

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARISTIDE DELEANU

Sur l'intégration des fonctions d'ensemble

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 27 (1957), p. 27-36

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__27_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUR L'INTEGRATION DES FONCTIONS D'ENSEMBLE

Nota () di ARISTIDE DELEANU (a Bucharest)*

Dans cet article on définit et on étudie des intégrales pour des fonctions d'ensemble dont les valeurs sont des parties d'un groupe muni d'une structure \mathcal{L} . Les intégrales de A. Kolmogoroff et C. E. Rickart [5], ainsi que les intégrales considérées par C. T. Ionescu Tulcea [3], en sont des cas particuliers ¹⁾.

§ 1. Définitions et notations.

1. - Nous appelons *espace* \mathcal{L} tout objet $\{E, \mathcal{C}\}$ ou E est un ensemble nonvide et \mathcal{C} un ensemble des couples (\mathcal{F}, x) , \mathcal{F} étant un filtre sur E et x un élément de E , satisfaisant aux conditions suivantes:

(C_1) Pour tout $x \in E$, si \mathcal{M} est l'ultrafiltre des parties $X \subset E$, $X \ni x$, $(\mathcal{M}, x) \in \mathcal{C}$.

(C_2) Si $(\mathcal{F}, x) \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$, $(\mathcal{F}', x) \in \mathcal{C}$.

(C_3) Si $(\mathcal{F}, x) \in \mathcal{C}$ et $(\mathcal{F}, y) \in \mathcal{C}$, alors $x = y$.

Au lieu de $(\mathcal{F}, x) \in \mathcal{C}$ nous écrivons $\mathcal{F} \rightarrow x$ et disons que \mathcal{F} converge vers x .

Soient $\{E, \mathcal{C}\}$ et $\{E', \mathcal{C}'\}$ deux espaces \mathcal{L} et f une application de E dans E' . Nous disons que f est *continue* si, pour tout $x \in E$ et $\mathcal{F} \rightarrow x$, le filtre de base $f(\mathcal{F})$ converge vers $f(x)$. Si f

(*) Pervenuta in redazione il 26 gennaio 1957.

Indirizzo dell'Autore R.P.R., Institutul de matematica, Bucarest (Romania).

¹⁾ Pour des suggestions utiles, l'auteur est obligé à M. C. T. Ionescu Tulcea.

est une application continue de $\{E, \mathcal{C}\}$ dans $\{E', \mathcal{C}'\}$ et g une application continue de $\{E', \mathcal{C}'\}$ dans $\{E'', \mathcal{C}''\}$, $g \circ f$ est une application continue de $\{E, \mathcal{C}\}$ dans $\{E'', \mathcal{C}''\}$.

2' - Si G est un groupe²⁾ et \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux filtres sur G , nous désignons par $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ le filtre engendré par les parties $A + B$, ou $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$. Pour tout filtre \mathcal{F} sur G , nous désignons par $-\mathcal{F}$ le filtre formé des parties $-A$, où $A \in \mathcal{F}$.

Nous appelons *groupe* \mathcal{L} tout objet $\{G, \mathcal{C}\}$ où :

- (i) G est un groupe
- (ii) $\{G, \mathcal{C}\}$ est un espace \mathcal{L} .
- (iii) $\mathcal{F} \rightarrow a$, $\mathcal{G} \rightarrow b$ implique $\mathcal{F} + \mathcal{G} \rightarrow a + b$
- (vi) $\mathcal{F} \rightarrow a$, implique $-\mathcal{F} \rightarrow -a$.

Nous disons qu'un filtre \mathcal{F} sur G est un *filtre Cauchy* si $\mathcal{F} - \mathcal{F} \rightarrow 0$. D'après (iii) et (iv), si $\mathcal{F} \rightarrow x$, \mathcal{F} est un filtre Cauchy; nous disons que $\{G, \mathcal{C}\}$ est un *groupe \mathcal{L} complet* si tout filtre Cauchy converge vers un $x \in E$.

3. - Nous allons maintenant donner quelques exemples concernant les définitions introduites plus haut.

a) Soit E un ensemble muni d'une structure \mathcal{L}^* séparée au sens de Choquet [2]. Si nous écrivons (\mathcal{F}, x) lorsque \mathcal{F} converge vers x au sens de Choquet, et si nous désignons par \mathcal{C} l'ensemble des couples (\mathcal{F}, x) , $\{E, \mathcal{C}\}$ est un espace \mathcal{L} .

b) Soit G un groupe topologique séparé. Si nous écrivons (\mathcal{F}, x) lorsque \mathcal{F} converge vers x dans la topologie de G , et si nous désignons par \mathcal{C} l'ensemble des couples (\mathcal{F}, x) , $\{G, \mathcal{C}\}$ est un groupe \mathcal{L} . G est complet pour sa structure uniforme si et seulement si $\{G, \mathcal{C}\}$ est complet.

c) Soit G un groupe ordonné complètement réticulé³⁾. Un filtre \mathcal{F} sur G est borné si \mathcal{F} possède un élément

²⁾ Tous les groupes considérés dans cet ouvrage sont commutatifs.

³⁾ Un ensemble ordonné E est dit complètement réticulé, si toute partie majorée (minorée) admet une borne supérieure (inférieure) dans E .

borné [1]. Pour tout filtre borné posons

$$\lim \sup \mathcal{F} = \inf_X (\sup X) \text{ et } \lim \inf \mathcal{F} = \sup_X (\inf X) \text{ } ^4)$$

Si nous écrivons (\mathcal{F}, x) lorsque la limite inférieure et la limite supérieure sont toutes les deux égales à x et si nous désignons par \mathcal{C} l'ensemble des couples (\mathcal{F}, x) , $\{G, \mathcal{C}\}$ est un groupe \mathcal{L} .

Tout groupe ordonné complètement réticulé G est complet. En effet, soit \mathcal{F} un filtre sur G tel que $\mathcal{F} - \mathcal{F} \rightarrow 0$. Il s'en suit: $\inf_{X, Y \in \mathcal{F}} (\sup (X - Y)) = \sup_{X, Y \in \mathcal{F}} (\inf (X - Y)) = 0$, et, par suite:

$$\inf_{X, Y \in \mathcal{F}} (\sup X + \sup (-Y)) = \sup_{X, Y \in \mathcal{F}} (\inf X + \inf (-Y))$$

donc :

$$\inf_{X \in \mathcal{F}} (\sup X) - \sup_{X \in \mathcal{F}} (\inf X) = \sup_{Z \in -\mathcal{F}} (\inf Z) - \inf_{Z \in -\mathcal{F}} (\sup Z);$$

le premier membre étant ≥ 0 et le second ≤ 0 , il résulte que \mathcal{F} converge vers un élément de G . Donc $\{G, \mathcal{C}\}$ est complet.

d) Soit $(\{G_i, \mathcal{C}_i\})_{i \in I}$ une famille des groupes \mathcal{L} . Sur le groupe produit G considérons l'ensemble des couples (\mathcal{F}, x) ou \mathcal{F} est un filtre sur G et $x = (x_i)_{i \in I} \in G$, tel que, pour chaque $i \in I$, le filtre de base $pr_i(\mathcal{F})$ converge vers x_i . On constate facilement que $\{G, \mathcal{C}\}$ est un groupe \mathcal{L} . Nous appelons $\{G, \mathcal{C}\}$ le groupe \mathcal{L} produit des groupes $\mathcal{L}\{G_i, \mathcal{C}_i\}$.

4. - Soit $\{G, \mathcal{C}\}$ un groupe \mathcal{L} et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de G ; pour toute partie finie $H \subset I$, posons $s_H = \sum_{i \in H} x_i$; nous disons que la famille (x_i) est sommable si le filtre engendré par les parties $B_H = \{s_K | K \text{ finie, } H \subset K \subset I\}$ (H parcourant la famille des parties finies de I) converge vers un élément s de G . Nous appelons s la somme de la famille $(x_i)_{i \in I}$ et écrivons: $s = \sum_{i \in I} x_i$. Une famille des parties du groupe G ,

⁴⁾ X parcourt la famille des éléments bornés de \mathcal{F} .

$(X_i)_{i \in I}$ est sommable si chaque famille $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ est sommable. La partie:

$X = \{ \sum_{i \in I} x_i \mid (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \}$ est la somme de la famille: $X = \sum_{i \in I} X_i$.

§ 2. Définition de l'intégrale.

Soit E un ensemble non-vide et \mathcal{J} un tribu des parties de E . Pour tout $A \in \mathcal{J}$ désignons par $\Pi(A)$ l'ensemble des partitions dénombrables de A formées avec des ensembles de \mathcal{J} . Pour deux partitions $\pi_1, \pi_2 \in \Pi(A)$ posons $\pi_1 \leq \pi_2$ si tout ensemble appartenant à π_2 est contenu dans un ensemble de π_1 ; « \leq » est une relation d'ordre, pour laquelle $\Pi(A)$ est filtrante à droite.

Considérons un groupe $\mathcal{L}, \{G, \mathcal{C}\}$. Désignons par $\mathfrak{N}_A(G)$ l'ensemble des applications f de \mathcal{J} dans $\mathfrak{S}(G)$ ⁵⁾, tels que:

(j) Pour tout $X \in \mathcal{J}, f(X) \neq \emptyset$.

(jj) Il existe une partition $\pi_f(A) \in \Pi(A)$, telle que, pour tout $\pi \geq \pi_f(A)$, la famille $(f(X))_{X \in \pi}$ soit sommable.

Pour tout $f \in \mathfrak{N}_A(G)$ et $\pi \geq \pi_f(A)$ posons

$$s_f(\pi) = \sum_{X \in \pi} f(X).$$

Pour tout $A \in \mathcal{J}$, désignons par $\mathfrak{F}(A)$ le filtre engendré par les sections à droite de $\Pi(A): \{ \pi \mid \pi \geq \pi_0, \pi \in \Pi(A) \}$ ($\pi_0 \in \Pi(A)$). Enfin, pour tout $\Lambda \in \mathfrak{F}(A)$, posons:

$$\widehat{s}_f(\Lambda) = \bigcup_{\pi \in \Lambda} s_f(\pi).$$

DÉFINITION. La fonction f est intégrable sur A si $f \in \mathfrak{N}_A(G)$ et si le filtre de base $\widehat{s}_f(\mathfrak{F}(A))$ converge vers un élément de G , appelé l'intégrale de la fonction f sur A et noté $\int_A f$.

§ 3. Propriétés de l'intégrale.

1. - Soit $(\{G_i, \mathcal{C}_i\})_{i \in I}$ une famille des groupes $\mathcal{L}, \{G, \mathcal{C}\}$ le groupe \mathcal{L} produit de cette famille et φ un homomorphisme

⁵⁾ Ou $\mathfrak{S}(G)$ signifie l'ensemble des parties du groupe G .

continu de $\{G, \mathcal{C}\}$ dans un groupe \mathcal{L} , $\{G', \mathcal{C}'\}$. Soit, pour tout $\iota \in I$, $f_\iota \in \mathfrak{M}_A(G_\iota)$ et f l'application qui, à chaque $X \in \mathfrak{F}$ associe la partie $\prod_{\iota \in I} f_\iota(X) \in \mathfrak{F}(G)$. Dans ces conditions, si $f \in \mathfrak{M}_A(G)$, $\varphi \circ f \in \mathfrak{M}_A(G')$ ⁶⁾.

THÉORÈME 1. *Si $f \in \mathfrak{M}_A(G)$ et f_ι sont intégrables sur A pour tout $\iota \in I$, $\varphi \circ f$ est intégrable sur A et*

$$\int_A \varphi \circ f = \varphi \left[\left(\int_A f_\iota \right)_{\iota \in I} \right]$$

φ étant continue, il est suffisant de montrer que

(1) $s_{\varphi \circ f}(\pi) = \varphi(s_f(\pi))$

(2) $s_f(\pi) = \prod_{\iota \in I} s_{f_\iota}(\pi)$

quelque soit $\pi \geq \pi_f(A)$. L'égalité (1) est une conséquence des hypothèses faites sur la fonction φ ; quant à (2), remarquons que pour tout $\pi \geq \pi_f(A)$

$$s_f(\pi) = \sum_{X \in \pi} f(X) = \sum_{X \in \pi} \prod_{\iota \in I} f_\iota(X) = \prod_{\iota \in I} \sum_{X \in \pi} f_\iota(X) = \prod_{\iota \in I} s_{f_\iota}(\pi)$$

En choisissant convenablement la fonction φ , on déduit du théorème (1) la proposition suivante: *Si f et g sont intégrables sur A , $f + g$ est intégrable sur A et $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$.*

2. - THÉORÈME 2. *Si f est intégrable sur A et sur B et $A \cap B = \emptyset$, f est intégrable sur $A \cup B$ et*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Le filtre de base $\widehat{s}_f(\mathfrak{F}(A \cup B))$ étant identique au filtre engendré par les parties $\widehat{s}_f(\Gamma) + \widehat{s}_f(\Lambda)$, $\Gamma \in \mathfrak{F}(A)$, $\Lambda \in \mathfrak{F}(B)$, le théorème est une conséquence immédiate de l'axiome (iii).

⁶⁾ Nous désignons toujours par φ l'extension à l'ensemble des parties du produit $\prod_{\iota \in I} G_\iota$.

3. - THÉORÈME 3. *Si le groupe $\{G, \mathcal{C}\}$ est un groupe \mathcal{L} complet et f est intégrable sur A , f est intégrable sur B pour tout $B \subset A$.*

Désignons par \mathcal{F}_B le filtre de base $\widehat{s}_f(\mathcal{F}(B))$ et par $\mathcal{F}_{\mathcal{C}B}$ le filtre de base $\widehat{s}_f(\mathcal{F}(\mathcal{C}B))$. $\mathcal{F}_B + \mathcal{F}_{\mathcal{C}B}$ est identique au filtre de base $\widehat{s}_f(\mathcal{F}(A))$; donc $\mathcal{F}_B + \mathcal{F}_{\mathcal{C}B} \rightarrow \int_A f$. Le filtre $\mathcal{F}_B - \mathcal{F}_B$ est plus fin que $(\mathcal{F}_B + \mathcal{F}_{\mathcal{C}B}) - (\mathcal{F}_B + \mathcal{F}_{\mathcal{C}B})$; il suffit d'observer que pour $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{F}_B$ et $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}B}$: $\Gamma - \Gamma' \subset (\Gamma + \Lambda) - (\Gamma' + \Lambda')$. Il s'ensuit que \mathcal{F}_B est un filtre Cauchy et par suite, $\{G, \mathcal{C}\}$ étant complet, \mathcal{F}_B converge vers un élément de G . Donc f est intégrable sur B .

RÉMARQUE. La démonstration précédente nous montre en même temps que $\int_A f = \int_B f + \int_{\mathcal{C}B} f$, ce qui résulte d'ailleurs aussi du théorème (2).

§ 4. Additivité complète.

Disons qu'une famille de filtres $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est sommable s'il existe une famille sommable $(X_i)_{i \in I}$, où $X_i \in \mathcal{F}_i$ ($i \in I$). Si $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est une famille sommable, l'ensemble des parties $\{\sum_{i \in I} X_i \mid X_i \in \mathcal{F}_i, i \in I\}$ est la base d'un filtre, que nous allons désigner par $\sum_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

Nous disons qu'un groupe \mathcal{L} , $\{G, \mathcal{C}\}$ satisfait à la condition (*) si, pour toute famille sommable $(\mathcal{F}_i)_{i \in N}$ ⁷⁾ des filtres sur G telle que $\mathcal{F}_i \rightarrow a_i$ ($i \in N$) et $\sum_{i \in N} \mathcal{F}_i \rightarrow a$, la famille $(a_i)_{i \in N}$ est sommable et $\sum_{i \in N} a_i = a$.

Nous allons indiquer dans la suite des cas où la condition (*) est remplie. Démontrons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME 4. *Soit $\{G, \mathcal{C}\}$ un groupe \mathcal{L} ayant la propriété (*). Si $(A_i)_{i \in N}$ est une famille dénombrable des parties disjointes de \mathcal{I} et f est une fonction intégrable sur A_i ($i \in N$) et sur*

⁷⁾ N représente l'ensemble des nombres naturels.

$\bigcup_{i \in N} A_i$ ⁸⁾, alors la famille $(\int_{A_i} f)_{i \in N}$ est sommable et

$$\sum_{i \in N} \int_{A_i} f = \int_{\bigcup_{i \in N} A_i} f.$$

Soit \mathcal{F}_i le filtre de base $\widehat{s}_f(\mathcal{F}(A_i))$. La famille $(\mathcal{F}_i)_{i \in N}$ est sommable et a pour somme le filtre de base $\widehat{s}_f(\mathcal{F}(\bigcup_{i \in N} A_i))$. En effet, pour tout $\Lambda \in \mathcal{F}(\bigcup_{i \in N} A_i)$ on peut trouver un $\Lambda' = \bigcirc_{i \in N} \Lambda_i \subset \Lambda$ où $\Lambda_i \in \mathcal{F}(A_i)$ ⁹⁾ et

$$\begin{aligned} \widehat{s}_f(\Lambda) \supset \widehat{s}_f(\Lambda') &= \widehat{s}_f(\bigcirc_{i \in N} \Lambda_i) = \bigcup_{\substack{\pi \in \\ \bigcirc_{i \in N} \Lambda_i}} s_f(\pi) = \bigcup_{\substack{\pi_i \in \Lambda_i \\ i \in N}} s_f(\pi_i) = \\ &= \bigcup_{\pi_i \in \Lambda_i} \sum_{i \in N} s_f(\pi_i) = \sum_{i \in N} \bigcup_{\pi_i \in \Lambda_i} s_f(\pi_i) = \sum_{i \in N} \widehat{s}_f(\Lambda_i). \end{aligned}$$

Il résulte que $(\int_{A_i} f)_{i \in N}$ est sommable et a pour somme $\int_A f$.

§ 5. La condition (*).

La condition (*) est vérifiée dans les deux cas suivants:

a) Soit G un groupe topologique séparé et complet. Supposons que $(\mathcal{F}_i)_{i \in N}$ est sommable et que $\sum_{i \in N} \mathcal{F}_i \rightarrow a$. On voit tout comme dans la démonstration du théorème 3 que chaque \mathcal{F}_i converge vers un $a_i \in G$. Soit V un voisinage symétrique arbitraire de l'élément neutre; on peut construire facilement une famille des voisinages $(W_i)_{i \in N}$, telle que $\sum_{i \in H} W_i \subset V$ pour chaque partie finie $H \subset N$. On peut choisir pour chaque $i \in N$

⁸⁾ Si $\{G, \mathcal{C}\}$ est complet, alors l'intégrabilité de f sur A_i résulte de l'intégrabilité sur $\bigcup_{i \in N} A_i$.

⁹⁾ Nous désignons par $\bigcirc_{i \in N} \Lambda_i$ l'ensemble des partitions $\bigcirc \pi_i$ de $\bigcup_{i \in N} A_i$, où $\pi_i \in \Lambda_i$ et $\bigcirc \pi_i$ est la partition formée de tous les ensembles appartenant à tous les π_i , $i \in N$.

un $X_i \in \mathcal{F}_i$ de sorte que $X_i - a_i \subset W_i$ et $(X_i)_{i \in N}$ soit sommable; on déduit, pour chaque partie finie $H \subset N$:

$$(3) \quad \sum_{i \in H} X_i - \sum_{i \in H} a_i \subset \sum_{i \in H} W_i \subset V.$$

Soient $x_i \in X_i$ ($i \in N$) et H fini, $H \subset N$, tels que $\sum_{i \in K} x_i - \sum_{i \in L} x_i \in V$, quelques soient $K, L \supset H$, parties finies de N . On déduit $\sum_{i \in K} a_i - \sum_{i \in L} a_i \subset V + V + V$; donc $(a_i)_{i \in N}$ est sommable. On peut donc déduire de (3) $\sum_{i \in N} X_i - \sum_{i \in N} a_i \subset \bar{V}$ et par conséquent, $\sum_{i \in N} a_i = a$.

b) Soit G un groupe ordonné, complètement réticulé. Démontrons le lemme suivant:

LEMME. Si $(A_i)_{i \in N}$ est une famille sommable, chaque A_i étant majoré, et si l'ensemble $\sum_{i \in N} A_i$ est majoré, la famille $(\sup A_i)_{i \in N}$ est sommable et

$$\sup_{i \in N} \sum A_i \leq \sum_{i \in N} \sup A_i.$$

En effet, si $a' = \sum_{i \in N} a'_i$, $a'_i \in A_i$, on a pour tout $H \subset N$, H fini:

$$\sup_{a_i \in A_i, i \in H} (\sum_{i \in H} a_i + \sum_{i \in \mathcal{C}H} a'_i) = \sum_{i \in H} \sup A_i + \sum_{i \in \mathcal{C}H} a'_i.$$

Mais $\{ \sum_{i \in H} a_i + \sum_{i \in \mathcal{C}H} a'_i \mid a_i \in A_i \} \subset \sum_{i \in N} A_i$, donc:

$$\sum_{i \in H} \sup A_i \leq \sup_{i \in N} \sum A_i - \sum_{i \in \mathcal{C}H} a'_i$$

$$\sum_{i \in H} \sup A_i \leq \sup_{i \in N} \sum A_i - (a' - \sum_{i \in H} a'_i).$$

donc: $\sum_{i \in H} (\sup A_i - a'_i) \leq \sup_{i \in N} \sum A_i - a'$.

G étant complètement réticulé, il existe $m = \sup_H (\sum_{i \in H} (\sup A_i - a'_i))$. On voit facilement que $m = \sup_K (\inf_{H \supset K} \sum_{i \in H} (\sup A_i - a'_i)) \leq \inf_K (\sup_{H \supset K} \sum_{i \in H} (\sup A_i - a'_i)) \leq m$. Il résulte que la famille $(\sup A_i - a'_i)_{i \in N}$, donc la famille $(\sup A_i)_{i \in N}$, sont sommables.

Supposons, maintenant, que le groupe G satisfait au postulé suivant dû à E. J. Mc Shane [4]:

POSTULÉ. S_1, S_2, \dots étant une famille dénombrable des parties de G dirigées par « \leq » et avec $\inf S_i = 0$ pour $i = 1, 2, \dots$, il est possible de choisir des éléments $g_1, g_2, \dots, g_i \in S_i (i \in N)$ tels que l'ensemble des sommes $g_1 + g_2 + \dots + g_k (k = 1, 2, \dots)$ soit majoré.

Il est facile à voir que ce postulé entraîne la condition suivante: (Δ) Si $(S_i)_{i \in N}$ est une famille dénombrable des parties de G dirigées par « \leq » et avec $\inf S_i = 0 (i \in N)$ et si S est l'ensemble des sommes $\sum_{i \in N} g_i$ des toutes les familles sommables $(g_i)_{i \in N}, g_i \in S_i, S$ est dirigé par « \leq » et $\inf S = 0$.

Nous allons montrer maintenant que dans un groupe G complètement réticulé satisfaisant à (Δ), la condition (*) est aussi remplie. Supposons que $(\mathcal{F}_i)_{i \in N}$ est sommable et que $\mathcal{F} = \sum_{i \in N} \mathcal{F}_i \rightarrow a$. D'après § 1, 3, c), chaque \mathcal{F}_i converge vers un $a_i \in G$. Cela signifie

$$(4) \quad \sup_{X_i \in \mathcal{F}_i} (\inf X_i) = \inf_{X_i \in \mathcal{F}_i} (\sup X_i) = a_i \quad (i \in N)$$

$$(5) \quad \sup_{X \in \mathcal{F}} (\inf X) = \inf_{X \in \mathcal{F}} (\sup X) = a$$

Soit $X \in \mathcal{F}$ et majoré. On peut trouver des $X'_i \in \mathcal{F}_i (i \in N)$ tels que $\sum_{i \in N} X'_i \subset X$. Il s'ensuit que $\sup_{i \in N} \sum_{i \in N} X'_i$ existe.

(4) entraîne la relation: $\inf_{X_i \in \mathcal{F}_i} (\sup X_i - a_i) = 0$ et, par conséquent, la famille

$$S_i = \{ \sup X_i - a_i \mid X_i \in \mathcal{F}_i \} \quad (i \in N)$$

satisfait aux hypothèses de (Δ). On déduit qu'il existe au moins une famille sommable: $(\sup X'_i - a_i)_{i \in N}$. Choisissons pour chaque $i \in N$ un $X_i \in \mathcal{F}_i$ tel que: $X_i \subset X'_i \cap X''_i$. La famille $(\sup X_i - a_i)_{i \in N}$ est donc sommable et, en outre, l'ensemble $\sum_{i \in N} X_i$ est majoré; en appliquant le lemme, on déduit que la famille $(\sup X_i)_{i \in N}$ est sommable. Il résulte que la famille $(a_i)_{i \in N}$ est sommable.

Mais (Δ) permet aussi d'inférer que $\inf S = 0$, ou S est l'ensemble des sommes des toutes les familles sommables de la forme $(\sup X_i - a_i)_{i \in N}$, $X_i \in \mathcal{F}_i$. On a: $\inf S = \inf (\sum_{X_i} \sup_{i \in N} X_i) - \sum_{i \in N} a_i$ et, par suite:

$$\sum_{i \in N} a_i = \inf_{X_i} (\sum_{i \in N} \sup X_i) \geq \inf_{X_i} (\sup \sum_{i \in N} X_i) \geq \inf_{X \in \mathcal{F}} (\sup X) = a.$$

Or, la condition (Δ) implique sa duale, de sorte qu'on peut déduire aussi $\sum_{i \in N} a_i \leq a$. q. e. d.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI: *Intégration*, Act. scientifiques et ind. Hermann, Paris 1952, p. 28.
- [2] G. CHOQUET: Annales de l'Univ. de Grenoble, tome XXIII, 1948, pp. 57-112.
- [3] C. T. IONESCU TULCEA: Studii si cercetari matematice, tome V, no. 1-2, 1954, pp. 73-142.
- [4] E. J. MCSHANE: *Order-preserving maps and integration processes*, Princeton Univ. press 1953, p. 55.
- [5] C. E. RICKART: Trans. Amer. Math. Soc., 1942, tome LII, pp. 498-521.