DI STABILIRE LIMITAZIONI INFERIORI PER LE COMPONENTI INTRINSECHE DEL TENSORE DEGLI SFORZI IN COORDINATE GENERALI

Nota (*) *di* ALDO BRESSAN (*a Padova*)

In una pubblicazione [1]) G. GRIOLI introduce le coordinate n-iperastatiche nel caso di un corpo libero $\mathcal{C}$ di natura qualunque, in equilibrio sotto data sollecitazione attiva, e mediante esse stabilisce delle limitazioni inferiori per i massimi dei moduli delle componenti cartesiane del tensore degli sforzi generalizzando analoghe limitazioni di A. Signorini.

Mi sono proposto di generalizzare quei risultati estendendoli alle componenti intrinseche $\underset{rs}{X}$ del detto tensore nel più generale sistema di coordinate curvilinee.

Considerando delle coordinate $b_r(\varphi)$ $(r=1, 2, 3)$ relative ad una generica funzione regolare di punto — le quali $b_r(\varphi)$ divengono le coordinate n-iperastatiche qualora si identifichino le φ coi monomi nelle coordinate cartesiane —, scrivo le relative nuove relazioni di media, considerando in particolare il caso delle coordinate ortogonali.

(*) Pervenuta in Redazione il 10 luglio 1956.

Indirizzo dell'A: Seminario matematico, Università, Padova.

1) G. GRIOLI: *Relazioni quantitative per lo stato tensionale di un qualunque sistema continuo e per la deformazione di un corpo elastico in equilibrio.* « Annali di Mat. pura ed appl. », (4), 33, (1952), pp. 239-246.

Riguardo a un generico sistema di coordinate curvilinee, scrivo delle condizioni (differenziali) su tre funzioni scalari φ_1, φ_2, φ_3, sufficienti affinchè dalle suddette relazioni di media, relative alle $b_1(\varphi_1)$, $b_2(\varphi_2)$, $b_3(\varphi_3)$, si possano ricavare limitazioni del tipo di quelle cercate.

Applicando tale criterio nel caso delle coordinate cilindriche (ρ, ϑ, z) relative alla terna ortogonale $\mathcal{T} \equiv (O, y_1, y_2, y_3)$ ho potuto scrivere delle limitazioni — dipendenti da una funzione dotata di determinata arbitrarietà — per tutti i $|\underset{rs}{X}|_{max}$ nel caso di una corpo $\mathcal{C}$ contenuto in un diedro avente per spigolo l'asse y_3, e per tutti i $|\underset{rs}{X}|_{max}$ meno uno per $\mathcal{C}$ in posizione generica rispetto alla $\mathcal{T}$.

1. Relazioni generali di media per le $\underset{rs}{X}$.

Considero un corpo $\mathcal{C}$ (occupante la regione spaziale $\mathcal{C}$) in equilibrio sotto la forza di volume d'intensità $\boldsymbol{F}$, agente in $\mathcal{C} - F\mathcal{C}$, e sotto quella di superficie d'intensità $\boldsymbol{f}$ agente sul contorno $\Sigma = F\mathcal{C}$ di normale interna $\boldsymbol{n}$.

Con x_i, X_{rs}, F_r, l_r, n_r, ecc.... indico le coordinate del punto variabile P, le componenti del tensore degli sforzi, quelle di $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{n}$, ecc. in un generico riferimento curvilineo; con y_i, Y_{rs}, F_r^*, f_r^*, n_r^*, indico le quantità analoghe relative al sistema cartesiano ortogonale ($\mathcal{T}$).

Le equazioni di Cauchy sono

$$(1) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{3} \frac{\partial Y_{rs}}{\partial y_s} = F_r^* & \text{in} \quad \mathcal{C} - F\mathcal{C} \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{3} Y_{rs} n_s^* = f_r^* & \text{su} \quad F\mathcal{C}. \end{cases}$$

Con notazioni tensoriali [2]) pongo per ogni funzione φ del

---

[2]) Uso le notazioni trovantesi nel « Calcolo tensoriale ed Applicazioni » del Finzi.

punto P, regolare in $\mathcal{C}$.

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
b_r(\varphi) &= -\frac{1}{\mathcal{C}}\left\{\int_{\mathcal{C}} \varphi F_\rho \frac{\partial x^\rho}{\partial y^r}\, d\mathcal{C} + \int_{\Sigma} \varphi f_\rho \frac{\partial x^\rho}{\partial y^r}\, d\Sigma\right\} = \\
&= -\frac{1}{\mathcal{C}}\left\{\int_{\mathcal{C}} \varphi F_r^*\, d\mathcal{C} + \int_{\Sigma} \varphi f_r^*\, d\Sigma\right\} \qquad (r=1,\,2,\,3)
\end{aligned}
$$

Poichè per la $(1)_1$ e la formula di Green, indicando col soprassegno il valore medio in $\mathcal{C}$ si ha, come è ben noto,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \varphi F_r^*\, d\mathcal{C} &= \sum_{s=1}^{3} \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial \varphi Y_{rs}}{\partial y_s}\, d\mathcal{C} - \sum_{s=1}^{3} \int_{\mathcal{C}} Y_{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial y_s}\, d\mathcal{C} = \\
&= -\int_{\Sigma} \varphi \sum_{s=1}^{3} Y_{rs} n_s^*\, d\Sigma - \mathcal{C} \sum_{s=1}^{3} \overline{Y_{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial y_s}}
\end{aligned}
$$

per (2) e $(1)_2$ è

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
b_r(\varphi) &= \sum_{s=1}^{3} \overline{Y_{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial y_s}} = \sum_{s,\rho,\sigma,v=1}^{3} \overline{X_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial y_r} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y_s} \frac{\partial \varphi}{\partial x^v} \frac{\partial x^v}{\partial y_s}} = \\
&= \sum_{\rho,\sigma,v=1}^{3} X_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial y_r}\, a^{\sigma v} \frac{\partial \varphi}{\partial x^v}
\end{aligned}
$$

essendo le $a_{\sigma v} = \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y_s} \frac{\partial x^v}{\partial y^s}$ le componenti controvarianti del tensore fondamentale.

Introdotte le componenti covarianti a_{ik} del detto tensore, il versore $\underset{r}{u}$ dell'r^{ma} linea coordinata ha componenti controvarianti $\underset{r}{u}^i$ nel riferimento cartesiano $(\mathcal{T})$ e $\frac{\overset{i}{a}_r}{\sqrt{a_{rr}}}$ in quello generale, onde, detto $\Phi_u(P)$ lo sforzo specifico in P relativo alla direzione orientata di u, le

$$
(4)\qquad \underset{rs}{X} = \Phi_{\underset{r}{u}} \times \underset{s}{u} = Y_{ik} \underset{r}{u}^i \underset{s}{u}^k = X_{ik} \frac{\overset{i}{a}_r \overset{k}{a}_s}{\sqrt{a_{rr} a_{ss}}} = \frac{X_{rs}}{\sqrt{a_{rr} a_{ss}}}
$$

sono le componenti intrinseche del tensore degli sforzi, e, dato il loro significato meccanico, conviene introdurle nelle (3) che muto in

$$(5)\qquad b_r(\varphi) = \sum_{\rho,\sigma,s=1}^{3} \overline{\sqrt{a_{\rho\rho}a_{\sigma\sigma}}\, \underset{\rho\sigma}{X} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^r} a^{\sigma s} \frac{\partial \varphi}{\partial x^s}} = \sum_{\rho,\sigma=1}^{3} \overline{\underset{\rho\sigma}{X} \overset{\rho\sigma}{\nu}_r} = \sum_{i=1}^{6} \overline{\underset{i}{X} \overset{i}{\nu}_r}$$

ove è

$$(6)\qquad \overset{\rho\sigma}{\nu}_r = \frac{\sqrt{a_{\rho\rho}a_{\sigma\sigma}}}{2} \sum_{s=1}^{3} \left(a^{\sigma s} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^r} + a^{\rho s} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} = \overset{\sigma\rho}{\underset{r}{\nu}} \qquad (r, \rho, \sigma = 1, 2, 3)$$

e

$$(7)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} \underset{i}{X} = \underset{ii}{X} & \overset{i}{\nu}_r = \overset{i,i}{\nu}_r \\ \underset{i+3}{X} = \underset{i+1,\, i+2}{X} & \overset{i+3}{\nu}_r = 2 \overset{i+1,\, i+2}{\nu}_r \end{array} \right. \qquad (r, i = 1, 2, 3).$$

In coordinate ortogonali ($a_{rs} = a^{rs} = 0 \quad r \neq s$) posto

$$(8)\qquad H_\rho = \sqrt{a_{\rho\rho}} = 1/\sqrt{a^{\rho\rho}}$$

le (6) divengono

$$(9)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} \overset{i}{\nu}_r = \overset{\rho\rho}{\nu}_r = \dfrac{\partial x^\rho}{\partial y_r} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} & (i = \rho = 1, 2, 3) \\ \overset{i+3}{\nu}_r = 2 \overset{\rho\sigma}{\nu}_r = \dfrac{H_\rho}{H_\sigma} \dfrac{\partial x^\rho}{\partial y_r} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + \dfrac{H_\sigma}{H_\rho} \dfrac{\partial x^\sigma}{\partial y_r} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} & \begin{array}{l}(\text{per } i, \rho, \sigma \text{ diversi} \\ \text{e scelti fra } 1, 2, 3).\end{array} \end{array} \right.$$

Per (2) e (6) le $b_r(\varphi)$ e $\overset{\rho\sigma}{\nu}_r = \overset{\rho\sigma}{\nu}_r(\varphi)$ sono operatori lineari omogenei rispettivamente integrali e differenziali nella $\varphi(x_1, x_2, x_3)$.

Posto per ogni terna φ_1, φ_2, φ_3 di funzioni regolari in $\mathcal{C}$

$$(10)\qquad \overset{q}{A}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \sum_{r=1}^{3} \overset{q}{\nu}_r(\varphi_r) \qquad (q = 1, \dots, 6)$$

per (5) è

$$(11)\qquad \sum_{r=1}^{3} b_r(\varphi_r) = \sum_{q=1}^{6} \overline{\underset{q}{X} A^q(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}$$

Fissato l fra i numeri $(1, \dots, 6)$ si potrà stabilire una limitazione inferiore pel massimo di $|\underset{l}{X}|$ in $\mathcal{C}$ quando si siano scelte le φ_r in modo che nella (11) figuri come effettivamente incognito il solo valor medio relativo a $\underset{l}{X}$. Ma essendo le $\underset{q}{X}$ incognite, si potrà esser certi di avere ottenuto ciò qualora risulti

$$\overset{q}{A}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \equiv 0 \qquad (q \neq l;\ q = 1, \dots, 6). \tag{12}$$

Le (12) costituiscono un sistema di cinque equazioni differenziali lineari omogenee alle derivate parziali rispetto a x_1, x_2, x_3 in tre funzioni incognite.

Per ogni sua soluzione che non annulli identicamente $\overset{l}{A}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ la (11) dà

$$\left| \sum_{r=1}^{3} b_r(\varphi_r) \right| \leq \frac{1}{\mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} | \underset{l}{X} | \cdot \overset{l}{A}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) | \, d\mathcal{C}$$

ossia

$$| \underset{l}{X} |_{\max} \geq \frac{\mathcal{C} \left| \sum_{r=1}^{3} b_r(\varphi_r) \right|}{\int_{\mathcal{C}} | A^l(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) | \, d\mathcal{C}}$$

che costituisce una generalizzazione della disuguaglianza dell'op. cit. del Grioli.

2. Caso delle coordinate cilindriche.

Si riconosce che nel caso delle coordinate cilindriche si riesce a trovare soluzioni del sistema (12) comunque si sia fissato l fra 1, ..., 6 per ogni corpo contenuto in un diedro avente per spigolo l'asse $\rho = 0$. Ma è più rapido il seguente metodo diretto.

Assumo, in particolare, per coordinate curvilinee x_i quelle cilindriche (ρ, ϑ, z) associate al sistema cartesiano ($\mathcal{T}$). Essendo

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + dz^2 = a_{ik} dx^i dx^k,$$

per (9) è

$$H_1 = H_3 = 1, \qquad H_2 = \rho.$$

Mediante la matrice

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} = \left\| \begin{matrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\dfrac{\sin\vartheta}{\rho} & \dfrac{\cos\vartheta}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

reciproca della trasposta della $\dfrac{\partial(y_1,\, y_2,\, y_3)}{\partial(x_1,\, x_2,\, x_3)}$, calcolo le $\overset{\rho\sigma}{\nu_r}$ secondo (8), quindi in base alle (5) ottengo per le $b_r(\varphi)$ le espressioni

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
b_1(\varphi) &= \overline{\underset{11}{X}\cos\vartheta\varphi'_\rho} + \overline{\underset{12}{X}\cdot\left[-\sin\vartheta\varphi'_\rho + \frac{\cos\vartheta}{\rho}\varphi'_\vartheta\right]} - \\
&\qquad - \overline{\underset{22}{X}\frac{\sin\vartheta}{\rho}\varphi'_\vartheta} + \overline{\underset{13}{X}\cos\vartheta\varphi'_z} - \overline{\underset{23}{X}\sin\vartheta\varphi'_z} \\
b_2(\varphi) &= \overline{\underset{11}{X}\sin\vartheta\varphi'_\rho} + \overline{\underset{12}{X}\left[\cos\vartheta\varphi'_\rho + \frac{\sin\vartheta}{\rho}\varphi'_\vartheta\right]} + \\
&\qquad + \overline{\underset{22}{X}\frac{\cos\vartheta}{\rho}\varphi'_\vartheta} + \overline{\underset{13}{X}\sin\vartheta\varphi'_z} + \overline{\underset{23}{X}\cos\vartheta\varphi'_z} \\
b_3(\varphi) &= \overline{\underset{13}{X}\varphi'_\rho} + \overline{\underset{23}{X}\frac{1}{\rho}\varphi'_\vartheta} + \overline{\underset{33}{X}\varphi'_z}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

* * *

Considero una qualunque funzione $\psi(\vartheta)$ regolare (continua) se il corpo è tale che in esso si possa scegliere una determinazione univoca e continua per l'anomalia $\vartheta = \vartheta(P)$ [per es. in quanto $\mathcal{C}$ sia contenuto in un diedro avente per spigolo l'asse y_3];

considero invece una $\psi(\vartheta)$ regolare e verificante le

$$
(16)\qquad \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\cos\vartheta d\vartheta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta = 0
$$

se pel corpo $\mathcal{C}$ non è soddisfatta la precedente condizione.

Le (16) assicurano anche in questo secondo caso l'univocità delle funzioni $\int_0^\vartheta \psi(t)\cos t\, dt$ e $\int_0^\vartheta \psi(t)\sin t dt$ cosicchè in ogni caso è lecito identificare nelle (15) la φ con una qualunque di esse.

Le $(15)_{1,2}$ danno

$$
(17)\quad \left\{\begin{aligned}
b_1\left[\int_0^{\vartheta}\psi(t)\cos t\,dt\right] &= -\overline{\underset{22}{X}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\rho}\psi(\vartheta)} + \overline{\underset{12}{X}\frac{\cos^2\vartheta}{\rho}\psi(\vartheta)}\\
b_2\left[\int_0^{\vartheta}\psi(t)\sin t\,dt\right] &= \overline{\underset{22}{X}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\rho}\psi(\vartheta)} + \overline{\underset{12}{X}\frac{\sin^2\vartheta}{\rho}\psi(\vartheta)}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(18)\quad \left\{\begin{aligned}
-b_1\left[\int_0^{\vartheta}\psi(t)\sin t\,dt\right] &= \overline{\underset{22}{X}\frac{\sin^2\vartheta}{\rho}\psi(\vartheta)} - \overline{\underset{12}{X}\frac{\cos\vartheta\sin\vartheta}{\rho}\psi(\vartheta)}\\
b_2\left[\int_0^{\vartheta}\psi(t)\cos t\,dt\right] &= \overline{\underset{22}{X}\frac{\cos^2\vartheta}{\rho}\psi(\vartheta)} + \overline{\underset{12}{X}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\rho}\psi(\vartheta)}.
\end{aligned}\right.
$$

Sommando membro a membro le (17) e (18) si ottengono le

$$
(19)\quad \left\{\begin{aligned}
\overline{\underset{12}{X}\frac{\psi(\vartheta)}{\rho}} &= b_1\left[\int_0^{\vartheta}\psi(t)\cos t\,dt\right] + b_2\left[\int_0^{\vartheta}\psi(t)\sin t\,dt\right]\\
\overline{\underset{22}{X}\frac{\psi(\vartheta)}{\rho}} &= -b_1\left[\int_0^{\vartheta}\psi(t)\sin t\,dt\right] + b_2\left[\int_0^{\vartheta}\psi(t)\cos t\,dt\right]
\end{aligned}\right.
$$

onde per (13)

$$
(20)\quad \left\{\begin{aligned}
|\underset{12}{X}|_{\max} &\geq \frac{\mathfrak{C}\left|b_1\left[\int_0^{\vartheta}\psi(t)\cos t\,dt\right] + b_2\left[\int_0^{\vartheta}\psi(t)\sin t\,dt\right]\right|}{\int_{\mathfrak{C}}\frac{|\psi(\vartheta)|}{\rho}d\mathfrak{C}}\\
|\underset{22}{X}|_{\max} &\geq \frac{\mathfrak{C}\left|-b_1\left[\int_0^{\vartheta}\psi(t)\sin t\,dt\right] + b_2\left[\int_0^{\vartheta}\psi(t)\cos t\,dt\right]\right|}{\int_{\mathfrak{C}}\frac{|\psi(\vartheta)|}{\rho}d\mathfrak{C}}.
\end{aligned}\right.
$$

Indicando con $u(\rho)$ e $v(z)$ due funzioni continue dalle (15) si trae poi facilmente

$$
(21)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&|\underset{22}{X}|_{\max} \geq \frac{\mathcal{C}\left|b_3\left[\int_0^\rho u(\bar\rho)d\bar\rho\right]\right|}{\int_{\mathcal{C}} |u(\rho)|\,d\mathcal{C}} \\
&|\underset{23}{X}|_{\max} \geq \frac{\mathcal{C}\left|b_3\left[\int_0^\vartheta \psi(t)dt\right]\right|}{\int_{\mathcal{C}} \frac{|\psi(\vartheta)|}{\rho}\,d\mathcal{C}} \\
&|\underset{33}{X}|_{\max} \geq \frac{\mathcal{C}\left|b_3\left[\int_0^z v(\zeta)d\zeta\right]\right|}{\int_{\mathcal{C}} |v(z)|\,d\mathcal{C}}
\end{aligned}
\right.
$$

Per la determinazione di relazioni di media per la $\underset{11}{X}$ si può raggiungere lo scopo sfruttando l'arbitrarietà della $\psi(\vartheta)$ nelle singole (19) e precisamente applicando per es. la $(15)_1$ ad una $\varphi(\rho, \vartheta)$ per cui esistano due funzioni regolari $\psi(\vartheta)$, $\psi_1(\vartheta)$ verificanti le

$$
(22)\qquad -\sin\vartheta\varphi'_\rho + \frac{\cos\vartheta}{\rho}\varphi'_\vartheta = \frac{\psi(\vartheta)}{\rho} \qquad \frac{\sin\vartheta}{\rho}\varphi'_\vartheta = \frac{\varphi_1(\vartheta)}{\rho}.
$$

Da $(22)_2$ segue che $\varphi(\rho, \vartheta)$ ha la forma $\alpha(\rho) + \beta(\vartheta)$ onde per $(22)_1$

$$
(23)\qquad \varphi(\rho, \vartheta) = \lambda \log \rho + \beta(\vartheta)
$$

con λ costante. Per (22) è poi

$$
\psi(\vartheta) = -\lambda \sin\vartheta + \beta'(\vartheta)\cos\vartheta
$$

$$
\psi_1(\vartheta) = \beta'(\vartheta)\sin\vartheta.
$$

Applicando la $(15)_1$ a tale $\varphi(\rho, \vartheta)$ per (22) si ha

$$\overline{\underset{11}{X} \cos \vartheta \varphi'_\rho} = b_1[\varphi(\rho, \vartheta)] - \overline{\underset{12}{X} \frac{\psi(\vartheta)}{\rho}} + \overline{\underset{22}{X} \frac{\psi_1(\vartheta)}{\rho}} \tag{24}$$

Poichè sul valore medio $\overline{\underset{11}{X} \cos \vartheta \varphi'_\rho}$ che si cerca non influisce la scelta dell'addendo $\beta(\vartheta)$ possiamo porre, senza ledere la generalità

$$\beta(\vartheta) \equiv 0 \quad \text{onde} \quad \psi_1(\vartheta) \equiv 0$$

ragionando analogamente sulla $(15)_2$ si arriva alla

$$\overline{\underset{11}{X} \sin \vartheta \bar{\varphi}'_\rho} = b_2[\bar{\varphi}(\rho)] - \overline{\underset{12}{X} \frac{\bar{\psi}(\vartheta)}{\rho}} \tag{24'}$$

con

$$\bar{\varphi}(\vartheta) = \bar{\lambda} \log \rho \qquad \bar{\psi}(\vartheta) = \bar{\lambda} \cos \vartheta .$$

Poichè ciascuna delle $\psi(\vartheta) = -\lambda \sin \vartheta$ e $\bar{\psi}(\vartheta) = \bar{\lambda} \cos \vartheta$ non verifica le (16) cosicchè la (19) in generale non è applicabile, suppongo il corpo contenuto, in un diedro avente per spigolo l'asse y_3.

Allora per (23) (24') (19) si ha

$$\overline{\underset{11}{X} \frac{\lambda \cos \vartheta + \bar{\lambda} \sin \vartheta}{\rho}} = \lambda \left[b_1(\log \rho) - b_1\left(-\frac{\sin^2 \vartheta}{2}\right) - b_2\left(\frac{2\vartheta - \sin 2\vartheta}{4}\right)\right] +$$

$$+ \bar{\lambda} \left[b_2(\log \rho) - b_1\left(\frac{2\vartheta + \sin 2\vartheta}{4}\right) - b_2\left(\frac{\sin^2 \vartheta}{2}\right)\right]$$

onde

$$|\underset{11}{X}|_{\max} \geq \tag{25}$$

$$\geq \frac{\mathcal{C}\left| b_1\left[\lambda\left(\log \rho + \dfrac{\sin^2 \vartheta}{2}\right) - \bar{\lambda} \dfrac{2\vartheta + \sin 2\vartheta}{4}\right] + b_2\left[\bar{\lambda}\left(\log \rho - \dfrac{\sin^2 \vartheta}{2}\right) - \lambda \dfrac{2\vartheta - \sin 2\vartheta}{4}\right]\right|}{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\rho} \left| \lambda \cos \vartheta + \bar{\lambda} \sin \vartheta \right| d\mathcal{C}}$$

che dà la richiesta limitazione inferiore.