RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURO PAGNI

Sulla derivazione negli insiemi astratti delle funzioni a variazione limitata

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 26 (1956), p. 61-69

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__61_0>

SULLA DERIVAZIONE NEGLI INSIEMI ASTRATTI DELLE FUNZIONI A VARIAZIONE LIMITATA

Nota (*) *di* MAURO PAGNI (*a Modena*)

Questa Nota è da riguardarsi come un'aggiunta alla Memoria « Sulla derivazione negli insiemi astratti delle funzioni a variazione limitata integrabili secondo Burkill » contenuta in questi stessi *Rendiconti* (v. vol. XXV, pag. 279 e seg.) e ad essa si rimanda per le notazioni, la nomenclatura e per la bibliografia (**).

Nel presente lavoro usando di considerazioni contenute in [M] si osserva dapprima che è possibile definire per una qualunque funzione a variazione limitata in una famiglia di insiemi astratti una derivata inferiore ed una derivata superiore rispetto ad una assegnata misura. Nel caso che queste derivate coincidono si arriva così ad introdurre una derivata, che per le funzioni che siano anche integrabili secondo Burkill coincide quella introdotta in [M]. Successivamente vengono messe in luce talune proprietà delle funzioni a variazione limitata derivabili.

Infine per le funzioni d'intervallo in uno spazio euclideo vengono raffrontate le derivate estreme qui introdotte con quelle classiche e il raffronto fatto permette di riottenere, come casi particolari della teoria svolta, noti teoremi su queste ultime.

(*) Pervenuta in Redazione il 12 luglio 1956.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Modena.

(**) Nel seguito tale Memoria sarà brevemente indicata con [M].

1. - Sia $\{I\}$ una famiglia elementare di insiemi astratti ed $F(I)$ una qualunque funzione reale definita in $\{I\}$ ed ivi VL [1]).

Posto per ogni I di $\{I\}$ $\underline{G}(I) = \underline{\int_I} F$, $\overline{G}(I) = \overline{\int_I} F$ si osservi che (teor. XIII di [M]) le funzioni $\underline{G}(I)$ e $\overline{G}(I)$ sono AVL in $\{I\}$.

Sia ora $\mu(I)$ una misura non negativa definita in $\{I\}$. Fissato comunque l'insieme I_0 di $\{I\}$ definiamo come *μ-derivata inferiore* della $F(I)$ su I_0 la funzione reale $\underline{F}'_B(x) = \underline{G}'(x)$, essendo $\underline{G}'(x)$ la μ-derivata della funzione AVL $\underline{G}(I)$ introdotta da G. Fichera [7], [8] [2]).

Analogamente si definisce la μ-derivata superiore $\overline{F}'_B(x)$. Diciamo poi che la funzione VL $F(I)$ è *μ-derivabile* su I_0 se $\overline{F}'_B(x)$ è μ-equivalente in I_0 a $\underline{F}'_B(x)$, e diciamo *μ-derivata* dalla $F(I)$ su I_0 la funzione $F'_B(x) = \underline{F}'_B(x) = \overline{F}'_B(x)$.

È immediato verificare che se la funzione VL $F(I)$ è integrabile secondo Burkill in $\{I\}$ esiste la μ-derivata nel senso ora detto e questa è μ-equivalente alla μ-derivata definita nel n. 4 di [M].

Vi sono però delle funzioni μ-derivabili secondo la definizione ora data che non sono integrabili secondo Burkill come prova il seguente esempio.

Sia $F(I)$ una funzione così definita nella famiglia $\{I\}$ degli intervalli superiormente aperti dello S_1 euclideo contenuti nell'intervallo $(0,1)$:

$$F(I) \begin{cases} = 1 & \text{se } I \text{ è un intervallo avente il primo estremo nel punto zero e il secondo estremo in un punto razionale;} \\ = 0 & \text{per tutti i rimanenti intervalli.} \end{cases}$$

La $F(I)$ che è VL non è integrabile secondo Burkill in $(0, 1)$ secondo la definizione data al n. 2 di [M] perchè si ha in detto intervallo $\underline{\int} F = 0$, $\overline{\int} F = 1$.

---

1) La nomenclatura è quella usata in [M].

2) I numeri fra parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia che trovasi alla fine di [M].

D'altra parte se $\mu(I)$ è l'ordinaria misura riesce $F'_B(x) = \underline{G}'(x) = \bar{G}'(x) = 0$ dato che la funzione $\underline{G}(I) = \underline{\int_I} F$ è uguale a zero qualunque sia I e la funzione AVL $\bar{G}(I) = \overline{\int_I} F$ riesce così definita

$$\bar{G}(I) \begin{cases} = 1 \text{ per ogni intervallo contenente il punto zero;} \\ = 0 \text{ per gli altri intervalli.} \end{cases}$$

Dalla definizione di derivata data sopra seguono facilmente i seguenti teoremi

I. *Se $F(I)$ VL è μ-derivabile su I_0 lo è altresì su ogni insieme I di $\{I\}$ in esso contenuto e se $F'_B(x)$ è la sua μ-derivata su I_0 essa è tale anche su I.*

II. *Se $F(I)$ VL è μ-derivabile su I_0 detta c una qualunque costante reale e posto $H(I) = cF(I)$, la $H(I)$ è μ-derivabile su I_0 e riesce $H'_B(x) = c\,F'_B(x)$.*

Vale inoltre il seguente teorema

III. *Se $F_1(I)$ ed $F_2(I)$ sono VL e μ-derivabili su I_0 posto $F = F_1 + F_2$, la funzione $F(I)$ è μ-derivabile su I_0 e riesce $F'_B(x) = F'_{1B}(x) + F'_{2B}(x)$.*

Si osservi dapprima che se $H(I)$ e $K(I)$ sono due funzioni AVL tali che $H(I) \geq K(I)$ è $H'(x) \geq K'(x)$.

Posto:

$$\underline{G}(I) = \underline{\int_I} F, \quad \bar{G}(I) = \overline{\int_I} F, \quad \underline{G}_1(I) = \underline{\int_I} F_1, \quad \bar{G}_1(I) = \overline{\int_I} F_1,$$

$$\underline{G}_2(I) = \underline{\int_I} F_2, \quad \bar{G}_2(I) = \overline{\int_I} F_2$$

si ha (vedasi teor. X di [M])

$$\underline{G}_1(I) + \underline{G}_2(I) \leq \underline{G}(I) \leq \bar{G}(I) \leq \bar{G}_1(I) + \bar{G}_2(I)$$

e tenuto conto di quanto sopra osservato

$$\underline{G}_1'(x) + \underline{G}_2'(x) \leq \underline{G}'(x) \leq \bar{G}'(x) \leq \bar{G}_1'(x) + \bar{G}_2'(x)$$

ed essendo per ipotesi $\underline{G}_1'(x) = \overline{G}_1'(x)$, $\underline{G}_2'(x) = \overline{G}_2'(x)$ si ottiene l'asserto.

2. - Dal teor. XVIII di [M] e dal teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym (vedasi G. Fichera [7] o [8]) segue immediatamente il seguente teorema

IV. *Se $F(I)$ è μ-AC in $\{I\}$, posto $\overline{G}(I) = \overline{\int_I} F$ $(\underline{G}(I) = \underline{\int_I} F)$ si ha per ogni I di $\{I\}$*

$$\overline{G}(I) = \int_I \overline{F}'_B(x) d\mu$$

$$\left(\underline{G}(I) = \int_I \underline{F}'_B(x) d\mu\right).$$

Dalla definizione di μ-derivata per le funzioni VL e dal teor. IV segue

V. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $F(I)$ μ-AC sia μ-derivabile è che sia integrabile secondo Burkill.*

3. - Diremo che la funzione VL $F(I)$ è *μ-singolare* nell'insieme I_0 di $\{I\}$ se la sua μ-derivata su I_0 è μ-equivalente a zero [3]).

Vale il seguente teorema

VI. *Se la funzione VL $F(I)$ è μ-derivabile su I_0 di $\{I\}$ per ogni I di $\{I\}$ contenuto in I_0 sussiste la decomposizione*

$$F(I) = F^*(I) + \int_I F'_B(x) d\mu.$$

con $F^*(I)$ μ-singolare su I_0. Tale decomposizione di $F(I)$ nella somma di una funzione μ-singolare su I_0 e di una funzione additiva e μ-AC è unica.

---

[3]) Per le funzioni VL $F(I)$ integrabili secondo Burkill la definizione di funzione μ-singolare coincide con quella data nel n. 6 di [M].

Posto per ogni I di $\{I\}$ contenuto in I_0

$$F^*(I) = F(I) - \int_I F'_B(x)d\mu$$

la funzione $F^*(I)$ riesce μ-derivabile e la sua μ-derivata μ-equivalente a zero in I_0; da ciò la decomposizione.

L'unicità della decomposizione può stabilirsi come segue. Sia per ogni I di $\{I\}$ contenuto in I_0

$$F(I) = \bar{F}(I) + \int_I f(x)d\mu$$

con $\bar{F}(I)$ μ-singolare su I_0 e $f(x)$ ivi μ-sommabile.. Si ha

$$F^*(I) - \bar{F}(I) = \int_I (f(x) - F'_B(x))d\mu.$$

Ne segue che la funzione μ-singolare $F^* - \bar{F}$ ha per derivata $f(x) - F'_B(x)$ e da ciò la μ-equivalenza di $f(x)$ a $F'_B(x)$ in I_0.

Il teorema ora dimostrato per l'analogia che presenta coi teorr. IV e XXI di [M] può chiamarsi teorema della decomposizione di Lebesgue di una funzione VL μ-derivabile.

4. - Nel presente numero consideremo funzioni $F(I)$ reali definite nella famiglia elementare $\{I\}$ degli intervalli superiormente aperti dello spazio euclideo S_r.

Come misura μ assumeremo quella ordinaria (di Lebesgue) che indicheremo con τ.

Mostreremo come la teoria svolta nei numeri precedenti contenga come casi particolari vari risultati già acquisiti nella teoria classica della derivazione delle funzioni d'insieme.

Premettiamo il seguente

LEMMA. - *Se $F(I)$ è VL in I_0, I_0 di $\{I\}$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una decomposizione $\mathfrak{d}$ di I_0, in un numero finito d'intervalli di $\{I\}$, $\bar{I}_1, \dots, \bar{I}_n$, tale che preso comunque un numero finito d'intervalli $I_1, \dots, I_p$ di $\{I\}$ disgiunti ed ognuno conte-*

nuto in qualche $\bar{I}_i$ *riesca*:

$$\sum_{h=1}^{p} F(I_h) < \sum_{h=1}^{p} \overline{\int_{I_h}} F + \varepsilon$$

$$\left(\sum_{h=1}^{p} F(I_h) > \sum_{h=1}^{p} \underline{\int_{I_h}} F - \varepsilon\right).$$

La dimostrazione si conduce allo stesso modo di quella dell'analogo Lemma che trovasi in [M].

Indicati con $\underline{D}_F(x)$, $\overline{D}_F(x)$ i simboli richiamati in [M] (derivate estreme con parametro di regolarità) sussiste il seguente teorema la cui dimostrazione, usando del Lemma qui sopra enunciato, si conduce in modo perfettamente analogo a quello del teor. XXVII di [M]

VII. *Se* $H(I)$ $(K(I))$ *è una funzione VL in* I_0 *tale che per tutti gli* I *di* $\{I\}$ *contenuti in* I_0 *si abbia* $\overline{\int_I} H = 0$ $(\underline{\int_I} K = 0)$ *riesce* $\overline{D}_H(x) \leq 0$ $(\underline{D}_K(x) \geq 0)$ *quasi dappertutto in* I_0.

Il seguente teorema mette in relazione i simboli $\underline{D}_F(x)$, $\overline{D}_F(x)$ con $\underline{F}'_B(x)$, $\overline{F}'_B(x)$ e precisamente

VIII. *Se* $F(I)$ *è VL in* I_0, *riesce quasi dappertutto in* I_0

$$\underline{F}'_B(x) \leq \underline{D}_F(x) \leq \overline{D}_F(x) \leq \overline{F}'_B(x);$$

se poi $F(I)$ *è anche derivabile* [4]) *in* I_0 *si ha quasi dappertutto*

$$\underline{F}'_B(x) = \underline{D}_F(x) = \overline{D}_F(x) = \overline{F}'_B(x).$$

Posto $\overline{G}(I) = \overline{\int_I} F$, $\underline{G}(I) = \underline{\int_I} F$ si considerino le funzioni

$$H(I) = F(I) - \overline{G}(I)$$
$$K(I) = F(I) - \underline{G}(I).$$

---

[4]) Secondo la definizione data nel n. 1.

Si ha tenendo presente il teor. X di [M] e l'additività di $\overline{G}(I)$ e $\underline{G}(I)$

$$0=\overline{\int_I} F-\overline{G}(I)=\overline{\int_I} F+\underline{\int_I} -\overline{G}\leq \overline{\int_I} H \leq \overline{\int_I} F+\overline{\int_I} -\overline{G}=\overline{\int_I} F-\overline{G}(I)=0$$

$$0=\underline{\int_I} F-\underline{G}(I)=\underline{\int_I} F+\underline{\int_I} -\underline{G}\leq \underline{\int_I} K\leq \underline{\int_I} F+\overline{\int_I} -\underline{G}=\underline{\int_I} F-\underline{G}(I)=0$$

cioè $\overline{\int_I} H=0$, $\underline{\int_I} K=0$.

e per il teor. VII $\overline{D}_H(x)\leq 0$, $\underline{D}_K(x)\geq 0$ quasi dappertutto in I_0. D'altra parte si ha

$$\overline{D}_F(x)-\overline{D}_{\overline{G}}(x)\leq \overline{D}_H(x),$$

$$\underline{D}_F(x)-\underline{D}_{\underline{G}}(x)\geq \underline{D}_K(x).$$

Da ciò e da quanto sopra visto $\overline{D}_F(x)\leq \overline{D}_{\overline{G}}(x)$, $\underline{D}_F(x)\geq \underline{D}_{\underline{G}}(x)$ e tenuto presente che (teor. XXVI di [M]) quasi dappertutto in I_0

$$\overline{D}_{\overline{G}}(x)=\underline{D}_{\overline{G}}(x)=\overline{G}'(x)=\overline{F}'_B(x)$$

$$\underline{D}_{\underline{G}}(x)=\overline{D}_{\underline{G}}(x)=\underline{G}'(x)=\underline{F}'_B(x)$$

si ottiene l'asserto.

OSSERVAZIONE. Dall'essere $\underline{D}_F(x)=\overline{D}_F(x)$ quasi dappertutto in I_0 non segue che la funzione $F(I)$ sia derivabile (secondo la definizione data nel n. 1) su I_0 come mostra il seguente esempio. Sia $\{I\}$ la famiglia degli intervalli superiormente aperti contenuti nel quadrato $Q(0,\ 0;\ 1,\ 1)$ e sia $F(I)$ una funzione così definita:

$F(I)=\tau(I)$ per tutti gli I di $\{I\}$ tali che il rapporto fra il lato minore e il lato maggiore sia minore od uguale del lato maggiore (in simboli dette a, b le misure dei lati di I $\frac{b}{a}\leq a$, $a>b$);

$F(I)=0$ per tutti gli altri I di $\{I\}$.

Riesce $\underline{D}_F(x) = \overline{D}_F(x) = 0$, quasi dappertutto in Q, qualunque sia il parametro di regolarità $q > 0$. D'altra parte $\underline{\int_I} F = 0$ e $\overline{\int_I} F = \tau(I)$ qualunque sia I di $\{I\}$ da che segue $\underline{F}'_B(x) = 0$, $\overline{F}'_B(x) = 1$.

Conseguenza immediata del teor. VIII e dalla definizione di $\underline{F}'_B(x)$ e $\overline{F}'_B(x)$ è un noto teorema [5]:

Se $F(I)$ è VL in I_0 esistono ivi quasi dappertutto finite le $\underline{D}_F(x)$, $\overline{D}_F(x)$.

Vale infine il seguente teorema

X. *Se $F(I)$ è VL in I_0 riesce per ogni I di $\{I\}$ contenuto in I_0*

$$\int_I |\underline{F}'_B(x)|\, d\tau \leq \overline{\int_I} |F|, \quad \int_I |\overline{F}'_B(x)|\, d\tau \leq \overline{\int_I} |F|,$$

$$\int_I |\underline{D}_F(x)|\, d\tau \leq \overline{\int_I} |F|, \quad \int_I |\overline{D}_F(x)|\, d\tau \leq \overline{\int_I} |F|.$$

Da $|F| \geq F$ segue $\overline{\int_I} |F| \geq \overline{\int_I} F$ e quindi quasi dappertutto in I_0

$$|\overline{F(x)}|'_B \geq \overline{F}'_B(x) \geq \underline{F}'_B(x).$$

Da $|F| + F \geq 0$ segue $\overline{\int_I} |F| + \underline{\int_I} F \geq 0$ e quindi quasi dappertutto in I_0

$$\overline{F}'_B(x) \geq \underline{F}'_B(x) \geq -|\overline{F(x)}|'_B.$$

Si ha allora tenendo anche presente il teor. VIII

$$|\underline{F}'_B(x)| \leq |\overline{F(x)}|'_B, \quad |\overline{F}'_B(x)| \leq |\overline{F(x)}|'_B,$$

$$|\underline{D}_F(x)| \leq |\overline{F(x)}|'_B, \quad |\overline{D}_F(x)| \leq |\overline{F(x)}|'_B.$$

Ed osservato che per la definizione di derivata superiore $\overline{\int_I} |F| \geq \int_I |\overline{F(x)}|'_B d\tau$ si ottiene l'asserto.

---

[5]) Vedasi ad es. Kempisty [12].

Il teorema ora visto contiene come caso particolare un noto teorema di R. C. Young [6]) che afferma: *Le derivate* $\underline{D}_F(x)$, $\overline{D}_F(x)$ *di una funzione* $F(I)$ *VL sono sommabili e si ha*

$$\int_I |\underline{D}_F(x)|\, d\tau \leq \overline{\int_I}^{*} |F|, \quad \int_I |\overline{D}_F(x)|\, d\tau \leq \overline{\int_I}^{*} |F| \quad (^7).$$

---

[6]) Vedasi R. C. YOUNG, *Functions of* Σ *definid by addition of functions of intervals*, Math. Ann., 29 (1928), pp. 171-216 oppure S. Kempisty [12].

[7]) Con $\overline{\int_I}^{*} |F|$ si è indicato l'integrale superiore della $|F|$ come definito originariamente da Burkill in [2]. Si può osservare che per quando visto nel n. 9 in [M] riesce $\overline{\int_I} |F| \leq \overline{\int_I}^{*} |F|$.