

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO VOLPATO

**Sulle condizioni sufficienti per la continuità (di  
ordine  $n$ ) di un funzionale di ordine  $n + 1$**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 26 (1956), p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1956\\_\\_26\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__1_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SULLE CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA CONTINUITÀ (DI ORDINE $n$ ) DI UN FUNZIONALE DI ORDINE $n+1$

Nota (\*) di MARIO VOLPATO (*a Ferrara*)

È noto <sup>1)</sup> che se  $Q(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)})$  è una funzione continua insieme con le derivate parziali  $Q'_x, Q'_y, Q'_{y'}, \dots, Q'_{y^{(n-1)}}$  nell'intervallo

$$R: a \leq x \leq b; \quad y_1^{(i)} \leq y^{(i)} \leq y_2^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \dots, n; y^{(0)} = y),$$

dello spazio reale euclideo ad  $n+2$  dimensioni, l'integrale

$$(1) \quad \mathfrak{J}[y(x)] = \int_a^b Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)] y^{(n+1)}(x) dx$$

è un funzionale continuo (di ordine  $n$ ) nella classe  $\mathfrak{K}$  delle funzioni  $y(x)$  con derivata  $n$ -esima assolutamente continua in  $(a, b)$  e tali che

$$(2) \quad y_1^{(i)} \leq y^{(i)}(x) \leq y_2^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \dots, n; y^{(0)} = y).$$

(\*) Pervenuta in Redazione il 4 giugno 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Ferrara.

1) Si veggia: S. CINQUINI, *Sopra una condizione sufficiente per la semicontinuità dei problemi variazionali di ordine  $n$* , Annali di Matematica Pura ed Applicata, serie IV, tomo XV, (1937), pp. 77-86; M. PICONE, *Analisi Superiore*, Corso di lezioni tenute all'Università di Roma nell'anno accademico 1940-41, (litografato D.U.S.A.) n. 70, pp. 142-152.

Valendomi di alcuni miei recenti risultati sulla formula di Green <sup>2)</sup>, in questa Nota dimostro il seguente

**TEOREMA.** - Sia:

I)  $Q(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)})$  una funzione, reale di variabili reali, definita in  $R$ , ivi limitata, misurabile rispetto ad  $y^{(n)}$  e continua rispetto a  $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  per quasi tutti i valori di  $y^{(n)}$  in  $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$ .

Inoltre:

II) esistano  $n + 1$  funzioni  $\mathcal{L}(u), L_0(u), L_1(u), \dots, L_{n-1}(u)$  non negative e sommabili (secondo Lebesgue) in  $y_1^{(n)} \leq u \leq y_2^{(n)}$  tali che per quasi tutti i valori di  $u$  dell'intervallo  $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$  si abbia:

$$(3) \quad |Q(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, u) - Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}, u)| \leq \\ \leq \mathcal{L}(u) |x - \bar{x}| + L_0(u) |y - \bar{y}| + L_1(u) |y' - \bar{y}'| + \\ + \dots + L_{n-1}(u) |y^{(n-1)} - \bar{y}^{(n-1)}|,$$

$(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, u); (\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}, u)$  essendo punti di  $R$ .

In tali ipotesi l'integrale  $\mathcal{J}[y(x)]$  è un funzionale continuo (di ordine  $n$ ) nella classe  $\mathcal{K}$ .

Faccio presente che nel caso particolare in cui sia  $n = 0$ , questo mio risultato interferisce con uno analogo stabilito da S. Faedo <sup>3)</sup> e successivamente generalizzato da G. Darbo <sup>4)</sup>.

**1.** - Proviamo anzitutto che se  $y(x)$  è una qualsivoglia funzione della classe  $\mathcal{K}$ , allora la funzione

$$(4) \quad Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)]y^{(n+1)}(x)$$

<sup>2)</sup> M. VOLPATO, *Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Accad. Naz. Lincei, serie VII, vol. XX, (1956), Nota I, pp. 30-37; Nota II, pp. 161-167; Nota III, p. 299-306.

<sup>3)</sup> S. FAEDO, *Un nuovo tipo di funzionali continui*, Rend. di Matem. e delle sue applic., serie V, vol. IV (1943), pp. 223-249.

<sup>4)</sup> G. DARBO, *Sulle condizioni sufficienti per la continuità di un integrale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXII, (1953), pp. 134-142.

è (misurabile e) sommabile in  $(a, b)$ , di guisa che il funzionale  $\mathcal{I}[y(x)]$  è definito nella classe  $\mathcal{K}$ .

Proveremo addirittura che se  $y(x) \in \mathcal{K}$  e se  $z(x)$  è una qualsivoglia funzione assolutamente continua in  $(a, b)$  ivi soddisfacente la

$$(5) \quad y_1^{(n)} \leq z(x) \leq y_2^{(n)},$$

allora la funzione

$$(6) \quad Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), z(x)]z'(x),$$

è (misurabile e) sommabile in  $(a, b)$ .

A tale scopo poniamo

$$(7) \quad Q^*(x, u) = Q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), u)$$

e osserviamo che nel rettangolo

$$R^* : a \leq x \leq b; \quad y_1^{(n)} \leq u \leq y_2^{(n)}$$

la funzione  $Q^*(x, u)$  gode delle seguenti proprietà:

a) è limitata in  $R^*$ ;

b) per ogni fissato  $x$  di  $(a, b)$  è misurabile rispetto ad  $u$ , mentre fissato  $u$ , quasi ovunque in  $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$ , è (assolutamente continua, anzi) lipschitziana rispetto ad  $x$  con coefficiente di Lipschitz uguale a

$$(8) \quad L(u) = \mathcal{L}(u) + M_1 L_0(u) + M_2 L_1(u) + \dots + M_n L_{n-1}(u)$$

ove

$$M_i = \max(|y_1^{(i)}|, |y_2^{(i)}|), \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

c) la derivata parziale  $Q_x^*(x, u)$ , che, a norma di b), esiste quasi ovunque in  $R^*$  riuscendovi misurabile, è sommabile in  $R^*$ .

Infatti, a norma dell'ipotesi I) esiste una costante  $M^*$  per cui risulta in  $R$

$$(9) \quad |Q(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)})| \leq M^*,$$

e, a norma dell'ipotesi II), si ha

$$(10) \quad |Q^*(x, u) - Q^*(\bar{x}, u)| = |Q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), u) - \\ - Q(\bar{x}, y(\bar{x}), y'(\bar{x}), \dots, y^{(n-1)}(\bar{x}), u)| \leq \mathcal{L}(u) |x - \bar{x}| + \\ + L_0(u) \left| \int_{\bar{x}}^x y'(t) dt \right| + L_1(u) \left| \int_{\bar{x}}^x y''(t) dt \right| + \dots + \\ + L_{n-1}(u) \left| \int_{\bar{x}}^x y^{(n)}(t) dt \right| \leq L(u) |x - \bar{x}|,$$

e quindi, quasi ovunque in  $R^*$ ,

$$(11) \quad |Q_x^*(x, u)| \leq L(u),$$

con  $L(u)$  evidentemente sommabile in  $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$ .

Dalle a), b), c) e dalla (5), a norma dell'osservazione contenuta alla fine del n. 6 della Nota I del loro citato in <sup>2)</sup>, segue la sommabilità della funzione (6).

**2.** - Dimostriamo ora il teorema enunciato. Osserviamo intanto che se  $y(x)$  ed  $y_0(x)$  sono due funzioni della classe  $\mathcal{H}$ , si ha:

$$(12) \quad \mathcal{J}[y(x)] - \mathcal{J}[y_0(x)] = \\ = \int_a^b \left\{ Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)] y^{(n+1)}(x) - \right. \\ \left. - Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] y_0^{(n+1)}(x) \right\} dx + \\ + \int_a^b \left\{ Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] - \right. \\ \left. - Q[x, y_0(x), \dots, y_0'(x), y_0^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] \right\} y_0^{(n+1)}(x) dx.$$

Il nostro teorema sarà allora acquisito se faremo vedere che, in corrispondenza di un fissato numero  $\varepsilon > 0$  arbitrario, esiste un conveniente numero  $\sigma(\varepsilon)$  tale che le disuguaglianze

$$(13) \quad |y^{(i)}(x) - y_0^{(i)}(x)| \leq \sigma(\varepsilon), \quad (i = 0, 1, \dots, n; y^{(0)} = y),$$

soddisfatte per ogni  $x$  di  $(a, b)$ , implichino le

$$(14) \quad \left| \int_a^b \left\{ Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)] y^{(n+1)}(x) - \right. \right. \\ \left. \left. - Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] y_0^{(n+1)}(x) \right\} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(15) \quad \left| \int_a^b \left\{ Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] - \right. \right. \\ \left. \left. - Q[x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] \right\} y_0^{(n+1)}(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

È questo che proveremo nei prossimi numeri.

3. - La (14), che con i simboli introdotti al n. 1 equivale alla

$$(16) \quad \left| \int_a^b Q^*[x, y^{(n)}(x)] y^{(n+1)}(x) dx - \int_a^b Q^*[x, y_0^{(n)}(x)] y_0^{(n+1)}(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

è conseguenza, pressochè immediata, del teorema 2 della Nota III del loco citato in <sup>2)</sup>. Infatti, le funzioni  $Q^*(x, u)$ ,  $y^{(n)}(x)$ ,  $y_0^{(n)}(x)$  soddisfano a tutte le ipotesi di quel teorema e pertanto sussiste la seguente formula di Green

$$(17) \quad \int_{y_0^{(n)}(b)}^{y^{(n)}(b)} Q^*(b, u) du = \int_{y_0^{(n)}(a)}^{y^{(n)}(a)} Q^*(a, u) du + \int_a^b Q^*[x, y^{(n)}(x)] y^{(n+1)}(x) dx - \\ - \int_a^b Q^*[x, y_0^{(n)}(x)] y_0^{(n+1)}(x) dx + \int_a^b dx \int_{y_0^{(n)}(x)}^{y^{(n)}(x)} Q_x^*(x, u) du,$$

che porge immediatamente la disuguaglianza

$$(18) \quad \left| \int_a^b Q^*[x, y^{(n)}(x)] y^{(n+1)}(x) dx - \int_a^b Q^*[x, y_0^{(n)}(x)] y_0^{(n+1)}(x) dx \right| \leq \\ \leq M^* \left\{ |y^{(n)}(b) - y_0^{(n)}(b)| + |y^{(n)}(a) - y_0^{(n)}(a)| \right\} + \int_a^b \int_{y_0^{(n)}(x)}^{y^{(n)}(x)} |L(u) du| dx.$$

Indichiamo ora con  $\rho \left[ \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right]$  un numero positivo tale che per ogni sottoinsieme  $H$  di  $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$  per cui la mis  $H < \rho \left[ \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right]$ , si abbia

$$(19) \quad \int_H L(u) du < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Allora, se nelle (13) assumiamo il numero  $\sigma(\varepsilon)$  in maniera che sia soddisfatta la

$$(20) \quad \sigma(\varepsilon) < \min \left\{ \rho \left[ \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right], \frac{\varepsilon}{8M^*} \right\},$$

la (18) porge subito la (16) e quindi la (14).

**4. - Completiamo la dimostrazione, provando ora la (15).**

A tale scopo, determiniamo un numero positivo  $\rho \left( \frac{\varepsilon}{12M^*} \right)$  in maniera tale che, per ogni sottoinsieme  $G$  di  $(a, b)$  per cui la mis  $G < \rho \left( \frac{\varepsilon}{12M^*} \right)$ , si abbia

$$(21) \quad \int_G |y_0^{(n+1)}(x)| dx < \frac{\varepsilon}{12M^*}.$$

Indichiamo poi con  $\mathcal{H}(y_0^{(n+1)})$  la porzione di  $(a, b)$  ove non esiste oppure è nulla  $y_0^{(n+1)}(x)$ , e diciamo:  $\tau_1, \tau_2, \dots$  una successione di intervalli (chiusi) di  $(a, b)$  che ricoprono l'insieme misurabile  $\mathcal{H}(y_0^{(n+1)})$  e tale che, posto  $T = \bigcup_1^{+\infty} \tau_i$ , si abbia

$$(22) \quad \text{mis} [T - \mathcal{H}(y_0^{(n+1)})] < \rho \left( \frac{\varepsilon}{12M^*} \right).$$

Segue allora

$$(23) \quad \left| \int_a^b \left\{ Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] - \right. \right. \\ \left. \left. - Q[x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] \right\} y_0^{(n+1)}(x) dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{(a, b)-T} Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] - \right. \\ \left. - Q[x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] \right| |y_0^{(n+1)}(x)| dx \Big| + \frac{\varepsilon}{6}.$$

Fissiamo comunque una  $n$ -upla

$$(24) \quad (y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

di numeri reali soddisfacenti le  $y_1^{(i)} \leq y^{(i)} \leq y_2^{(i)}$ , ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ;  $y^{(0)} = y$ ), e riguardiamo la  $Q(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)})$  come funzione delle due sole variabili  $x, y^{(n)}$ . Ripetendo le considerazioni del n. 1, si deduce che, per ogni fissata  $n$ -upla (24), la funzione

$$(25) \quad Q[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)] y_0^{(n+1)}(x)$$

è (misurabile e) sommabile rispetto ad  $x$  in  $(a, b)$ . Allora, per ogni fissata  $n$ -upla del tipo (24), la funzione

$$(26) \quad Q[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)]$$

è misurabile, rispetto ad  $x$ , in  $(a, b) - \mathcal{H}(y_0^{(n+1)})$ , e quindi la funzione

$$(27) \quad Q_0[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)] = \\ = \begin{cases} Q[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)] & \text{ove } y_0^{(n+1)}(x) \neq 0, \\ 0 & \text{ove } y_0^{(n+1)}(x) = 0, \end{cases}$$

definita nell'intervallo

$$\bar{R}: a \leq x \leq b \cdot y_1^{(i)} \leq y^{(i)} \leq y_2^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1; y^{(0)} = y),$$

dello spazio reale euclideo ad  $n+1$  dimensioni, è, per ogni fissata  $n$ -upla del tipo (24), misurabile rispetto ad  $x$  in  $(a, b)$ . Dico che essa è continua rispetto a  $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , per quasi tutti gli  $x$  fissati in  $(a, b)$ . Infatti, diciamo:

$N$  la porzione, di misura nulla, dell'intervallo  $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$ , per ogni fissato  $y^{(n)}$  della quale, la  $Q(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)})$  non è continua rispetto a  $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ;

$E_x$  l'insieme dei punti  $x$  di  $(a, b)$  per i quali  $y_0(x)$ , appartiene ad  $N$ .

Per cose note <sup>5)</sup>, attesa l'assoluta continuità di  $y_0^{(n)}(x)$ , in quasi tutto  $E_x$ , risulta  $y_0^{(n+1)}(x) = 0$ . Di qui, dalle (27) e dalla I), segue appunto che per quasi tutti gli  $x$  di  $(a, b)$  la  $Q_0$  è continua rispetto a  $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ .

Allora, a norma di noti risultati di G. Scorza Dragoni <sup>6)</sup> e G. Stampacchia, in corrispondenza al numero positivo  $d\left(\frac{\varepsilon}{12M^*}\right)$ , esiste una porzione aperta  $\Delta$  di  $\bar{R}$ , avente proiezione  $\Delta(x)$ , sull'asse  $x$ , di misura minore di  $\rho\left(\frac{\varepsilon}{12M^*}\right)$ , tale che nella porzione chiusa  $R - \Delta$  la funzione  $Q_0[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)]$  sia uniformemente continua rispetto a  $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ . Di qui, osservato che in ogni punto, di  $\bar{R}$ , per cui  $x \in (a, b) - T$ , risulta  $Q_0[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)] = Q[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)]$ , attesa la (21), segue

$$(28) \quad \left| \int_{(a, b) - T} |Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] - \right. \\ \left. - Q[x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] \right| |y_0^{(n+1)}(x)| dx \left| \leq \right. \\ \leq \left| \int_{(a, b) - T - \Delta(x)} |Q_0[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] - \right. \\ \left. - Q_0[x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] \right| |y_0^{(n+1)}(x)| dx \left| + \frac{\varepsilon}{6} \right.$$

Ora, indichiamo con  $K$  un numero positivo soddisfacente le

$$(29) \quad \int_a^b |y_0^{(n+1)}(x)| dx \leq K,$$

<sup>5)</sup> Cfr. L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, Zanichelli, Bologna (1921), vol. 1, pag. 176, oppure E. J. MC SHANE, *Integration*, Princeton, p. 213 (1947).

<sup>6)</sup> G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rendic. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XVII, (1948), pp. 102-106; G. STAMPACCHIA, *Sopra una classe di funzioni di  $n$  variabili*, Ricerche di Matematica, vol. 1, (1952), p. 30.

e osserviamo che se  $x \in (a, b) - \Delta(x)$  a se sussistono le

$$(30) \quad |y^{(i)} - \bar{y}^{(i)}| < \rho \left( \frac{\varepsilon}{12K} \right), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1; y^{(0)} = y),$$

con  $\rho \left( \frac{\varepsilon}{12K} \right)$  conveniente numero positivo, la uniforme continuità della funzione  $Q_0[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)]$  in  $\bar{R} - \Delta$  porge la

$$(31) \quad |Q_0[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)] - \\ - Q_0[x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)]| < \frac{\varepsilon}{6K}.$$

Allora se assumiamo il numero  $\sigma(\varepsilon)$ , che figura in (13), in maniera che sia soddisfata anche la

$$(32) \quad \sigma(\varepsilon) < \rho \left( \frac{\varepsilon}{12K} \right).$$

segue che per ogni  $x \in (a, b) - \Delta(x)$ , e *a fortiori* per ogni  $x \in (a, b) - T - \Delta(x)$ , sussiste la

$$(33) \quad |Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] - \\ - Q_0[x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)]| < \frac{\varepsilon}{6K}.$$

Di qui, dalla (29), dalla (28) e dalla (23) segue la (15).

Il nostro teorema è quindi completamente provato.

**5. - OSSERVAZIONE.** Ricordiamo che l'ipotesi I), da sola, non è sufficiente ad assicurare la continuità di ordine  $n$  dell'integrale (1) nella classe  $\mathcal{K}$ . Si vegga per questo un interessante esempio indicato da Cinquini nel loco citato in <sup>1)</sup>.