

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

LETIZIA DAL SOGLIO

Sulla nozione di grado e di coefficiente di allacciamento per mappe ponderate

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 28 (1958), p. 280-289

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__280_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLA NOZIONE DI GRADO E DI COEFFICIENTE DI ALLACCIAMENTO PER MAPPE PONDERATE

Nota (*) di LETIZIA DAL SOGLIO (a Padova)

In questa nota estendo al caso di mappe *ponderate*¹⁾ alcune nozioni e risultati classici relativi a trasformazioni continue, quali, ad esempio, la nozione di grado per una trasformazione di una $(n - 1)$ -sfera in sè, ed il teorema di Brouwer. Definisco inoltre il coefficiente di allacciamento per una coppia (*disgiunta*) di mappe di una $(n - 1)$ -sfera in uno spazio euclideo n -dimensionale R^n , nozione questa che permette di stabilire un teorema sulle coincidenze (per mappe ponderate), e, come corollario, un criterio di esistenza di punti uniti per una mappa di una n -cella in R^n .

1. - In questo lavoro useremo le notazioni e le definizioni di carattere generale già introdotte nella memoria citata in¹⁾, ed in particolare quindi scriveremo $f: X \rightarrow Y$, con X ed Y spazi di Hausdorff, per indicare che f è una mappa ponderata di X in Y ; con \mathcal{C}_f denoteremo il supporto minimale di f ²⁾.

L'anello dei coefficienti Λ sarà fissato sin dall'inizio.

(*) Pervenuta in Redazione il 14 giugno 1958.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1) Per la definizione di mappa ponderata, come per altre nozioni che ad essa si ricollegano, si veda G. DARBO, *Teoria dell'omologia in una categoria di mappe plurivalenti ponderate*. Questi Rendiconti, vol. XXVIII, pp. 188-220.

2) Cfr. loc. cit. in 1), pag. 191.

Inoltre con R^n indicheremo lo spazio numerico n -dimensionale, con E^n la n -cella unitaria (cioè l'insieme dei punti $x \in R^n$ per cui $\|x\| \leq 1$), con S^{n-1} la $(n-1)$ -sfera intorno di E^n .

DEF. 1. - Data $f: X \rightarrow Y$, se $A \subset X$, definiamo la restrizione di f su A , $f|A: A \rightarrow Y$, ponendo $f|A = fi$, con $i: A \rightarrow X$, mappa d'inclusione.

DEF. 2. - Se la mappa $f: X \rightarrow Y$ si può fattorizzare nel modo seguente:

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ f' \nearrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

in cui è $B \subset Y$ e j la mappa d'inclusione, diremo che f' è subordinata dalla f mediante restrizione del codominio a B . In tal caso la f' è determinata dalla f e da B .

Affinchè la f ammetta una tale mappa subordinata è sufficiente che si abbia: $\mathcal{C}_f(x) \in B$ per ogni $x \in X$.

DEF. 3. - La mappa *diagonale* che indicheremo con $diag: X \rightarrow X \times X$, è definita da $diag(x) = x \times x$, per $x \in X$.

DEF. 4. - Indicheremo con $D: R^n \times R^n \rightarrow R^n$ la mappa univalente definita da $D(x \times y) = y - x$, dove la differenza $y - x$ è intesa nel senso vettoriale.

2. - Data $f: X \rightarrow Y$, l'elemento di Λ , $Y * f(x)$ ³⁾ (somma dei coefficienti di $f(x)$), che chiameremo indice della f nel punto x , è una funzione di x localmente costante, e quindi si riduce ad una costante se X è connesso. In quest'ultimo caso lo indicheremo con $\mathcal{I}_n(f)$.

³⁾ Cfr. loc. cit. in 1), pag. 189.

LEMMA I. - Se $i: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ è la mappa identica, e λ un elemento non nullo di Λ , allora la mappa $\lambda i: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, non si può estendere ad una mappa $\varphi: E^n \rightarrow S^{n-1}$.

In caso affermativo infatti la commutatività varrebbe nel diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{H}_{n-1}(E^n) & \\ & \nearrow & \searrow \varphi_* \\ \mathcal{H}_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\lambda i_*} & \mathcal{H}_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

ed essendo $\mathcal{H}_{n-1}(E^n) \approx 0$, $\mathcal{H}_{n-1}(S^{n-1}) \approx \Lambda$, ($n > 1$), ne seguirebbe $\lambda i_* = 0$ da cui $\lambda = 0$, contro l'ipotesi. Il caso $n = 1$ segue da analoghe considerazioni sui gruppi ridotti d'omologia ⁴⁾.

Possiamo ora generalizzare il teorema di Brouwer alle trasformazioni punto-insieme finito, nella forma seguente:

TEOREMA I. - Se t è supporto ⁵⁾ di una mappa $f: E^n \rightarrow E^n$ con $\mathfrak{I}_n(f) \neq 0$, esiste un punto $x_0 \in E^n$ tale che $x_0 \in t(x_0)$.

Ammettiamo per assurdo che, per ogni $x \in E^n$, $x \notin t(x)$. La mappa ottenuta per composizione di:

$$E^n \xrightarrow{\text{diag}} E^n \times E^n \xrightarrow{E^n \times f} E^n \times E^n$$

subordina allora, per restrizione del codominio ad $E^n \times E^n - \Delta$, Δ essendo la diagonale del prodotto $E^n \times E^n$, una mappa:

$$\eta: E^n \longrightarrow E^n \times E^n - \Delta.$$

Si consideri la mappa univalente $\zeta: E^n \times E^n - \Delta \rightarrow S^{n-1}$, che associa al punto $(x \times y) \in E^n \times E^n - \Delta$, il punto

⁴⁾ Per la nozione di gruppo ridotto d'omologia si veda: EILENBERG-STEENROD, *Foundations of algebraic topology* (Princeton University Press, 1952), pp. 18 e segg. e p. 46).

⁵⁾ Cfr. loc. cit. in ¹⁾, pag. 191.

$\zeta(x \times y) \in S^{n-1}$, intersezione della semiretta uscente da y e passante per x con S^{n-1} .

Posto: $g = \zeta\eta: E^n \rightarrow S^{n-1}$, si ha, per $x \in S^{n-1}$:

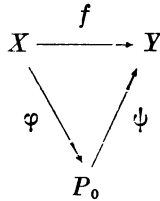
$$g(x) = \zeta\eta(x) = \zeta(E^n \times f) \text{diag}(x) = \zeta(x, f(x)) = \mathcal{I}n(f) \cdot x.$$

Ma allora $g: E^n \rightarrow S^{n-1}$ sarebbe una estensione della mappa:

$$\mathcal{I}n(f)i: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$$

con i identità ed $\mathcal{I}n(f) \neq 0$, in contrasto col lemma precedente.

3. - Una mappa $f: X \rightarrow Y$ è *localmente* costante se ammette una fattorizzazione del tipo:



con P_0 spazio puntiforme.

DEF. 6. - Dicesi *inessenziale* una mappa σ -omotopa ad una mappa *localmente costante*.

Oss. I. - Il prodotto di due mappe di cui una almeno sia inessenziale è inessenziale.

Infatti se $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ ed f è inessenziale, sarà $f \simeq \psi\varphi$ con $X \xrightarrow{\varphi} P_0 \xrightarrow{\psi} Y$ (P_0 spazio puntiforme), quindi $gf \simeq g(\psi\varphi) = (g\psi)\varphi$, vale a dire gf è inessenziale. Se è invece g inessenziale, cioè se $g \simeq \psi'\varphi'$ con $Y \xrightarrow{\varphi'} P_0 \xrightarrow{\psi'} Z$, $gf \simeq (\psi'\varphi')f = \psi'(\varphi'f)$ ed anche in questo caso gf è inessenziale poichè $X \xrightarrow{\varphi'f} P_0 \xrightarrow{\psi'} Z$.

LEMMA II. - Se $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ e $\mathcal{C}_r(S^{n-1}) \neq S^{n-1}$, f è *inessenziale*.

DIMOSTRAZIONE. - Sia y_0 un punto di $S^{n-1} - \mathcal{C}_r(S^{n-1})$ ed f la mappa subordinata dalla f mediante restrizione del codomi-

nio ad $S^{n-1} - y_0$. Allora è $f = jf'$, dove j è l'inclusione $S^{n-1} - y_0 \subset S^{n-1}$. Ma, essendo $S^{n-1} - y_0$ contrattile in sè, j è inessenziale e pertanto, per l'oss. precedente, anche f risulta inessenziale.

Si consideri una mappa $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ ($n > 1$). Poichè $\mathcal{K}_{n-1}(S^{n-1}) \simeq \Lambda$ ed $f_*: \mathcal{K}_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow \mathcal{K}_{n-1}(S^{n-1})$ è un Λ -omomorfismo, esiste uno ed uno solo elemento $\alpha \in \Lambda$ tale che, per ogni $u \in \mathcal{K}_{n-1}(S^{n-1})$, $f_*u = \alpha u$. Chiameremo α grado di f e lo indicheremo con $\text{grad}(f)$.

Oss. II. - Si osservi che:

$$1) \text{ Se } f \simeq g \text{ allora } \text{grad}(f) = \text{grad}(g)$$

$$2) \text{ grad}(fg) = \text{grad}(f) \cdot \text{grad}(g)$$

$$3) \text{ grad}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{grad}(f) + \mu \text{grad}(g) \quad (\lambda, \mu \in \Lambda)$$

e ciò in conseguenza di note proprietà ⁶⁾.

TEOREMA II. - Una mappa $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ ($n > 1$) di grado diverso da zero è essenziale e pertanto $\mathcal{C}_f(S^{n-1}) = S^{n-1}$.

Supponiamo per assurdo che f sia inessenziale; si ha allora $f \simeq \psi\varphi$, con $S^{n-1} \xrightarrow{\varphi} P_0 \xrightarrow{\psi} S^{n-1}$ e P_0 spazio puntiforme. Quindi $f_* = \psi_*\varphi_*$, ed essendo $\mathcal{K}_{n-1}(P_0) \simeq 0$, φ_* e di conseguenza f_* sarebbe l'omomorfismo nullo, contro l'ipotesi.

4. - DEF. 7. - Due mappe $f, g: X \rightarrow Y$ costituiscono una coppia disgiunta (f, g) se verificano la condizione:

$$(4) \quad \mathcal{C}_f(x) \cap \mathcal{C}_g(x) = \emptyset \quad \text{per ogni } x \in X.$$

DEF. 8. - Siano $(f_0, g_0): X \rightarrow Y$, $(f_1, g_1): X \rightarrow Y$ due coppie disgiunte. Diremo che (f_0, g_0) è σ -omotopa ad (f_1, g_1) se esistono due σ -omotopie $h: f_0 \simeq f_1$, $k: g_0 \simeq g_1$, tali da costituire una coppia disgiunta $(h, k): X \times I \rightarrow Y$.

Data una coppia disgiunta $(f, g): X \rightarrow R^n$, la mappa otte-

⁶⁾ Cfr. loc. cit. in ¹⁾, pag. 203.

nuta per composizione delle:

$$X \xrightarrow{\text{diag}} X \times X \xrightarrow{f \times g} R^n \times R^n \xrightarrow{D} R^n$$

subordina, per restrizione del codominio ad $R^n - 0$, in virtù della condizione (4), una mappa $\Phi'_{f,g} : X \rightarrow R^n - 0$. Detta $p_n : R^n - 0 \rightarrow S^{n-1}$ la proiezione di centro O definita da

$$p_n(x) = \frac{x}{\|x\|} \quad (x \in R^n - 0), \text{ porremo:}$$

$$\Phi_{f,g} = p_n \Phi'_{f,g} : X \rightarrow S^{n-1}.$$

Ne risulta che la $\Phi_{f,g}$ è determinata univocamente dalla coppia disgiunta (f, g) mediante la commutatività del diagramma:

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} R^n \times R^n & \xrightarrow{D} & R^n \\ \uparrow f \times g & & \uparrow \text{inclus.} \\ X \times X & & R^n - 0 \\ \uparrow \text{diag} & \nearrow \Phi'_{f,g} & \downarrow p_n \\ X & \xrightarrow{\Phi_{f,g}} & S^{n-1} \end{array}$$

DEF. 9. - Sia $(f, g) : S^{n-1} \rightarrow R^n$ ($n > 1$) una coppia disgiunta. In questo caso è $\Phi_{f,g} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. Definiamo il coefficiente di allacciamento, $\omega(f, g) \in \Lambda$, della coppia (f, g) , ponendo:

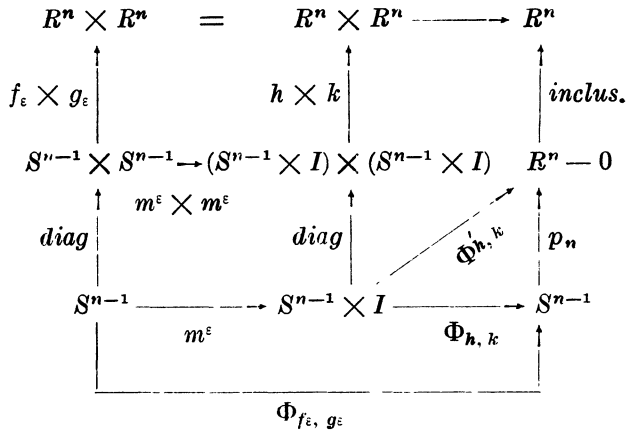
$$\omega(f, g) = \text{grad} (\Phi_{f,g}).$$

TEOREMA III. - Se $(f_0, g_0) : S^{n-1} \rightarrow R^n$ ed $(f_1, g_1) : S^{n-1} \rightarrow R^n$ sono due coppie disgiunte σ -omotope, allora:

$$\omega(f_0, g_0) = \omega(f_1, g_1).$$

Infatti, se $(h, k) : (f_0, g_0) \sim (f_1, g_1)$ è una coppia disgiunta

di σ -omotopie, il diagramma :



($\varepsilon = 0, 1$; m^ε immersioni)

è commutativo, e si ha pertanto $\Phi_{h,k} : \Phi_{f_0, g_0} \sim \Phi_{f_1, g_1}$, donde la conclusione per la (1) dell'Oss. II.

TEOREMA IV. - Siano $(f_i, g) : S^{n-1} \rightarrow R^n$ coppie disgiunte e $\lambda_i \in \Lambda$ ($i = 1, \dots, n$); la coppia $(f, g) : S^{n-1} \rightarrow R^n$ con $f = \sum_i \lambda_i f_i$ è disgiunta e risulta :

$$\omega(f, g) = \sum_i \lambda_i \omega(f_i, g).$$

Infatti, essendo $f \times g = \sum_i \lambda_i (f_i \times g)$, per la commutatività del diagramma (5) caratterizzante la $\Phi_{f,g}$, si ha

$$(6) \quad \Phi_{f,g} = \sum \lambda_i \Phi_{f_i, g}$$

che con la (3) dell'Oss. II porge l'asserto.

TEOREMA V. - Se $(f, g) : S^{n-1} \rightarrow R^n$ è una coppia disgiunta, tale è (g, f) e si ha :

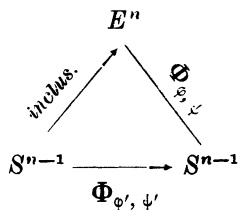
$$(7) \quad \omega(f, g) = (-1)^n \omega(g, f).$$

Poichè risulta $\Phi_{f,g} = \alpha_{n-1} \Phi_{g,f}$, dove $\alpha_{n-1} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ è la mappa che muta ogni punto di S^{n-1} nel proprio antipode, il

teorema segue facilmente dalla 2 dell'Oss. II e dal fatto che $\text{grad}(\alpha_{n-1}) = (-1)^n$.

TEOREMA VI. - Se $\varphi: E^n \rightarrow R^n$, $\psi: E^n \rightarrow R^n$ sono tali che la coppia $(\varphi', \psi'): S^{n-1} \rightarrow R^n$, dove $\varphi' = \varphi|_{S^{n-1}}$ e $\psi' = \psi|_{S^{n-1}}$, sia disgiunta, e se inoltre $\omega(\varphi', \psi') \neq 0$, esiste almeno un punto $x_0 \in E^n$ per cui $\mathcal{C}_\varphi(x_0) \cap \mathcal{C}_\psi(x_0) \neq \emptyset$.

Se ciò non fosse $(\varphi, \psi): E^n \rightarrow R^n$ sarebbe una coppia disgiunta, e dalla fattorizzazione seguente:

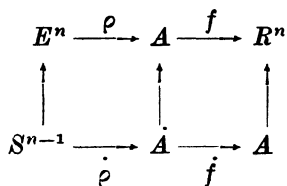


risulterebbe $\omega(\varphi', \psi') = \text{grad}(\Phi_{\varphi', \psi'}) = 0$, in virtù dal fatto che $\mathcal{H}_{n-1}(E^n) \approx 0$ ($n > 1$).

TEOREMA VII. - Sia A una n -cella di R^n , \dot{A} il suo contorno, $\rho: E^n \rightarrow A$ un omeomorfismo. $i_n: S^{n-1} \rightarrow E^n$ e $j: A \rightarrow R^n$ inclusioni. Se $f: A \rightarrow R^n$ è tale che la coppia $(f|_{\dot{A}}, j|_{\dot{A}})$ sia disgiunta, anche la $(f\rho i_n, j\rho i_n): S^{n-1} \rightarrow R^n$ è disgiunta. Si dimostra che, se è verificata l'ulteriore ipotesi: $\mathcal{C}_f(x) \subset A$ per $x \in \dot{A}$, allora:

$$(8) \quad \omega(f\rho i_n, j\rho i_n) = \pm \mathcal{I}n(f).$$

DIMOSTRAZIONE. - Consideriamo le mappe $\dot{\rho}, \dot{f}$, subordinate rispettivamente da ρ e da f in modo tale da rendere commutativo il diagramma:



dove le frecce verticali indicano inclusioni.

Sia inoltre $l: A \times I \rightarrow A$ una omotopia che contragga A in un punto $x_0 \in \text{int } A$ e tale che, per $x \in A$, si abbia:

$$\begin{aligned} l(x, t) &\in \text{int } A & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ l(x, 0) &= x \\ l(x, 1) &= x_0. \end{aligned}$$

Allora la mappa h , composizione di:

$$S^{n-1} \times I \xrightarrow{(f\rho) \times I} A \times I \xrightarrow{l} A \xrightarrow{j} R^n$$

e la mappa $k: S^{n-1} \times I \rightarrow R^n$, tale che $k(x, t) = j\rho i_n(x)$ per $(x \times t) \in S^{n-1} \times I$, costituiscono una coppia disgiunta di σ -omotopie:

$$(h, k); (f\rho i_n, j\rho i_n) \simeq (\psi_0, j\rho i_n)$$

dove $\psi_0: S^{n-1} \rightarrow R^n$ è la mappa costante che muta ogni punto $x \in S^{n-1}$ in $\mathcal{J}n(f)x_0$.

Ne segue, per il teorema III che:

$$(9) \quad \omega(f\rho i_n, j\rho i_n) = \omega(\psi_0, j\rho i_n)$$

D'altra parte, detta $p_{x_0}: \dot{A} \rightarrow S^{n-1}$ la proiezione di centro x_0 , vale a dire la mappa univalente, definita, mediante notazione vettoriale, da:

$$p_{x_0}(x) = \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \quad \text{per } x \in \dot{A}$$

si ha:

$$(10) \quad \Phi_{\psi_0, j\rho i_n} = \mathcal{J}n(f)p_{x_0}\dot{\rho}: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$$

Dalla (10) si deduce, tenendo conto del fatto noto ⁷⁾ che

⁷⁾ Infatti $\text{grad}(p_{x_0})$ coincide, a meno eventualmente del segno, con l'ordine del punto x_0 rispetto ad \dot{A} , e tale ordine vale ± 1 . (Cfr. ALEKSANDROV, *Topologia combinatoria* (Ed. Einaudi, 1957), Cap. XVI & 1,5 e Cap. XV, 3,4).

$\text{grad}(p_{x_0}\dot{\rho}) = \pm 1$, e della (3) dell'Oss. II:

$$(11) \quad \omega(\psi_0, j\rho_i) = \text{grad}(\mathcal{J}n(f)p_{x_0}\dot{\rho}) = \mathcal{J}n(f) \text{grad}(p_{x_0}\dot{\rho}) = \mp \mathcal{J}n(f)$$

e la (9) e la (11) porgono la conclusione voluta.

COROLLARIO. - *Nelle ipotesi del teorema precedente, se $\mathcal{J}n(f) \neq 0$, esiste almeno un punto $y_0 \in A$, unito nella f , tale cioè che sia $y_0 \in \mathcal{T}_f(y_0)$.*

Per il teorema VI esiste un punto $x_0 \in E^n$ tale che $\mathcal{T}_{f_0}(x_0) \cap \mathcal{T}_{j_0}(x_0) \neq \emptyset$. da cui, posto $y_0 = f(x_0) (\in A)$, segue $y_0 \in \mathcal{T}_f(y_0)$.