RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO TONOLO

**Sugli spazi riemanniani normali ad *n* dimensioni**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 26 (1956), p. 328-333

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__328_0>

# SUGLI SPAZI RIEMANNIANI NORMALI AD $n$ DIMENSIONI

*Nota* (*) *di* ANGELO TONOLO (*a Padova*)

Alcuni anni or sono [1]) ho assegnato delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè uno spazio riemanniano $V_3$ sia normale, cioè affinchè con le linee delle sue tre congruenze principali si possa costruire (almeno) un sistema triplo ortogonale di superficie.

Successivamente lo Schouten [2]) ha generalizzato il problema assumendo in uno spazio riemanniano $V_n$, con $n \geq 3$, un campo qualsiasi di affinori simmetrici, con distinti autovalori, e lo ha risolto con i suoi espressivi ed agili algoritmi. Il Nijenhuis [3]) ha risolto la quistione anche per gli spazi $X_n$ senza metrica e senza connessione.

Mi sono ora proposto il problema di caratterizzare gli spazi $V_n$ riemanniani normali con $n > 3$ estendendo il metodo esposto nella mia precedente ricerca. Questa estensione non

---

(*) Pervenuta in Redazione il 4 dicembre 1956.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1) A. TONOLO, *Sulle varietà riemanniane normali a tre dimensioni*, Pont. Accad. Sci., Acta, Vol. XIII, (1949); Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Serie VIII, Vol. VI, (1949).

2) J. A. SCHOUTEN, *Sur les tenseurs de $V_n$ aux directions principales $V_{n-1}$-normales*, Conférence au Colloque de Géométrie différentielle à Louvain, 11-14 Avril, (1951).

3) A. NIJENHUIS, *$X_{n-1}$-forming sets of eigenvectors*, Proc. Kon. Akad. van Wet. Amsterdam, Serie A, Vol. LIV, (1951).

J. HAANTJES, *On $X_m$-forming sets of eigenvectors*, Ibidem, Serie A, Vol. LVIII, (1955).

A. FRÖLICHER and A. NIJENHUIS, *Theory of vector-valued differential forms*, Ibidem, Serie A, Vol. LIX, (1956).

porta alle equazioni assegnate dallo Schouten; essa assegna alle condizioni di normalità la forma seguente: certi polinomi $P_{\lambda\mu\sigma}(\rho)$ nella indeterminata $\rho$, i quali si costruiscono operando sulle componenti del tensore misto di Ricci $K_{\bullet\mu}^{\cdot\nu}$ e loro derivate prime rispetto alle coordinate di $V_n$, devono essere divisibili per il $\mathrm{Det}(K_{\bullet\mu}^{\cdot\nu} - \rho\delta_\mu^\nu)$. È essenziale supporre che gli zeri di questo determinante (autovalori di $K_{\bullet\mu}^{\cdot\nu}$) siano semplici. In tale ipotesi il risultato è valido per ogni campo di affinori simmetrici di $V_n$.

**1.** - Siano: ($\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu, \xi, \sigma, \tau, = 1, 2, \ldots, n$) $V_n$ uno spazio riemanniano con le coordinate $\xi^\lambda$, $g_{\mu\nu}$ il suo tensore metrico, $K_{\mu\nu}$ il tensore contratto di Ricci, $\rho_h = \rho_h(\xi^\lambda)$ ($h = 1, 2, \ldots, n$) le radici dell'equazione

$$\mathrm{Det}(K_{\bullet\mu}^{\cdot\nu} - \rho\delta_\mu^\nu) = 0, \tag{1}$$

(autovalori di $K_{\bullet\mu}^{\cdot\nu}$). Noi supporremo che esse siano semplici; allora vi sono in $V_n$ $n$ determinate direzioni principali mutuamente ortogonali e noi indicheremo con $\overset{h}{i}_\lambda$ ($h = 1, 2, \ldots, n$) $n$ vettori unità lungo queste direzioni (sistema covariante di autovettori). Normale è lo spazio $V_n$ quando i campi $\overset{h}{i}_\lambda$ sono $V_{n-1}$-normali. È noto che ciò avviene solo e soltanto quando

$$\gamma_{\mu\nu\sigma} = \overset{h}{i}_\mu(\partial_\nu \overset{h}{i}_\sigma - \partial_\sigma \overset{h}{i}_\nu) + \text{ termini ciclici} = 0, \quad (\mu \neq \nu \neq \sigma) \tag{2}$$

$$\partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial \xi^\lambda}.$$

Per semplificare in seguito le notazioni, denoteremo con $\rho = \rho(\xi^\lambda)$ una generica delle $\rho_h$ e con $i_\lambda$ i corrispondenti autovettori; valgono allora le identità

$$(K_{\bullet\mu}^{\cdot\nu} - \rho(\xi^\lambda)\delta_\mu^\nu)i_\nu = 0. \tag{3}$$

Poichè la radice $\rho(\xi^\lambda)$ è supposta semplice per l'equazione (1), la matrice del determinante che figura al primo membro della (1) con $\rho = \rho(\xi^\lambda)$ è di caratteristica $n-1$; perciò i complementi algebrici degli elementi di una sua linea sono proporzionali ai complementi algebrici degli elementi di una sua linea parallela. Posto allora

$$k_{\mu}^{\nu} = K_{\cdot\mu}^{\nu} - \rho(\xi^{\lambda})\delta_{\mu}^{\nu}, \tag{4}$$

il risultato della risoluzione del sistema (3) può scriversi così:

$$m_{\mu} i_{\nu} = A_{\mu\nu}, \tag{5}$$

ove abbiamo indicato con

$$A_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}(\xi^{\lambda}) \tag{6}$$

i complementi algebrici degli elementi (4) della matrice $\|k_{\mu}^{\nu}\|$.

Nel seguito giocano un ufficio essenziale le seguenti espressioni:

$$A_{\mu\nu\sigma} = A_{\tau\mu}\partial_{\nu}A_{\tau\sigma} - A_{\tau\sigma}\partial_{\nu}A_{\tau\mu} + \text{termini ciclici.} \tag{7}$$

$$\mu \neq \nu \neq \sigma.$$

Esse sono funzioni delle coordinate $\xi^{\lambda}$ e si costruiscono operando soltanto sulle componenti $K_{\cdot\mu}^{\nu}$ e loro derivate prime rispetto a queste variabili.

**2.** - Poniamo:

$$h_{\mu}^{\nu} = K_{\cdot\mu}^{\nu} - \rho\delta_{\mu}^{\nu}, \tag{8}$$

$$E = E(\xi^{\lambda}, \rho) = \mathrm{Det}\,(h_{\mu}^{\nu}) = 0, \tag{9}$$

ove $\rho$ va pensata ora come una indeterminata, e denotiamo con

$$B_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}(\xi^{\lambda}, \rho) \tag{10}$$

i complementi algebrici degli elementi (8) della matrice $\|h_{\mu}^{\nu}\|$. Essi sono funzioni intere nella $\rho$ i cui coefficienti dipendono dalle $\xi^{\lambda}$ e si identificano con i complementi algebrici (6) quando al posto della indeterminata $\rho$ poniamo la radice $\rho = \rho(\xi^{\lambda})$ dell'equazione (1), cioè della (9); abbiamo pertanto

$$A_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}[\xi^{\lambda}, \rho(\xi^{\lambda})]. \tag{11}$$

Premettiamo la notazione seguente: data una generica funzione delle $\xi^\lambda$ e della $\rho$

$$F = F(\xi^\lambda, \rho),$$

con il simbolo $[F]$ intendiamo la funzione delle sole $\xi^\lambda$ che si ricava dalla $F$ quando al posto della $\rho$ poniamo la radice $\rho(\xi^\lambda)$ ; cioè

$$[F] = F(\xi^\lambda, \rho(\xi^\lambda)). \tag{12}$$

Dalla (11) si ricava allora

$$\partial_\alpha A_{\mu\nu} = [\partial_\alpha B_{\mu\nu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}\partial_\alpha\rho]. \tag{13}$$

Poichè $\rho(\xi^\lambda)$ è radice semplice dell'equazione (9), sarà

$$[E] = 0, \ [\partial_\rho E] \neq 0,$$

e quindi

$$\partial_\alpha\rho = -\left[\frac{\partial_\alpha E}{\partial_\rho E}\right].$$

Sostituendo nella (13) ricaviamo

$$[\partial_\rho E]\partial_\alpha A_{\mu\nu} = [\partial_\rho E\partial_\alpha B_{\mu\nu} - \partial_\alpha E\partial_\rho B_{\mu\nu}]. \tag{15}$$

Moltiplichiamo la (15) per un generico complemento algebrico $A_{\beta\omega}$; per la (11) e la convenzione (12), otteniamo

$$[\partial_\rho E]A_{\beta\omega}\partial_\alpha A_{\mu\nu} = [B_{\beta\omega}\{\partial_\rho E\partial_\alpha B_{\mu\nu} - \partial_\alpha E\partial_\rho B_{\mu\nu}\}]. \tag{16}$$

Consideriamo l'espressione che figura dentro la parentesi quadra del secondo membro della (16), cioè

$$B_{\beta\omega}\{\partial_\rho E\partial_\alpha B_{\mu\nu} - \partial_\alpha E\partial_\rho B_{\mu\nu}\}. \tag{17}$$

Essa è manifestamente una funzione intera nella indeterminata $\rho$ i cui coefficienti sono funzioni delle sole $\xi^\lambda$ la quale si identifica col primo membro della (16) quando al posto della $\rho$ poniamo la radice $\rho(\xi^\lambda)$. Fissiamo ora nella (7) un valore per $\tau$, che denotiamo ancora con questa lettera, e poniamo:

$$A^*_{\mu\nu\sigma/\tau} = A_{\tau\mu}\partial_\nu A_{\tau\sigma} - A_{\tau\sigma}\partial_\nu A_{\tau\mu}. \tag{18}$$

Moltiplichiamo per $[\partial_\rho E]$; si trae, applicando la (16),

$$[\partial_\rho E]A^*_{\mu\nu\sigma/\tau} = [\partial_\rho E\{B_{\tau\mu}\partial_\nu B_{\tau\sigma} - B_{\tau\sigma}\partial_\nu B_{\tau\mu}\} + \tag{19}$$
$$+ \partial_\nu E\{B_{\tau\sigma}\partial_\rho B_{\tau\mu} - B_{\tau\mu}\partial_\rho B_{\tau\sigma}\}].$$

Per quanto abbiamo detto in precedenza l'espressione fra parentesi quadre nel secondo membro della (19), è un polinomio nella $\rho$ con coefficienti dipendenti dalle coordinate $\xi^\lambda$; esso è uguale al primo membro della (19) quando $\rho$ viene sostituita con la radice $\rho(\xi^\lambda)$.

Nella (19) pensiamo effettuata la sommatoria rispetto a $\tau$ e facciamo circolare gli indici $\mu$, $\nu$, $\sigma$; otteniamo

$$[\partial_\rho E]A_{\mu\nu\sigma} = [\partial_\rho E\{B_{\tau\mu}\partial_\nu B_{\tau\sigma} - B_{\tau\sigma}\partial_\nu B_{\tau\mu}\} + \tag{20}$$
$$+ \partial_\nu E\{B_{\tau\sigma}\partial_\rho B_{\tau\mu} - B_{\tau\mu}\partial_\rho B_{\tau\sigma}\} + \text{termini ciclici}].$$

Il secondo membro della (20), prima di effettuarvi la sostituzione $\rho = \rho(\xi^\lambda)$, è una funzione intera nella $\rho$:

$$P_{\mu\nu\sigma}(\rho) = \overset{(s)}{p}_{\mu\nu\sigma}\rho^s + \overset{(s-1)}{p}_{\mu\nu\sigma}\rho^{s-1} + \dots\, p_{\mu\nu\sigma}, \tag{21}$$

e si ha identicamente

$$[\partial_\rho E]A_{\mu\nu\sigma} = [P_{\mu\nu\sigma}(\rho)]. \tag{22}$$

Va osservato che i coefficienti $p_{\mu\nu\sigma}$, $\overset{(t)}{p}_{\mu\nu\sigma}$ $(t = 1, \dots, s)$ si costruiscono a mezzo delle componenti del tensore misto di Ricci e delle loro derivate parziali prime rispetto alle $\xi^\lambda$.

**3.** - Possiamo scrivere la (7) nella forma seguente:

$$A_{\mu\nu\sigma} = A_{\tau\mu}(\partial_\nu A_{\tau\sigma} - \partial_\sigma A_{\tau\nu}) + \text{termini ciclici}. \tag{23}$$

Poniamo al posto dei complementi algebrici $A_{\mu\nu}$ i primi membri della (5); si ottiene

$$(24)\qquad A_{\mu\nu\sigma} = m_\tau i_\mu \{ \partial_\nu m_\tau i_\sigma - \partial_\sigma m_\tau i_\nu \} + \text{termini ciclici.}$$

Eseguendo le derivazioni e tenendo conto delle (2) si ricava

$$(25)\qquad A_{\mu\nu\sigma} = M\gamma_{\mu\nu\sigma}\,, \qquad M = \Sigma_\tau m_\tau^2 \neq 0.$$

Supponiamo che il campo $i_\lambda^h$ sia $V_{n-1}$-normale; allora sono nulle le $\gamma_{\mu\nu\sigma}$ e quindi anche le $A_{\mu\nu\sigma}$ per le (25); per le (22) ogni $\rho_h(\xi^\lambda)$ è anche radice del polinomio (21) $P_{\mu\nu\sigma}(\rho)$ qualunque sia la terna $\mu\nu\sigma$, con $\mu \neq \nu \neq \sigma$. Questi polinomi sono perciò divisibili per il determinante $E(\rho)$:

$$(26)\qquad P_{\mu\nu\sigma}(\rho) = E(\rho) Q_{\mu\nu\sigma}(\rho).$$

Inversamente, se valgono le (26) per ogni terna $\mu\nu\sigma$, e se $\rho = \rho(\xi^\lambda)$ sono le radici dell'equazione $E(\rho) = 0$, supposte semplici, allora si annullano anche i polinomi $P_{\mu\nu\sigma}(\rho)$ con $\rho = \rho(\xi^\lambda)$; per le (22) sono allora nulle le $A_{\mu\nu\sigma}$ e quindi le $\gamma_{\mu\nu\sigma}$ per le (25); il campo dei vettori $i_\lambda^h$ è perciò $V_{n-1}$-normale.

OSSERVAZIONE. - È manifesto che la precedente teoria è senz'altro applicabile ad ogni campo di affinori simmetrici di $V_n$, nell'ipotesi che siano semplici le radici della corrispondente equazione secolare.