RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNO PINI

Sull'unicità della soluzione del problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche in due variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 26 (1956), p. 223-231

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__223_0>

SULL'UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI DIRICHLET PER LE EQUAZIONI LINEARI ELLITTICHE IN DUE VARIABILI

Nota (*) *di* BRUNO PINI (*a Cagliari*)

Consideriamo l'equazione

$$\mathcal{L}[u] = \sum_{\substack{ij \\ 0 \leq i+j \leq 2n}} a_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = f(x, y) \tag{1}$$

ellittica in un certo dominio $\mathfrak{C}$. Sia $\mathfrak{D}$ un dominio contenuto in $\mathfrak{C}$; il problema di Dirichlet per l'equazione (1) relativamente al dominio $\mathfrak{D}$ consiste nella determinazione di una funzione $u(x, y)$ tale che

$$\mathcal{L}[u] = f \quad \text{in} \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} = f_k \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}\mathfrak{D} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

essendo ν la normale alla $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, rivolta per esempio verso l'interno di $\mathfrak{D}$.

In un lavoro di Viscik [1]) e in uno di Browder [2]) è provato

---

(*) Pervenuta in Redazione il 9 ottobre 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Cagliari.

1) M. I. VISCIK, *Sui sistemi fortemente ellittici di equazioni differenziali,* Mat. Sbornik, 29 (1951)) (in russo).

2) F. E. BROWDER, *Strongly elliptic systems of differential equations,* Contributions to the theory of partial differential equations, Princeton-New Jersey (1954). Notiamo che l'affermazione che ci interessa e che noi intendiamo relativa a una equazione d'ordine $2n$ in due variabili, in questo lavoro di Browder e in quello di Viscik citato in 1) è provata, più in generale, sebbene da un punto di vista solo qualitativo, relativamente ai sistemi fortemente ellittici in un numero arbitrario di variabili.

che, sotto certe ipotesi sui coefficienti, termine noto e dati al contorno (che in entrambi i detti lavori s'intendono assunti dalla soluzione in un certo senso generalizzato) la soluzione è unica se il diam $\mathfrak{D}$ è sufficientemente piccolo.

In un precedente lavoro di Bremekamp [3]) questa affermazione, relativamente al problema ordinario, era stata provata per quella particolare equazione del quarto ordine in cui il gruppo dei termini contenenti le derivate quarte è il laplaciano iterato.

I ragionamenti di Bremekamp, a differenza di quelli di Viscik e di Browder, sono del tutto elementari e hanno il pregio di permettere la determinazione esplicita di un confine superiore per il diam $\mathfrak{D}$, tale da assicurare il verificarsi di quanto sopra affermato. Con una preventiva osservazione i ragionamenti di Bremekamp si possono facilmente estendere così da conseguire un risultato analogo a quello di questo A. per la più generale equazione ellittica d'ordine $2n$; riteniamo perciò non del tutto inutile mostrare ciò.

1. - Dall'ipotesi di ellitticità per la (1) segue l'esistenza di una costante positiva δ tale che

$$\sum_{\substack{ij\\ i+j=2n}} a_{ij}(x, y)\lambda^i\mu^j > \delta(\lambda^2+\mu^2)^n \quad \text{per } (x, y) \in \mathfrak{T}.$$

Ne segue, indicando con Δ_k l'operatore $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ iterato k volte, che anche l'equazione

$$\sum_{\substack{ij\\ i+j=2n}} a_{ij}(x, y)\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j} - \varepsilon\Delta_n u = 0$$

è ellittica se ε è un numero positivo minore di δ.

D'altra parte la forma binaria

$$\sum_{\substack{ij\\ i+j=2n}} a_{ij}(x, y)\lambda^i\mu^j - \varepsilon(\lambda^2+\mu^2)^n,$$

che è definita positiva, si può esprimere come somma di due

3) H. BREMEKAMP, *On the partial differential equations occurring in the theory of the elastic plate*, Nieuw Arch. Wiskunde, XXII (1947).

quadrati

$$\sum_{1}^{2}{}_i \left(\sum_{0}^{n}{}_h \alpha_{ih}(x, y)\lambda^{n-h}\mu^h\right)^2.$$

Pertanto l'equazione (1), se i coefficienti si suppongono opportunamente regolari, si può sempre presentare nella forma

$$(1') \qquad \mathcal{L}[u] = \varepsilon\Delta_n u + \sum_{1}^{2}{}_i \left(\sum_{0}^{n}{}_h \alpha_{ih}(x, y) \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h}\partial y^h}\right)^{(2)} +$$

$$+ \sum_{0 \leq i+j \leq 2n-1}{}_{ij} \beta_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = \varphi(x, y):$$

s'intende che

$$\left(\sum_{0}^{n}{}_h \alpha_{ih}(x, y) \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h}\partial y^h}\right)^{(2)} =$$

$$= \sum_{0}^{n}{}_k \alpha_{ik}(x, y) \frac{\partial^n}{\partial x^{n-k}\partial y^k} \left(\sum_{0}^{n}{}_h \alpha_{ih}(x, y) \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h}\partial y^h}\right).$$

2. - Facciamo ora un paio di osservazioni che saranno utili nel seguito.

Sia $u(x, y)$ una funzione di classe $C^{(2n)}$ in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e di classe $C^{(2n-1)}$ in $\mathfrak{D}$ tale che

$$\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = 0 \quad \text{su} \quad \mathcal{F}\mathfrak{D} \quad \text{per} \quad i + j \leq n - 1.$$

Indichiamo con $[m]$ il più grande numero naturale contenuto nel numero positivo m, e con

$$F_k\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-1}\partial y}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial y^k}\right)$$

una forma quadratica nelle derivate k-sime della u.

Ebbene, *se $a(x, y)$ è una funzione di classe $C^{(i+j)}$ in $\mathfrak{D}$, si ha*

$$(2) \quad \iint_{\mathfrak{D}} au \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} dxdy = \iint_{\mathfrak{D}} \sum_{0}^{\left[\frac{i+j}{2}\right]}{}_k F_k dxdy \qquad \textit{per} \quad i + j \leq 2n - 1.$$

Supponiamo di aver provato ciò per $i + j < m$ e mostriamo che ciò è vero anche per $i+j=m$. Si ha

$$\iint_{\mathfrak{D}} au \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} dxdy = (-1)^{[i/2]+[j/2]} \iint_{\mathfrak{D}} \frac{\partial^{[i/2]+[j/2]} au}{\partial x^{[i/2]} \partial y^{[j/2]}} \frac{\partial^{i+j-[i/2]-[j/2]} u}{\partial x^{i-[i/2]} \partial y^{j-[j/2]}} dxdy =$$

$$= (-1)^{[i/2]+[j/2]} \left(\iint_{\mathfrak{D}} av \frac{\partial^{i+j-2[i/2]-2[j/2]} v}{\partial x^{i-2[i/2]} \partial y^{j-2[j/2]}} dxdy + \right.$$

$$\left. + \Sigma_{hk} \iint_{\mathfrak{D}} b_{hk} \frac{\partial^{h+k} u}{\partial x^h \partial y^k} \frac{\partial^{i+j-[i/2]-[j/2]} u}{\partial x^{i-[i/2]} \partial y^{j-[j/2]}} dxdy \right)$$

ove

$$v = \frac{\partial^{[i/2]+[j/2]} u}{\partial x^{[i/2]} \partial y^{[j/2]}}$$

e le b_{hk} sono certe derivate di a moltiplicate per certi fattori numerici. Ora il primo integrale all'ultimo membro è uguale a uno dei seguenti

$$\iint_{\mathfrak{D}} av^2 dxdy\ , \quad -\frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{D}} \frac{\partial a}{\partial x} v^2 dxdy\ , \quad -\frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{D}} \frac{\partial a}{\partial y} v^2 dxdy\ ,$$

$$\iint_{\mathfrak{D}} \left(-a \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} v^2 \right) dxdy$$

(rispettivamente secondochè è: i pari, j pari; i dispari, j pari; i pari, j dispari; i dispari, j dispari). L'integrale che figura sotto la sommaria si scrive

$$(-1)^{h+k} \iint_{\mathfrak{D}} u \frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k} \left(b_{hk} \frac{\partial^{i+j-[i/2]-[j/2]} u}{\partial x^{i-[i/2]} \partial y^{j-[j/2]}} \right) dxdy$$

che è eguale a una somma d'integrali del tipo

$$\iint_{\mathfrak{D}} cu \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} dxdy$$

con $r+s<i+j$. Da ciò si deduce subito l'affermazione.

Inoltre *se* $a(x, y)$ *è una funzione di classe* $C^{(n+m)}$ *in* $\mathfrak{D}$, *nelle ipotesi già fatte su u, si ha*

$$(3)\qquad \iint_{\mathfrak{D}} a \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-i}\partial y^i}\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j}\partial y^j}dxdy = \iint_{\mathfrak{D}} \sum_{0}^{\left[\frac{n+m}{2}\right]}{}_k F_k dxdy \quad \text{per } m \leq n-1.$$

L'integrale a primo membro è uguale a

$$(-1)^m \iint_{\mathfrak{D}} u \frac{\partial^m}{\partial x^{m-i}\partial y^i}\left(a \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right) dxdy$$

da cui sviluppando e tenendo presente il risultato precedente si ha quanto si è affermato.

È quasi superfluo notare che ogni volta che si applica il teorema di Gauss-Green s'intende che ci riferiamo a un dominio interno a $\mathfrak{D}$, di frontiera opportunamente regolare, che si fa poi tendere a $\mathfrak{D}$.

3. - Torniamo ora all'equazione (1'). Supponiamo che i coefficienti $\alpha_{ij}(x, y)$ siano di classe $C^{(2n)}$ e i coefficienti $\beta_{ij}(x, y)$ di classe $C^{(i+j)}$ in $\mathfrak{T}$.

Supponiamo che la $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ sia costituita da curve regolari.

Vogliamo provare che *se* diam $\mathfrak{D} < d$, *essendo d un certo numero positivo che risulterà determinato da ciò che segue, una funzione* $u(x, y)$, *di classe* $C^{(2n)}$ *in* $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$ *e di classe* $C^{(2n-1)}$ *in* $\mathfrak{D}$ [4], *tale che*

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{L}[u] = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D} \\ \dfrac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = 0 \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}\mathfrak{D} \quad \textit{per} \quad i+j \leq n-1, \end{cases}$$

è identicamente nulla.

Si ha

$$(5)\qquad \iint_{\mathfrak{D}} u\Delta_{2p} u dxdy = \iint_{\mathfrak{D}} (\Delta_p u)^2 dxdy \quad \text{per} \quad n = 2p,$$

---

[4]) L'ipotesi che la $u(x, y)$ sia di classe $C^{(2n-1)}$ in $\mathfrak{D}$ è riducibile; cfr. B. PINI, *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali lineari ellittiche in due variabili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXV (1956).

$$(5') \iint_{\mathfrak{D}} u\Delta_{2p+1} u dxdy = -\iint_{\mathfrak{D}} \left[\left(\frac{\partial \Delta_p u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta_p u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy \text{ per } n = 2p+1$$

$$(6) \qquad \iint_{\mathfrak{D}} \alpha_{ij} u \frac{\partial^n}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\left(\alpha_{hk} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\right) dxdy =$$

$$= (-1)^n \iint_{\mathfrak{D}} \alpha_{ij}\alpha_{hk} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j}\partial y^j} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-k}\partial y^k} dxdy +$$

$$+ (-1)^n \Sigma_{mr} \iint_{\mathfrak{D}} \alpha_{hk}\gamma_{ijmr} \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-r}\partial y^r} \frac{\partial^n u}{\partial y^{n-k}\partial y^k} dxdy ,$$

essendo le γ_{ijrm} certe derivate di α_{ij} moltiplicate per certi fattori numerici ed $m < n$. Allora, in base alle (2), (3), (5), (5′) e (6), integrando $u\,\mathfrak{L}[u] = 0$ su $\mathfrak{D}$ e tenendo presente che $\left[\frac{2n-1}{2}\right] = n-1$, si ha

$$(7) \iint_{\mathfrak{D}} \left|\varepsilon(\Delta_p u)^2 + \sum_{1}^{2}{}_i\left(\sum_{0}^{n}{}_h \alpha_{ih} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h}\partial y^h}\right)^2 + \sum_{0}^{n-1}{}_k F_k\right| dxdy = 0 \text{ per } n=2p$$

$$(7') \quad \iint_{\mathfrak{D}} \left\{ \varepsilon\left[\left(\frac{\partial \Delta_p u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta_p u}{\partial y}\right)^2\right] + \sum_{1}^{2}{}_i\left(\sum_{0}^{n}{}_h \alpha_{ih} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h}\partial y^h}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{0}^{n-1}{}_k F_k \right\} dxdy = 0 \quad \text{per} \quad n = 2p+1.$$

Osserviamo poi che se $n = 2p$ si ha

$$\iint_{\mathfrak{D}} \frac{\partial^{2p-2} u}{\partial x^{2p-2-2i}\partial y^{2i}} \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p-2j}\partial y^{2j}} dxdy = -\iint_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial^{2p-1} u}{\partial x^{2p-1-(i+j)}\partial y^{i+j}}\right)^2 dxdy;$$

se $n = 2p+1$ si hanno formole analoghe ponendo $\partial u/\partial x$ oppure $\partial u/\partial y$ al posto di u. Pertanto se $n = 2p$

$$(8) \qquad \iint_{\mathfrak{D}} \Delta_p u \sum_{0}^{p-1}{}_i \frac{\partial^{2p-2} u}{\partial x^{2p-2-2i}\partial y^{2i}} dxdy = -\iint_{\mathfrak{D}} \Phi_{n-1} dxdy$$

essendo Φ_{n-1} una combinazione a coefficienti costanti positivi dei quadrati delle derivate $(n-1)$-sime della u.

Analogamente se $n = 2p + 1$

$$(8') \qquad \iint\limits_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial \Delta_p u}{\partial x} \sum_{0}^{p-1}{}_i \frac{\partial^{2p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\partial x^{2p-2-2i} \partial y^{2i}} + \frac{\partial \Delta_p u}{\partial y} \sum_{0}^{p-1}{}_i \frac{\partial^{2p-2} \dfrac{\partial u}{\partial y}}{\partial x^{2p-2-2i} \partial y^{2i}} \right) dx dy =$$

$$= - \iint\limits_{\mathfrak{D}} \Phi_{n-1} \, dx dy$$

ove Φ_{n-1} ha il significato già specificato.

Infine se le $M(x, y)$ ed $N(x, y)$ sono funzioni continue su $\mathfrak{D}$ insieme alle derivate $\partial M / \partial x$ e $\partial N / \partial y$, si ha

$$(9) \qquad 0 = \iint\limits_{\mathfrak{D}} \sum_{0}^{[k/2]}{}_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[M_{ik} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[N_{ik} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^i \partial y^{k-i}} \right)^2 \right] \right\} dx dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathfrak{D}} \left\{ \sum_{0}^{[k/2]}{}_i \left[\left(M_{ik} \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-i} \partial y^i} + \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i} \right)^2 + \right. \right.$$

$$\left. + \left(N_{ik} \frac{\partial^k u}{\partial x^i \partial y^{k-i}} + \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^i \partial y^{k+1-i}} \right)^2 \right] +$$

$$+ \sum_{0}^{[k/2]}{}_i \left[\left(\frac{\partial M_{ik}}{\partial x} - M_{ik}^2 \right) \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_{ik}}{\partial y} - N_{ik}^2 \right) \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^i \partial y^{k-i}} \right)^2 \right] -$$

$$\left. - \sum_{0}^{[k/2]}{}_i \left[\left(\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^i \partial y^{k+1-i}} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

per $k = 0, 1, \ldots, n-2$. Poniamoci nel caso di $n = 2p$ (in modo del tutto analogo si procede se $n = 2p + 1$). Sommiamo alla (7) la (8) moltiplicata per $2\varepsilon\lambda$ e le (9) per $k = 0, 1, \ldots, n-2$; si ha

$$(10) \qquad \iint\limits_{\mathfrak{D}} \left\{ \varepsilon \left(\Delta_p u + \lambda \sum_{0}^{p-1}{}_i \frac{\partial^{2p-2} u}{\partial x^{2p-2-2i} \partial y^{2i}} \right)^2 + \sum_{1}^{2}{}_i \left(\sum_{0}^{n}{}_h \alpha_{ih} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h} \partial y^h} \right)^2 + \right.$$

$$+ \sum_{0}^{n-2}{}_k \sum_{0}^{[k/2]}{}_i \left[\left(M_{ik} \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-i} \partial y^i} + \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i} \right)^2 + \right.$$

$$\left. \left. + \left(N_{ik} \frac{\partial^k u}{\partial x^i \partial y^{k-i}} + \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^i \partial y^{k+1-i}} \right)^2 \right] + \sum_{0}^{n-1}{}_k \Psi_k \right\} dx dy = 0$$

dove

$$\Psi_{n-1} = 2\varepsilon\lambda\, \Phi_{n-1} + F_{n-1} - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \left[\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1-i}\partial y^{i}}\right)^2 + \left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{i}\partial y^{n-1-i}}\right)^2\right];$$

$$\Psi_{n-2} = -\varepsilon\lambda^2\left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{\partial^{2p-2}u}{\partial x^{2p-2-2i}\partial y^{2i}}\right)^2 + F_{n-2} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \left[\left(\frac{\partial M_{i,\,n-2}}{\partial x} - M_{i,\,n-2}^2\right)\left(\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{n-2-i}\partial y^{i}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial N_{i,\,n-2}}{\partial y} - N_{i,\,n-2}^2\right)\left(\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{i}\partial y^{n-2-i}}\right)^2\right] -$$

$$- \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} \left[\left(\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{n-2-i}\partial y^{i}}\right)^2 + \left(\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{i}\partial y^{n-2-i}}\right)^2\right];$$

Ψ_{n-j} per $j = 3, \ldots, n-1$, si ottiene da Ψ_{n-2} sopprimendo il primo termine e ponendo $n - j$ al posto di $n - 2$;

$$\Psi_0 = F_0 + \left(\frac{\partial M_{00}}{\partial x} - M_{00}^2 + \frac{\partial N_{00}}{\partial y} - N_{00}^2\right) u^2.$$

Indichiamo ora con $\overline{\Psi}_k$ la forma binaria di grado $2k$ che si ottiene dalla Ψ_k ponendo $\alpha^i\beta^j$ al posto di $\partial^{i+j}u/\partial x^i\partial y^j$.

Intanto si può scegliere λ in modo che $\overline{\Psi}_{n-1}$ sia semidefinita positiva. Fissato λ, poniamo

$$(11) \quad \frac{\partial M_{i,n-2}}{\partial x} - M_{i,n-2}^2 - \mu_{i,n-2}^2 = 0\,, \quad \frac{\partial N_{i,n-2}}{\partial y} - N_{i,n-2}^2 - \nu_{i,n-2}^2 = 0$$

essendo $\mu_{i,\,n-2}$ e $\nu_{i,\,n-2}$ delle costanti positive scelte in modo che

$$- \varepsilon\lambda^2\Big(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha^{2p-2-2i}\,\beta^{2i}\Big)^2 + \overline{F}_{n-2} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} (\mu_{i,\,n-2}^2\, \alpha^{2n-4-2i}\,\beta^{2i} + \nu_{i,n-2}^2\, \alpha^{2i}\,\beta^{2n-4-2i}) -$$

$$- \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} [\alpha^{2n-4-2i}\,\beta^{2i} + \alpha^{2i}\,\beta^{2n-4-2i}]$$

sia semidefinita positiva. Per soddisfare le (11) basta prendere

$$M_{i,n-2} = \mu_{i,n-2} \operatorname{tg} \mu_{i,n-2}(x - x_0) \quad , \quad N_{i,n-2} = \nu_{i,n-2} \operatorname{tg} \nu_{i,n-2}(y - y_0)$$

$$-\frac{\pi}{2\mu_{i,n-2}} < x - x_0 < \frac{\pi}{2\mu_{i,n-2}} \quad , \quad -\frac{\pi}{2\nu_{i,n-2}} < y - y_0 < \frac{\pi}{2\nu_{i,n-2}}$$

(x_0 , y_0 costanti)

In particolare si può prendere $\mu_{i,n-2} = \nu_{i,n-2}$.

In modo analogo si determinano successivamente le $M_{i,n-3}$, ..., M_{00} ed $N_{i,n-3}$, ..., N_{00}; le μ_{00} ed ν_{00} si determinano in modo che $F_0/u^2 + \mu_{00}^2 + \nu_{00}^2$ sia sempre positiva.

Pertanto se $\mathfrak{D}$ è interno al rettangolo $-\pi/2\mu \leq x - x_0 \leq \leq \pi/2\mu$, $-\pi/2\nu \leq y - y_0 < \pi/2\nu$ dove $\mu = \max \mu_{ik}$ per $i = 0$, 1, ..., $\left[\frac{k}{2}\right]$ e $k = 0, 1, \ldots, n-2$ e $\nu = \max \nu_{ik}$ per $i = 0, 1, \ldots$, $\left[\frac{k}{2}\right]$ e $k = 0, 1, \ldots, n-2$ la (10) sussisterà solo se $u \equiv 0$.

Scegliendo $\mu_{ij} = \nu_{ij}$ si ha dunque che:

Se diam $\mathfrak{D} < \pi/\mu$ *il problema di Dirichlet per la* (1') *ha al più una soluzione.*