RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO VOLPATO

Sul problema di Cauchy per equazioni differenziali quasi lineari alle derivate parziali del primo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 28 (1958), p. 244-262

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__244_0>

SUL PROBLEMA DI CAUCHY PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI QUASI LINEARI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL PRIMO ORDINE

Memoria (*) *di* MARIO VOLPATO (*a Ferrara*)

In questa Memoria proseguo lo studio, già iniziato altrove [1]), del problema di Cauchy per alcuni tipi di equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine.

Precisamente, mi occupo del problema di Cauchy per l'equazione quasi lineare

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{1}^{n}{}_{r} f_r(x, y_1, \ldots, y_n, z, \lambda) \frac{\partial z}{\partial y_r} = f_{n+1}(x, y_1, \ldots, y_n, z, \lambda),$$

nella quale l'incognita z verrà considerata, anche stavolta, come funzione delle variabili indipendenti $x, y_1, \ldots, y_n$, del parametro λ, e dell'ascissa ξ che individua il piano portante i dati iniziali.

(*) Pervenuta in Redazione il 2 luglio 1958.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Ferrara.

1) M. VOLPATO, *Sul problema di Cauchy per una equazione lineare alle derivate parziali del primo ordine*, questa rivista, questo volume, pp. 153-187. Questa Memoria verrà ricordata in seguito con la sigla $\mathfrak{M}_2$. Per altri lavori sull'argomento si vegga M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, *Sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione* $p = f(x, y, z, q)$, Ann. di Mat. pura e applic., vol. XXXII, (1951), pp. 121-155; *Ancora sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione* $p = f(x, y, z, q)$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. VI, (1952), pp. 187-243; M. CINQUINI CIBRARIO, *Nuovi teoremi di esistenza e di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. IX, (1955), pp. 65-113. L'ampia bibliografia riportata in questi lavori ci esonera dal fare qui altre citazioni.

Indico per questo problema delle condizioni sufficienti affinchè esista una ed una sola soluzione appartenente alla

CLASSE A

formata dalle funzioni $z(x, y_1, \ldots, y_n, \xi, \lambda)$ *che risultano lipschitziane rispetto ad* $y_1, \ldots, y_n, \lambda$, *continue in* $S'_*: a \leq x, \xi \leq b$, $-\infty < y_1, \ldots, y_n, \lambda < +\infty$ *assolutamente continue rispetto ad* x *e rispetto a* ξ, *le derivate parziali* z'_x *e* z'_ξ *riuscendo sommabili in* S'_* *; che soddisfanno l'equazione differenziale in quasi tutti i punti di* S'_* *e che si identificano col dato iniziale per* $x = \xi$.

L'esistenza di una siffatta soluzione è ricondotta alla ricerca di elementi uniti di una trasformazione funzionale, ricerca che è necessariamente sottile per la generalità delle ipotesi in cui il problema è studiato.

Per quanto riguarda i coefficienti ed il termine noto dell'equazione (I), queste ipotesi si riducono, sostanzialmente, ad una sola condizione del tipo Lipschitz Carathéodory rispetto alle variabili $y_1, \ldots, y_n, z, \lambda$. Se i coefficienti ed il termine noto fossero, in modulo, minori di una funzione sommabile della sola x e se si prescindesse dall'assoluta continuità della z rispetto a ξ, la soluzione del problema attuale, attesi i miei precedenti risultati, sarebbe quasi immediata.

In un prossimo lavoro studierò il problema di Cauchy per equazioni non lineari.

1. - Per il problema di Cauchy relativo all'equazione (I) stabiliamo il seguente

TEOREMA. - *Le funzioni* $f_i(x, u_1, \ldots, u_n, z, \lambda)$, $(i = 1, \ldots, n+1)$, *definite nello strato*

$$S: a \leq x \leq b\,; \quad -\infty < u_1, \ldots, u_n, z, \lambda < +\infty,$$

siano sommabili rispetto ad x *sulle sezioni di* S *con le parallele all'asse* x, *e su quasi tutte le sezioni di* S *coi piani* $x = \text{cost.}$ *soddisfacciano le*

$$(1) \qquad |f_i(x, u_1, \ldots, u_n, z, \lambda) - f_i(x, U_1, \ldots, U_n, Z, \Lambda)| \leq$$
$$\leq P_i(x) \left\{ \sum_1^n{}_r |u_r - U_r| + |z - Z| + |\lambda - \Lambda| \right\}, \quad (i = 1, \ldots, n+1),$$

qualunque siano le $(n+2)$*-uple* $(u_1, \dots, u_n, z, \lambda)$, $U_1, \dots, U_n, Z, \Lambda)$, *con* $P_i(x)$, $(i = 1, \dots, n+1)$, *funzioni non negative e sommabili in* $I_x = a \leq x \leq b$ [2]).

Inoltre sia $\Phi(u_1, \dots, u_n, \lambda)$ *una funzione, soddisfacente la disuguaglianza*

$$(2) \qquad |\Phi(u_1, \dots, u_n, \lambda) - \Phi(U_1, \dots, U_n, \Lambda)| \leq \leq h \left\{ \sum_1^n{}_r |u_r - U_r| + |\lambda - \Lambda| \right\},$$

qualunque siano le $(n+1)$*-uple* $(u_1, \dots, u_n, \lambda)$, $(U_1, \dots, U_n, \Lambda)$, h *essendo una costante non negativa per la quale risulta*

$$(3) \qquad 3(h+1) \int_a^b \left(\sum_1^{n+1}{}_i P_i(t) \right) dt < 1.$$

In queste condizioni il problema

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} + \sum_1^n{}_r f_r(x, y_1, \dots, y_n, z, \lambda) \dfrac{\partial z}{\partial y_r} = f_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n, z, \lambda) \\ z(\xi, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = \Phi(y_1, \dots, y_n, \lambda), \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ *appartenente alla classe* A. *La funzione* $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$, *che ha per dominio l'insieme* $S'_* : a \leq x, \xi \leq b, -\infty < y_1, \dots, y_n, \lambda < +\infty$, *soddisfa inoltre il sistema formato dalle* $(n+1)$ *equazioni*

$$(5) \qquad z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = \Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots$$
$$\dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \lambda) + \int_\xi^x f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots$$
$$\dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), z(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots$$
$$\dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \xi, \lambda), \lambda) dt,$$

---

[2]) Ricordo che in tutto il corso del lavoro la misura e l'integrazione vanno sempre intese nel senso di LEBESGUE. E faccio rilevare che le (1) implicano la sommabilità delle funzioni f_i su tutte le sezioni di S con le parallele all'asse x, non appena le f_i siano sommabili su una di quelle sezioni e misurabili sulle altre.

$$(6)\quad \psi_i(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = y_i + \int_x^t f_i(\tau, \psi_i(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots$$
$$\dots, \psi_n(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), z(\tau, \psi_1(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots$$
$$\dots, \psi_n(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \xi, \lambda), \lambda) d\tau,$$

in ogni punto di S'_*.

OSSERVAZIONE. - Qualora si prescindesse dall'assoluta continuità di z rispetto a ξ, la (3) può essere sostituita con la

$$(3 \text{ bis})\qquad (h+1)\int_a^b \left(\sum_1^{n+1}{}_i P_i(t)\right) dt < 1.$$

2. - Siano:

$\theta(\xi, x)$ una funzione non negativa, continua nel quadrato $a \leq x, \xi \leq b$, e assolutamente continua rispetto alle singole variabili;

$\mu(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ una funzione, che per brevità indicheremo con $\mu(\tau)$, non negativa, definita nell'insieme

$$a \leq \tau, x, \xi \leq b; \quad -\infty < y_1, \dots, y_n, \lambda < +\infty,$$

sommabile rispetto a τ, continua rispetto a $(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ e maggiorabile, in ogni porzione limitata del suo dominio, da una funzione della sola variabile τ, sommabile nell'intervallo (a, b);

$\bar{z}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ una funzione continua in

$$S'_* : a \leq x, \xi \leq b; \quad -\infty < y_1, \dots, y_n, \lambda < +\infty,$$

e soddisfacente, per ogni coppia di punti $(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$, $(x, Y_1, \dots, Y_n, \Xi, \Lambda)$ *di* S'_* *la disuguaglianza*

$$(7)\quad |\bar{z}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - \bar{z}(x, Y_1, \dots, Y_n, \Xi, \Lambda)| \leq$$
$$\leq \theta(\xi, x)\left\{\sum_1^n{}_r |y_r - Y_r| + |\lambda - \Lambda|\right\} +$$
$$+ (1 + \theta(\xi, x))\left|\int_\xi^\Xi \mu(\tau) d\tau\right|.$$

Ciò posto, le funzioni

$$f_i(t, u_1, \dots, u_n, \bar{z}(t, u_1, \dots, u_n, \xi, \lambda), \lambda), \quad (i = 1, \dots, n+1), \tag{8}$$

definite nell'insieme

$$S_\xi : a \leq t,\ \xi \leq b\,; \quad -\infty < u_1, \dots, u_n, \lambda < +\infty.$$

risultano sommabili sulle sezioni di S_ξ con le parallele all'asse t [3]), mentre su quasi tutte le sezioni di S_ξ coi piani $t = \text{cost.}$ esse soddisfanno le

$$\begin{aligned} &| f_i(t, u_1, \dots, u_n, \bar{z}(t, u_1, \dots, u_n, \xi, \lambda), \lambda) - \\ &\quad - f_i(t, U_1, \dots, U_n, \bar{z}(t, U_1, \dots, U_n, \Xi, \Lambda), \Lambda) | \leq \\ &\leq P_i(t)(1 + \theta(\xi, t)) \left\{ \sum_1^n{}_r | u_r - U_r | + \left| \int_\xi^\Xi \mu(\tau) d\tau \right| + | \lambda - \Lambda | \right\}, \\ &\qquad\qquad (i = 1, \dots, n+1), \end{aligned} \tag{9}$$

qualunque siano le $(n+2)$-uple $(u_1, \dots, u_n, \xi, \lambda)$, $(U_1, \dots, U_n, \Xi, \Lambda)$.

Ebbene, a norma del teorema 2 di M_2, il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} + \sum_1^n{}_r f_r(x, y_1, \dots, y_n, \bar{z}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \lambda) \dfrac{\partial z}{\partial y_r} = \\ \qquad = f_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n, \bar{z}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \lambda), \\ z(\xi, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = \Phi(y_1, \dots, y_n, \lambda), \end{cases} \tag{10}$$

ammette allora una ed una sola soluzione che appartenga alla classe A [4]) e questa soluzione è data dalla formula

---

[3]) Basta osservare che le (1) porgono

$$\begin{aligned} &| f_i(t, u_1, \dots, u_n, \bar{z}(t, u_1, \dots, u_n, \xi, \lambda), \lambda) | \leq \\ &\leq P_i(t) | \bar{z}(t, u_1, \dots, u_n, \xi, \lambda) - z | + | f_i(t, u_1, \dots, u_n, z, \lambda) |, \end{aligned}$$

e che le (8) sono certamente misurabili rispetto a t.

[4]) La presenza, nel secondo membro della (9), del fattore $(1 + \theta(\xi, t))$ e il fatto che $\mu(\tau)$ dipenda, stavolta, anche da $(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ non infirma l'applicabilità del teorema 2 di $\mathfrak{M}_2$ al caso del problema (10), visto che quel fattore è limitato e che $\mu(\tau)$, in ogni porzione chiusa e limitata di S'_*, ammette una maggiorante, nella sola variabile

$$(11)\qquad z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = \Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots$$

$$\dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \lambda) + \int_\xi^x f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots$$

$$\dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \bar{z}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots$$

$$\dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \xi, \lambda), \lambda)dt,$$

ove le $\psi_i(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ soddisfanno alle

$$(12)\qquad \psi_i(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = y_i +$$

$$+ \int_x^t f_i(\tau, \psi_1(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, \psi_n(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots$$

$$\dots, \bar{z}(\tau, \psi_1(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, \psi_n(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \xi, \lambda), \lambda)dt.$$

Precisamente, se

$$u_1^*, \dots, u_n^*, \xi^*, \lambda^*$$

è una $(n + 2)$-upla fissata una volta per tutte, e se

$$(13)\qquad \gamma(\xi, t) = (1 + \theta(\xi, t)) \sum_1^{n+1}{}_i P_i(t) = (1 + \theta(\xi, t))\gamma(t)$$

$$(14)\qquad \delta(\xi, t) = \gamma(\xi, t) \left\{ \sum_1^n{}_r |u_r - u_r^*| + \left| \int_\xi^{\xi^*} \mu(\tau)d\tau \right| + |\lambda - \lambda^*| \right\} +$$

$$+ \sum_1^{n+1}{}_i |f_i(t, u_1^*, \dots, u_n^*, \bar{z}(t, u_1^*, \dots, u_n^*, \xi^*, \lambda^*), \lambda^*|,$$

$$(15)\qquad \bar{\Gamma}(t, x) = e^{\left|\int_t^x \gamma(\xi, \tau)d\tau\right|},$$

τ, sommabile in (a, b). Ed è chiaro che l'equazione differenziale menzionata nella definizione delle funzioni di classe A, data nell'introduzione di questo lavoro, è stavolta l'equazione differenziale del problema (10).

$$(16)\qquad N\left(t,\ x,\ u_1 - u_1^*, \dots,\ u_n - u_n^*,\ \left|\int_\xi^{\xi^*} \mu(\tau)d\tau\right|,\ \lambda - \lambda^*\right) =$$

$$= \begin{cases} e^{\int_t^x \gamma(\xi,\ \tau)d\tau} \displaystyle\int_t^x \delta(\xi,\ \tau)e^{-\int_\tau^x \gamma(\xi,\ \omega)d\omega} d\tau, & \text{per} \quad a \leq t \leq x, \\[2ex] e^{\int_x^t \gamma(\xi,\ \tau)d\tau} \displaystyle\int_x^t \delta(\xi,\ \tau)e^{-\int_x^\tau \gamma(\xi,\ \omega)d\omega} d\tau, & \text{per} \quad x \leq t \leq b, \end{cases}$$

$$(17)\qquad M\left(t,\ x,\ u_1 - u_1^*, \dots,\ u_n - u_n^*,\ \left|\int_\xi^{\xi^*} \mu(\tau)d\tau\right|,\ \lambda - \lambda^*\right) =$$

$$= \begin{cases} \gamma(\xi,\ t)e^{\int_t^x \gamma(\xi,\ \tau)\ \tau} \displaystyle\int_t^x \delta(\xi,\ \tau)e^{-\int_\tau^x \gamma(\xi,\ \omega)d\omega} d\tau + \delta(\xi,\ t) & \text{per} \quad a \leq t \leq x, \\[2ex] \gamma(\xi,\ t)e^{\int_x^t \gamma(\xi,\ \tau)d\tau} \displaystyle\int_x^t \delta(\xi,\ \tau)e^{-\int_x^\tau \gamma(\xi,\ \omega)d\omega} d\tau + \delta(\xi,\ t) & \text{per} \quad x \leq t \leq b, \end{cases}$$

$$(18)\qquad \overline{M}\left(t,\ u_1 - u_1^*, \dots,\ u_n - u_n^*,\ \left|\int_\xi^{\xi^*} \mu(\tau)d\tau\right|,\ \lambda - \lambda^*\right) =$$

$$= \gamma(\xi,\ t)e^{\int_a^b \gamma(\xi,\ \tau)d\tau} \int_a^b \delta(\xi,\ \tau)d\tau + \delta(\xi,\ t),$$

di guisa che

$$(19)\qquad N\left(t,\ x,\ u_1 - u_1^*, \dots,\ u_n - u_n^*,\ \left|\int_\xi^{\xi^*} \mu(\tau)d\tau\right|,\ \lambda - \lambda^*\right) =$$

$$= \left|\int_t^x M\left(\tau,\ x,\ u_1 - u_1^*, \dots,\ u_n - u_n^*,\ \left|\int_\xi^{\xi^*} \mu(\tau)d\tau\right|,\ \lambda - \lambda^*\right)d\tau\right|,$$

e per

$$(20) \qquad |u_1 - u_1^*| \leq p, \ \dots, \ |u_n - u_n^*| \leq p, \ |\lambda - \lambda^*| \leq p,$$

$$(21) \qquad 0 \leq M\left(t, x, u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \xi, \left|\int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau)d\tau\right|, \lambda - \lambda^*\right) \leq$$

$$\leq M\left(t, p, \dots, p, \int_a^b \mu(\tau)d\tau, p\right),$$

la funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ data dalla (11), soddisfa le disuguaglianze

$$(22) \qquad |z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - \Phi(y_1, \dots, y_n, \lambda)| \leq$$

$$\leq (h+1)N\left(\xi, x, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \left|\int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau)d\tau\right|, \lambda - \lambda^*\right),$$

$$(23) \qquad |z(x', y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - z(x'', y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)| \leq$$

$$\leq (h+1)\overline{\Gamma}(\xi, x')\left|\int_{x'}^{x''} M\left(t, x'', y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \left|\int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau)d\tau\right|, \lambda - \lambda^*\right)dt\right|,$$

$$(24) \qquad |z(x, y_1, \dots, y_j', \dots, y_n, \lambda) - z(x, y_1, \dots, y_j'', \dots, y_n, \lambda)| \leq$$

$$\leq ((h+1)\overline{\Gamma}(\xi, x) - 1)\,|y_j' - y_j''|, \qquad (j = 1, \dots, n),$$

$$(25) \qquad |z(x, y_1, \dots, y_n, \xi', \lambda) - z(x, y_1, \dots, \xi'', y_n, \lambda)| \leq$$

$$\leq (h+1)\left|\int_{\xi'}^{\xi''} M\left(t, x, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \left|\int_{\xi''}^{\xi^*} \mu(\tau)d\tau\right|, \lambda - \lambda^*\right)dt\right| +$$

$$+ ((h+1)\overline{\Gamma}(\xi, x) - 1)\left|\int_{\xi'}^{\xi''} \mu(\tau)d\tau\right|,$$

$$(26) \qquad |z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda') - z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda'')| \leq$$

$$\leq ((h+1)\overline{\Gamma}(\xi, x) - 1)\,|\lambda' - \lambda''|,$$

mentre la somma delle funzioni (8) soddisfa le

$$(27)\qquad \sum_1^n{}_i \left| f_i(t, y_1, \dots, y_n, \bar{z}(t, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \lambda) \right| \leq$$

$$\leq M\left(t, x, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \left| \int_\xi^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau \right|, \lambda - \lambda^*\right),$$

in quasi tutto l'insieme: $a \leq x, t, \xi \leq b$; $-\infty < y_1, \dots, y_n$, $\lambda < +\infty$.

3. - Proviamo ora che le funzioni $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ sono equicontinue ed equilimitate in ogni regione limitata di $\bar{S}'_*$ se $\bar{z}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ è astretta alla condizione ulteriore

$$(28)\qquad |\bar{z}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - \Phi(y_1, \dots, y_n, \lambda)| \leq R(\xi, x),$$

$R(t, x)$ essendo una funzione non negativa, continua nel quadrato $a \leq t, x \leq b$, assolutamente continua rispetto alle singole variabili ed eventualmente dipendente, con continuità, anche dalle variabili $\xi, y_1, \dots, y_n, \lambda$.

Infatti, allora sussiste la disuguaglianza

$$(29)\qquad \sum_1^{n+1}{}_i \left| f_i(t, u_1^*, \dots, u_n^*, \bar{z}(t, u_1^*, \dots, u_n^*, \xi^*, \lambda^*), \lambda^*) \right| \leq$$

$$\leq \gamma(\xi, t) R(\xi^*, t) + \sum_1^{n+1}{}_i \left| f_i(t, u_1^*, \dots, u_n^*, \Phi(u_1^*, \dots, u_n^*, \lambda^*), \lambda^*) \right|.$$

Pertanto sussistono *a fortiori* le (22), (23), (24), (25), (26) qualora in esse si supponga $\delta(\xi, t)$ data dalla

$$(30)\qquad \delta(\xi, t) = \gamma(\xi, t) \left\{ \sum_1^n{}_r |u_r - u_r^*| + \right.$$

$$\left. + \left| \int_\xi^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau \right| + |\lambda - \lambda^*| + R(\xi^*, t) \right\} +$$

$$+ \sum_1^{n+1}{}_i \left| f_i(t, u_1^*, \dots, u_n^*, \Phi(u_1^*, \dots, u_n^*, \lambda^*), \lambda^*) \right|,$$

anzichè dalla (14). Donde la conclusione.

Avvertiamo che d'ora in avanti $\delta(\xi, t)$ sarà per noi data dalla (30) e modificate di conseguenza saranno le definizioni di $N\left(t, x, u_1 - n_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \left|\int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau\right|, \lambda - \lambda^*\right)$ e di

$$M\left(t, x, u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \left|\int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau\right|, \lambda - \lambda^*\right).$$

4. - Ebbene, indichiamo con T la trasformazione funzionale che alla $\bar{z}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ associa la funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$, con Σ_0 l'insieme delle funzioni $\bar{z}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ continue in S'_* e soddisfacenti la (7) e la (28), e dimostriamo che è possibile scegliere le funzioni $\theta(\xi, x)$, $\mu(\tau)$, $R(t, x)$, assoggettate finora a sole condizioni di carattere qualitativo, in maniera tale che la trasformazione T converta Σ_0 in una porzione di Σ_0. A questo scopo basta provare che il sistema formato dalle tre equazioni

$$\theta(\xi, x) = (h + 1)\bar{\Gamma}(\xi, x) - 1, \tag{31}$$

$$(1 + \theta(\xi', x))\left|\int_{\xi'}^{\xi''} \mu(\tau) d\tau\right| = (h + 1)(\bar{\Gamma}(\xi', x) - 1)\left|\int_{\xi'}^{\xi''} \mu(\tau) d\tau\right| + \tag{32}$$

$$+ (h + 1)\left|\int_{\xi'}^{\xi''} M\left(t, x, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \left|\int_{\xi''}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau\right|, \lambda - \lambda^*\right) dt\right|.$$

$$N\left(t, x, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \left|\int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau\right|, \lambda - \lambda^*\right) = R(t, x), \tag{33}$$

nelle incognite $\theta(\xi, x)$, $\mu(\tau)$, $R(t, x)$ ha soluzioni. È quello che ora faremo.

Anzitutto osserviamo che la (31), attese la (13) e la (15), diventa

$$1 + \theta(\xi, x) = (h + 1) e^{\left|\int_{\xi}^{x} (1 + \theta(\xi, t))\gamma(t) dt\right|}, \tag{34}$$

e questa, che si riconduce ad un'equazione differenziale di Riccati, è soddisfatta da

$$(35)\qquad \theta(\xi, x) = \frac{h + (h+1)\left|\int_\xi^x \gamma(t)dt\right|}{1 - (h+1)\left|\int_\xi^x \gamma(t)dt\right|},$$

che, attesa la (3), è appunto positiva e continua nel quadrato $a \leq x, \xi \leq b$ e assolutamente continua rispetto alle singole variabili.

Occupiamoci ora del sistema formato dalle (32) e (33).

La (32), attesa la (31), diventa

$$(36)\qquad \left|\int_{\xi'}^{\xi''} \mu(\tau)d\tau\right| =$$

$$= \left|\int_{\xi'}^{\xi''} M\left(t,\ x,\ y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*,\ \left|\int_{\xi''}^{\xi^*} \mu(\tau)d\tau\right|.\ \lambda - \lambda^*\right)dt\right|,$$

e questa è soddisfatta, se per quasi tutti i valori di t dell'intervallo (a, b) e per ogni ξ dello stesso intervallo sussiste la

$$(37)\qquad \mu(t) = M\left(t,\ x,\ y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*,\ \left|\int_\xi^{\xi^*} \mu(t)dt\right|,\ \lambda - \lambda_*\right).$$

Ora, osservato che sussiste l'identità

$$(38)\qquad e^{\left|\int_t^x \gamma(\xi,\tau)d\tau\right|}\left|\int_t^x \gamma(\xi, \tau)e^{-\left|\int_\tau^x \gamma(\xi,\omega)d\omega\right|}d\tau\right| =$$

$$= \left|\int^x \gamma(\xi, \tau)e^{\left|\int_t^\tau \gamma(\xi,\omega)d\omega\right|}d\tau\right| = e^{\left|\int_t^x \gamma(\xi,\omega)d\omega\right|} - 1,$$

e posto

$$(39)\qquad p(t,\,x)=\left(e^{\left|\int_t^x \gamma(\xi,\,\tau)d\tau\right|}-1\right)\left(\sum_{r=1}^{n}|\,y_r-u_r^*\,|+|\,\lambda-\lambda^*\,|\right)+$$

$$+\left|\int_t^x \sum_{i=1}^{n+1}|\,f_i(\tau,\,u_1^*,\dots,\,u_n^*,\,\Phi(u_1^*,\dots,\,u_n^*,\,\lambda^*),\,\lambda^*)\,|\,e^{\left|\int_t^\tau \gamma(\xi,\,\omega)d\omega\right|}d\tau\right|,$$

$$(40)\qquad q(t,\,x)=\left(e^{\left|\int_t^x \gamma(\xi,\,\tau)d\tau\right|}-1\right)\left|\int_\xi^{\xi^*}\mu(\tau)d\tau\right|,$$

$$(41)\qquad Q(t,\,x)=p(t,\,x)+q(t,\,x).$$

il sistema formato dalle equazioni (37) e (33) si muta in quello formato dalle

$$(42)\qquad \mu(t)=\gamma(\xi,\,t)p(t,\,x)+\gamma(\xi,\,t)q(t,\,x)+\delta(\xi,\,t)+$$

$$+\gamma(\xi,\,t)\left|\int_t^x \gamma(\xi,\,\tau)R(\xi^*,\,\tau)\,e^{\left|\int_t^\tau \gamma(\xi,\,\omega)d\omega\right|}d\tau\right|,$$

$$(43)\qquad Q(t,\,x)+\left|\int_t^x \gamma(\xi,\,\tau)R(\xi^*,\,\tau)e^{\left|\int_t^\tau \gamma(\xi,\,\omega)d\omega\right|}d\tau\right|=R(t,\,x),$$

attesa la (16) e la (30). È appena il caso di osservare che, a norma della (35), la funzione $p(t,\,x)$, data dalla (39), è nota.

Ora la (43), dato che ξ^* appartiene all'intervallo $(a,\,b)$, implica la

$$(44)\qquad Q(\xi^*,\,x)+\left|\int_{\xi^*}^x \gamma(\xi,\,\tau)R(\xi^*,\,\tau)e^{\left|\int_{\xi^*}^\tau \gamma(\xi,\,\omega)d\omega\right|}d\tau=R(\xi^*,\,x)\,\right|,$$

e questa, per l'incognita $R(\xi^*, x)$, porge

$$(45) \qquad R(\xi^*, x) = \left| \int_{\xi^*}^{x} Q'_x(\xi^*, \tau) e^{\left|\int_{\tau}^{x} \gamma(\xi, \omega) e^{\left|\int_{\xi^*}^{\omega} \gamma(\xi, w) dw\right|} d\omega\right|} d\tau \right| .$$

Il fattore $Q'_x(\xi^*, \tau)$ che figura nel secondo membro della (45), può essere espresso, attese le (41), (40), (39), come somma di due addendi, il primo dei quali è una funzione nota, mentre il secondo contiene come fattore l'incognita $\left|\int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau\right|$. Effettuando questo calcolo, si trova per $R(\xi^*, x)$ l'espressione

$$(46) \quad R(\xi^*, x) = Q^*(x) + \left(e^{\left|\int_{\xi^*}^{x} \gamma(\xi, \omega) e^{\left|\int_{\xi^*}^{\omega} \gamma(\xi, w) dw\right|} d\omega\right|} - 1\right) \left|\int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau\right| ,$$

ove $Q^*(x)$ è una funzione assolutamente continua nota della quale, per brevità, omettiamo l'espressione.

La (46) e la (30) porgono allora

$$(47) \quad \delta(\xi, t) = \delta^*(t, u_1, \dots, u_n, \xi, \lambda) + \gamma(\xi, t) \left|\int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau\right| +$$

$$+ \gamma(\xi, t) \left(e^{\left|\int_{\xi^*}^{x} \gamma(\xi, \omega) e^{\left|\int_{\xi^*}^{\omega} \gamma(\xi, w) dw\right|} d\omega\right|} - 1\right) \left|\int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau\right| ,$$

$\delta^*(t, u_1, \dots, u_n, \xi, \lambda)$ essendo una funzione nota, sommabile rispetto a t nell'intervallo (a, b), assolutamente continua rispetto a ξ e continua rispetto a $(u_1, \dots, u_n, \xi, \lambda)$.

Attese le (46) e (47), la (42) si trasforma nella

$$(48) \quad \mu(t) = \mu^*(t, x, \xi, u_1, \dots, u_n, \lambda) + m(t, \xi, x) \left|\int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau\right| ,$$

ove $\mu^*(t, x, \xi, u_1, \dots, u_n, \lambda)$ è una funzione nota, sommabile rispetto a t nell'intervallo (a, b), continua rispetto a $(x, \xi, u_1, \dots, u_n, \lambda)$, assolutamente continua rispetto ad x e rispetto a ξ, ed $m(t, \xi, x)$ è pure una funzione nota, data dalla

$$m(t, \xi, x) = \gamma(\xi, t) e^{\left|\int_t^x \gamma(\xi, \omega) d\omega\right|} + \tag{49}$$

$$+ \gamma(\xi, t) \left(e^{\left|\int_{\xi^*}^t \gamma(\xi, \omega) e^{\left|\int_{\xi^*}^{\omega} \gamma(\xi, w) dw\right|} d\omega\right|} - 1\right) +$$

$$+ \gamma(\xi, t) \left| \int_t^x \gamma(\xi, \tau) e^{\left|\int_t^{\tau} \gamma(\xi, \omega) d\omega\right|} \left(e^{\left|\int_{\xi^*}^{\tau} \gamma(\xi, \omega) e^{\left|\int_{\xi^*}^{\omega} \gamma(\xi, w) dw\right|} d\omega\right|} - 1\right) d\tau \right| .$$

La (48), per ogni fissata $(n + 3)$-upla $(x, \xi, u_1, \dots, u_n, \lambda)$, è una equazione integrale di seconda specie di Fredholm, nell'incognita $\mu(t)$, avente per nucleo, evidentemente elementare, la funzione non negativa $m(t, \xi, x)$. Notoriamente, la (48) avrà una ed una sola soluzione se esiste una $m^*(t, \xi, x)$ soddisfacente le

$$m(t, \xi, x) \leq m^*(t, \xi, x), \tag{50}$$

$$\left| \int_{\xi}^{\xi^*} m(\tau, \xi, x) d\tau \right| < 1 . \tag{51}$$

Noi ora proveremo l'esistenza di una siffatta $m^*(t, \xi, x)$. A tale scopo osserviamo che la (35), la (13) e la (3) porgono le

$$\gamma(\xi, \omega) = \frac{(h + 1)\gamma(\omega)}{1 - (h + 1)\left|\int_{\xi}^{\omega} \gamma(\tau) d\tau\right|}, \tag{52}$$

$$(53)\qquad e^{\left|\int_{\xi^*}^{\omega}(\xi,\, w)dw\right|} = \frac{1-(h+1)\left|\int_{\xi}^{\xi^*}\gamma(\tau)d\tau\right|}{1-(h+1)\left|\int_{\xi}^{\omega}\gamma(\tau)d\tau\right|},$$

$$(54)\qquad \left|\int_{\xi^*}^{t}\gamma(\xi,\,\omega)\, e^{\left|\int_{\xi^*}^{\omega}\gamma(\xi,\, w)dw\right|} d\omega\right| = \frac{(h+1)\left|\int_{\xi^*}^{t}\gamma(\tau)d\tau\right|}{1-(h+1)\left|\int_{\xi}^{t}\gamma(\tau)d\tau\right|} \leq$$

$$\leq \frac{(h+1)\int_{a}^{b}\gamma(\tau)d\tau}{1-(h-1)\int_{a}^{b}\gamma(\tau)d\tau} < \frac{1}{2} < \log 2.$$

Quest'ultima implica la

$$(55)\qquad e^{\left|\int_{\xi^*}\gamma(\xi,\,\omega)\, e^{\left|\int_{\xi^*}^{\omega}\gamma(\xi,\, w)dw\right|} d\omega\right|} - 1 < 1.$$

E allora, visto che

$$(56)\qquad \gamma(\xi,\, t)\left|\int_{t}^{x}\gamma(\xi,\,\tau)\, e^{\left|\int_{t}^{\tau}\gamma(\xi,\,\omega)d\omega\right|} d\tau\right| = \gamma(\xi,\, t)\left(e^{\left|\int_{t}^{x}\gamma(\xi,\,\omega)d\omega\right|} - 1\right),$$

la funzione $m^*(t,\, \xi,\, x)$ definita dalla

$$(57)\qquad m^*(t,\, \xi,\, x) = 2\gamma(\xi,\, t)\, e^{\left|\int_{t}^{x}\gamma(\xi,\,\omega)d\omega\right|} = \frac{(h+1)\gamma(t)}{1-(h+1)\left|\int_{\xi}^{x}\gamma(\tau)d\tau\right|},$$

soddisfa certamente alla (50). Non solo, ma soddisfa pure alla (51) a norma della

$$\left|\int_{\xi}^{\xi^*} m^*(\tau, \xi, x)d\tau\right| = \frac{(h+1)\left|\int_{\xi}^{\xi^*}\gamma(\tau)d\tau\right|}{1-(h+1)\left|\int_{\xi}^{x}\gamma(\tau)d\tau\right|}, \tag{58}$$

e della (3). Pertanto la (48) individua in maniera univoca la $\mu(t)$ soddisfacente a tutte le proprietà che abbiamo presupposto. Tramite la (46) resta determinata la $R(\xi^*, x)$ e di conseguenza, tramite la (43), resta determinata la $R(t, x)$.

5. - D'ora in avanti noi intenderemo che le funzioni $\theta(\xi, x)$, $\mu(t)$, $R(t, x)$, che compaiono nella (7) e nella (28), siano proprio quelle che abbiamo determinato nel numero precedente. Allora, è soddisfatto il sistema formato dalle equazioni (31), (32), (33), e l'insieme Σ_0 vien mutato dalla trasformazione T in una sua porzione. Ora proveremo che T è continua, nel senso che ogni successione di funzioni di Σ_0 che sia uniformemente convergente in una regione chiusa e limitata qualsiasi di S'_* vien mutata da T in una successione che ha la stessa proprietà. Attese le (1), (2), (27) e (21), la continuità di T è conseguenza della (11) e del fatto che la n-upla di funzioni $\psi_i(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ soddisfacenti le (12) risulta, a norma di un teorema di G. Scorza Dragoni[5]) una funzione continua del parametro $\bar{z}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$.

Ebbene, il fatto che le funzioni di Σ_0 siano equicontinue ed equilimitate in ogni regione chiusa e limitata di S^*_r , che Σ_0 sia mutato da T in una sua porzione e sia chiuso, in un senso evidente, rispetto alla totalità delle funzioni continue in S'_* insieme con la continuità di T e la convessità di Σ_0, implica l'esistenza in Σ_0 di una funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ inva-

---

5) G. SCORZA DRAGONI, *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e teoremi di dipendenza continua*, Ist. Veneto di Sc. Lett. ed Arti, Tomo XCIX (1940), pp. 148-151.

riante rispetto a T [6]). Cioè esiste almeno una soluzione nella classe A del problema (4).

6. - Dimostriamo ora che la soluzione trovata è unica. Supponiamo che $z^*(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ sia un'altra funzione soddisfacente in S'_* le

$$(59)\quad z^*(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = \Phi(\psi_1^*(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots,$$
$$\psi_n^*(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \lambda) + \int_\xi^x f_{n+1}(t, \psi_1^*(t, x, y_1, \dots, \xi, \lambda), \dots,$$
$$\psi_n^*(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \lambda), z^*(t, \psi_1^*(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots,$$
$$\psi_n^*(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \xi, \lambda), \lambda) dt,$$

$$(60)\quad \psi_i^*(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = y_i +$$
$$+ \int_x^t f_i(\tau, \psi_1^*(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, \psi_n^*(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda),$$
$$z^*(\tau, \psi_1^*(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, \psi_n^*(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \xi, \lambda), \lambda) dt,$$

ed appartenente alla classe A. La prima circostanza implica che z^* soddisfa le disuguaglianze (22), (23), leggendo in queste z^* al posto di z; la seconda implica che z^* soddisfa a delle condizioni analoghe alle (24), (25), (26). E non è affatto restrittivo supporre che soddisfi proprio alle (24), (25), (26) con z^* al posto di z.

Queste proprietà implicano la disuguaglianza

$$(61)\quad |z(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \xi, \lambda) -$$
$$- z^*(t, \psi_1^*(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \xi, \lambda)| \leq$$
$$\leq ((h+1)\overset{*}{\bar{\Gamma}}(\xi, t) - 1) \sum_1^n{}_r |\psi_r(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) -$$
$$- \psi_r^*(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)| + |z(t, \psi^*, \xi, \lambda) - z^*(t, \psi^*, \xi, \lambda)|,$$

[6]) Per questa conclusione si vegga, per es., M. HUKUHARA, *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires; domaine réel*, Journ. Fac. Sc. Ho-kkaido, Univ. Sapporo, Japan, s. I, vol. II, (1934-35), pp. 13-88), teorema 6 a p. 22.

ove abbiamo posto ψ^* per indicare la n-upla

$$\psi_1^*(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, \psi_n^*(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda).$$

La (61), la (9), la (60) e la nota generalizzazione del lemma di Gronwall [7]), porgono la

$$(62) \qquad \sum_1^n {}_i |\psi_i(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - \psi_i^*(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)| \leq$$

$$\leq e^{L\left|\int_x^t \gamma(\tau)d\tau\right|} \left| \int_x^t \gamma(\tau) |z(\tau, \psi^*, \xi, \lambda) - z^*(\tau, \psi^*, \xi, \lambda)| e^{-L\left|\int_x^t \gamma(\omega)d\omega\right|} d\tau \right|,$$

L essendo una costante maggiore di 1 e soddisfacente la

$$(h+1)(\bar{\Gamma}(\xi, t) - 1) \leq L.$$

Di qui, dalla (11) e dalla (59) segue allora

$$(63) \qquad |z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - z^*(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)| \leq$$

$$\leq h\, e^{L\left|\int_x^\xi \gamma(\tau)d\tau\right|} \left| \int_x^\xi \gamma(\tau) |z(\tau, \psi^*, \xi, \lambda) - z^*(\tau, \psi^*, \xi, \lambda)| d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int_\xi^x \left\{ L\gamma(t) e^{L\left|\int_x^t \gamma(\tau)d\tau\right|} \left| \int_x^t \gamma(\tau) |z(\tau, \psi^*, \xi, \lambda) - z^*(\tau, \psi^*, \xi, \lambda)| \cdot \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \cdot\, e^{-L\left|\int_x^\tau \gamma(\omega)d\omega\right|} d\tau + \gamma(t) |z(t, \psi^*, \xi, \lambda) - z^*(t, \psi^*, \xi, \lambda)| \right\} dt \right| =$$

$$= (h+1)\, e^{L\left|\int_x^\xi \gamma(t)dt\right|} \left| \int_\xi^x \gamma(t) |z(t, \psi^*, \xi, \lambda) - z^*(t, \psi^*, \xi, \lambda)| dt \right|.$$

---

[7]) Si vegga in questa rivista, questo volume, il lemma riportato nella nota [7]) a piè di p. 79; oppure, nell'ultimo dei lavori cit. in [1]), la nota [35]) a piè di p. 110.

Ebbene, detto p un numero naturale, indichiamo con $v(x)$ il massimo di

$$(64)\qquad |z(x, y_1, \ldots, y_n, \xi, \lambda) - z^*(x, y_1, \ldots, y_n, \xi, \lambda)|$$

sulle sezioni, coi piani $x = \text{cost.}$, dell'insieme

$$S_{A_p} : a \leq x, \xi \leq b; \; -A_p \leq y_1, \ldots, y_n, \lambda \leq A_p,$$

dove A_p, divergente con p, è un numero positivo che nell'insieme

$$S'_{*p} : a \leq x, \xi \leq b, \; -p \leq y_1, \ldots, y_n, \lambda \leq p,$$

maggiora la somma $\sum_1^n i \, |\psi^i_*(t, x, y_1, \ldots, y_n, \xi, \lambda)|$. La funzione $v(x)$ risulta assolutamente continua in (a, b) [8]. Inoltre la (59) porge in S_{A_p} la

$$(65)\qquad v(x) \leq (h + 1)\, e^{L \left|\int_a^b \gamma(t)dt\right|} \left|\int_\xi^x \gamma(t)v(t)dt\right|,$$

e allora, essendo $v(\xi) = 0$, segue $v(x) \equiv 0$. Cioè la funzione (64) è identicamente nulla almeno in S_{A_p}. Ma l'arbitrarietà di p e la divergenza di A_p con p, assicura che la (64) è nulla in tutto S'_*. Il teorema è così completamente provato.

---

[8]) La cosa è nota per funzioni z e z^* dipendenti dalle sole variabili x, y_1. Si vegga: G. SCORZA DRAGONI e M. VOLPATO, *Un teorema di unicità per le soluzioni di una equazione alle derivate parziali del primo ordine*, questa rivista, vol. XX, (1951), pp. 446-461, n. 6, p. 454. Il fatto che z e z^* dipendano con continuità anche dalle variabili $y_2, \ldots, y_n$, ξ, λ non impedisce di ripetere il ragionamento del passo citato, tanto più che, stavolta, nelle disuguaglianze che definiscono l'insieme S_{A_p} figurano solo delle costanti.