

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Indipendenza delle condizioni di mutua distributività

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 28 (1958), p. 40-49

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__40_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

INDIPENDENZA DELLE CONDIZIONI DI MUTUA DISTRIBUTIVITÀ

Nota () di DOMENICO BOCCIONI (a Padova)*

Le $4\nu^3$ eguaglianze che si ottengono dalle seguenti quattro:

$$\begin{aligned}x(y+z) &= (xy) + (xz), & (x+y)z &= (xz) + (yz), \\x + (yz) &= (x+y)(x+z), & (xy) + z &= (x+z)(y+z),\end{aligned}$$

in corrispondenza a tutte le ν^3 terne (x, y, z) di elementi di un insieme B , avente numero cardinale ν (non necessariamente finito), vengono dette condizioni di mutua distributività (di B).

Nel § 1 della presente nota viene dimostrato che (n.º 1, teor. 1): *se $\nu \geq 4$, le $4\nu^3$ condizioni di mutua distributività sono indipendenti*, nel senso che, fissatane una qualsiasi, esiste sempre un bisistema di sostegno B (si veda l'introduzione della precedente nota [1] ¹⁾) nel quale la condizione fissata non è soddisfatta, mentre vi sono invece soddisfatte tutte le rimanenti.

Nel § 2 vengono poi dimostrati altri due teoremi, in base al primo dei quali (n.º 4 teor. 2), fissata una qualunque terna di elementi di un insieme B avente numero cardinale $\nu \geq 4$, è sempre possibile trovare un bisistema di sostegno B nel quale la terna fissata non è s -distributiva né d -distributiva (si veda, l'introduzione di [1]), mentre sono invece sia s -distributive che d -distributive tutte le altre terne.

(*) Pervenuta in Redazione il 1º ottobre 1957.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

¹⁾ I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

Dopo avere esaminato, tranne una sola, tutte le v^3 terne di elementi di un dato bisistema B° di ordine $v \geq 4$ ed aver trovato che tutte le terne esaminate sono sia s -distributive che d -distributive, può dunque darsi che si debba concludere, dall'esame dell'ultima terna rimasta (qualunque essa sia), che il bisistema B° non è s -distributivo (si veda l'introduz. di [1]) né d -distributivo.

In base al secondo teorema del § 2 (n.º 5, teor. 3), fissata una qualunque terna di elementi di un insieme B avente numero cardinale $v \geq 8$, esiste sempre un bisistema di sostegno B nel quale non vale alcuna delle quattro condizioni di mutua distributività relative alla terna fissata, mentre valgono invece le condizioni di mutua distributività relative a tutte le terne rimanenti.

§ 1

1. - Consideriamo un insieme B , il cui numero cardinale v (non necessariamente finito) supporremo ≥ 2 .

Se x, y, z , denotano elementi di B , le $4v^3$ eguaglianze che si ottengono dalle seguenti quattro:

- (1) $x(y + z) = (xy) + (xz)$,
- (2) $(x + y)z = (xz) + (yz)$,
- (3) $x + (yz) = (x + y)(x + z)$,
- (4) $(xy) + z = (x + z)(y + z)$,

al variare della terna (ordinata) (x, y, z) in B^3 , si chiameranno *condizioni di mutua distributività* (di B).

Un sottinsieme non vuoto dell'insieme avente per elementi queste $4v^3$ condizioni si dirà costituito da condizioni *indipendenti*, se, fissata comunque una condizione del sottinsieme, esiste sempre un bisistema di sostegno B ([1], n.º 1) nel quale la condizione fissata non è soddisfatta mentre tutte le rimanenti condizioni del sottinsieme vi sono invece soddisfatte.

In un precedente lavoro ([1], n.º 14) è stato dimostrato che le $2v^3$ condizioni (1), (2) (dette di distributività) sono

indipendenti se $\nu \geq 3$. Nella presente nota verrà dimostrato anzitutto (n.° 3) il seguente

TEOREMA 1: *Se il numero cardinale ν di un insieme B è ≥ 4 , le $4\nu^3$ condizioni di mutua distributività di B sono indipendenti.*

2. - Conserviamo tutte le definizioni e le notazioni adottate in [1]. Inoltre, per maggiore comodità espositiva, facciamo le convenzioni seguenti.

Se B^0 è un bisistema di sostegno B , ed $x, y, z \in B$, diremo che la terna (x, y, z) è (n) -distributiva (in B^0) se vale l'egualianza (n) del n.° precedente ($n=1, 2, 3, 4$); diremo che (x, y, z) è (n_1, n_2) -distributiva (in B^0) se essa è contemporaneamente (n_1) -distributiva ed (n_2) -distributiva ($n_1, n_2=1, 2, 3, 4$); diremo che (x, y, z) è (n_1, n_2, n_3) -distributiva (in B^0) se essa è contemporaneamente (n_1, n_2) -distributiva ed (n_3) -distributiva ($n_1, n_2, n_3=1, 2, 3, 4$); diremo infine che (x, y, z) è $(1, 2, 3, 4)$ -distributiva (in B^0) se valgono le quattro egualianze (1), (2), (3), (4) del n.° precedente.

Se tutte le terne formate cogli elementi di un bisistema B^0 sono risp. (n_1) -distributive, (n_1, n_2) -distributive, (n_1, n_2, n_3) -distributive in B^0 , diremo che il bisistema B^0 è risp. (n_1) -distributivo, (n_1, n_2) -distributivo, (n_1, n_2, n_3) -distributivo ($n_1, n_2, n_3=1, 2, 3, 4$).

Se x, y, z sono elementi di un bisistema B^0 , la terna (x, y, z) si dirà (n) -isolata in B^0 ($n=1, 2, 3, 4$), se essa non è (n) -distributiva in B^0 mentre tutte le rimanenti terne di elementi di B^0 vi sono invece (n) -distributive.

LEMMA 1: *Sia C^0 un sopra-bisistema proprio di un bisistema B^0 , ed esista un $w \in C \dot{-} B$ tale che in C^0 si abbia*

$$(5) \quad vx = xv = w, \quad v + x = x + v = w$$

per ogni $v \in C \dot{-} B$ e per ogni $x \in C$. Allora le terne di elementi di C contenenti almeno un elemento di $C \dot{-} B$ sono tutte $(1, 2, 3, 4)$ -distributive in C^0 .

Dimostrazione: Basta applicare il lemma 1' di [1] (n.° 15) a C^0 e al suo duale ([1], n.° 1).

LEMMA 2: *Se due bisistemi sono opposti ([1], n.° 3), e se la terna (x, y, z) è (3)-distributiva (risp. (4)-distributiva) in uno di essi, allora la terna « opposta » (z, y, x) è (4)-distributiva (risp. (3)-distributiva) nell'altro.*

Dimostrazione: Basta applicare il lemma 13 di [1] (n.° 11) ai due bisistemi risp. duali di quelli dell'enunciato.

3. - Dimostriamo adesso le cinque proposizioni seguenti (v. [1], n.° 5, 1° capov.).

I) *Ciascuna delle cinque terne (a, a, a) , (a, a, b) , (b, a, a) , (a, b, a) , (a, b, c) è (1)-isolata in un bisistema (2, 3, 4)-distributivo di sostegno $B = \{a, b, c, d\}$.*

Infatti, con ragionamenti analoghi a quello fatto nel n.° 5 di [1] per dimostrare la I), si riconosce facilmente che:

1°) La terna (a, a, a) è (1)-isolata nel bisistema (2, 3, 4)-distributivo di sostegno $\{a, b, c\}$ definito dalle due tabelle (17) di [1] (n.° 15). Di conseguenza (lemma 1 del n.° preced.) la terna (a, a, a) è (1)-isolata nel bisistema (2, 3, 4)-distributivo di sostegno $B = \{a, b, c, d\}$ definito dalle due tabelle seguenti:

(6)	α	a	b	c	d		μ	a	b	c	d
	a	b	c	c	d		a	c	b	c	d
	b	c	c	c	d		b	c	c	c	d
	c	c	c	c	d		c	c	c	c	d
	d	d	d	d	d		d	d	d	d	d

2°) La terna (a, a, b) è (1)-isolata nel bisistema (2, 3, 4)-distributivo di sostegno $B = \{a, b, c, d\}$ definito dalle due seguenti tabelle:

(7)	α	a	b	c	d		μ	a	b	c	d
	a	d	b	d	d		a	d	c	d	d
	b	d	d	d	d		b	d	d	d	d
	c	d	d	d	d		c	d	d	d	d
	d	d	d	d	d		d	d	d	d	d

3°) La terna (b, a, a) è (1)-isolata nel bisistema (2, 3, 4)-distributivo di sostegno $\{a, b, c\}$ definito dalle due tabelle (7) di [1] (n.° 5). Di conseguenza (lemma 1 del n.° preced.) la terna (b, a, a) è (1)-isolata nel bisistema (2, 3, 4)-distributivo di sostegno $B = \{a, b, c, d\}$ definito dalle due tabelle seguenti:

$$(8) \quad \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline a & a & c & c & d \\ b & c & c & c & d \\ c & c & c & c & d \\ d & d & d & d & d \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} \mu & a & b & c & d \\ \hline a & c & c & c & d \\ b & b & c & c & d \\ c & c & c & c & d \\ d & d & d & d & d \end{array}$$

4°) La terna (a, b, a) è (1)-isolata nel bisistema (2, 3, 4)-distributivo di sostegno $B = \{a, b, c, d\}$ definito dalle due seguenti tabelle:

$$(9) \quad \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline a & d & d & d & d \\ b & b & d & d & d \\ c & d & d & d & d \\ d & d & d & d & d \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} \mu & a & b & c & d \\ \hline a & d & c & d & d \\ b & d & d & d & d \\ c & d & d & d & d \\ d & d & d & d & d \end{array}$$

5°) La terna (a, b, c) è (1)-isolata nel bisistema (2, 3, 4)-distributivo di sostegno $B = \{a, b, c, d\}$ definito dalle due seguenti tabelle:

$$(10) \quad \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline a & d & d & d & d \\ b & d & d & b & d \\ c & d & d & d & d \\ d & d & d & d & d \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} \mu & a & b & c & d \\ \hline a & d & a & d & d \\ b & d & d & d & d \\ c & d & d & d & d \\ d & d & d & d & d \end{array}$$

II) *Ciascuna terna di elementi dell'insieme $B = \{a, b, c, d\}$ è (1)-isolata in un bisistema (2, 3, 4)-distributivo di sostegno B .*

Dimostrazione: Questa proposizione II) è una conseguenza immediata della preced. I), in virtù delle osservazioni del n.° 2 di [1].

III) *Ciascuna terna di elementi dell'insieme $B = \{a, b, c, d\}$ è (2)-isolata in un bisistema (1, 3, 4)-distributivo di sostegno B .*

Dimostrazione: Questa proposiz. III) discende immediatamente dalla precedente II) tramite il lemma 13 di [1] (n.° 11) ed il lemma 2 del n.° 2. Per ogni terna (x, y, z) di elementi di B , basta infatti considerare il bisistema opposto di quello, (2, 3, 4)-distributivo, in cui è (1)-isolata la terna (z, y, x) .

IV) *Ciascuna terna di elementi dell'insieme $B = \{a, b, c, d\}$ è (3)-isolata in un bisistema (1, 2, 4)-distributivo di sostegno B .*

V) *Ciascuna terna di elementi dell'insieme $B = \{a, b, c, d\}$ è (4)-isolata in un bisistema (1, 2, 3)-distributivo di sostegno B .*

Dimostrazione delle IV), V): Basta applicare risp. le II), III) e considerare quindi i bisistemi duali.

Le quattro proposizioni II), ..., V) forniscono appunto la dimostrazione del teorema 1 (enunciato nel n.° 1) nel caso $\nu = 4$. Da esse, e dal lemma 1 del n.° 2, discende poi subito la verità del teorema stesso anche se $\nu > 4$.

§ 2

4. - Nella precedente nota [1] si è dimostrato che (teoremi 1 e 1' dei n.° 1 e 11), se (x, y, z) è una qualsiasi terna di elementi di un insieme B avente numero cardinale $\nu \geq 3$, allora esistono due bisistemi di sostegno B nei quali (x, y, z) è rispettivamente (1)-isolata e (2)-isolata (n.° 2).

Ci occuperemo adesso del problema di riconoscere se ogni terna di elementi di un insieme B possa essere contemporaneamente (1)-isolata e (2)-isolata in un (medesimo) bisistema di sostegno B .

Una terna di elementi di un bisistema B^0 che sia contemporaneamente (1)-isolata e (2)-isolata in B^0 si dirà (1, 2)-isolata in B^0 . Dimostreremo allora il seguente

TEOREMA 2: *Se B è un insieme avente numero cardinale $\nu \geq 4$, ciascuna delle ν^3 terne di elementi di B è (1, 2)-isolata in un bisistema di sostegno B .*

Premettiamo la dimostrazione della proposizione seguente.

VI) *Ciascuna delle cinque terne (a, a, a) , (a, a, b) , (b, a, a) , (a, b, a) , (a, b, c) è (1, 2)-isolata in un bisistema di sostegno $B = \{a, b, c, d\}$.*

Infatti, con ragionamenti analoghi a quello fatto nel n.° 5 di [1] per dimostrare la I) (e tenendo conto, nei primi due casi, del lemma 1 del presente lavoro), si riconosce facilmente che:

1°) La terna (a, a, a) è (1, 2)-isolata nel bisistema di sostegno $B = \{a, b, c, d\}$ definito dalle due seguenti tabelle (si osservi che il sotto-bisistema di sostegno $\{a, b, c\}$ è quello definito dalle (5) del n.° 5 di [1]):

$$(11) \quad \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline a & a & c & c & d \\ b & c & c & c & d \\ c & c & c & c & d \\ d & d & d & d & d \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} \mu & a & b & c & d \\ \hline a & b & c & c & d \\ b & c & c & c & d \\ c & c & c & c & d \\ d & d & d & d & d \end{array}$$

2°) La terna (a, a, b) è (1, 2)-isolata nel bisistema di sostegno $B = \{a, b, c, d\}$ definito dalle due seguenti tabelle:

$$(12) \quad \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & c & c & c & d \\ c & c & c & c & d \\ d & d & d & d & d \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} \mu & a & b & c & d \\ \hline a & c & b & c & d \\ b & c & c & c & d \\ c & c & c & c & d \\ d & d & d & d & d \end{array}$$

3°) La terna (b, a, a) è (1, 2)-isolata nel bisistema, di sostegno $B = \{a, b, c, d\}$, opposto ([1], n.° 3) di quello definito dalle precedenti tabelle (12), e ciò in virtù del lemma 13 di [1] (n.° 11).

4°) La terna (a, b, a) è (1, 2)-isolata nel bisistema di sostegno $B = \{a, b, c, d\}$ definito dalle due seguenti tabelle:

$$(13) \quad \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline a & d & c & d & d \\ b & b & d & d & d \\ c & d & d & d & d \\ d & d & d & d & d \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} \mu & a & b & c & d \\ \hline a & d & c & d & d \\ b & d & d & d & d \\ c & a & d & d & d \\ d & d & d & d & d \end{array}$$

5°) La terna (a, b, c) è (1, 2)-isolata nel bisistema di

sostegno $B = \{a, b, c, d\}$ definito dalle due seguenti tabelle:

$$(14) \quad \begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ \hline a & b & a & b & b \\ b & b & b & c & b \\ c & b & b & b & b \\ d & b & b & b & b \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} \mu & a & b & c & d \\ \hline a & b & b & d & b \\ b & b & b & b & b \\ c & b & b & b & b \\ d & b & b & b & b \end{array}$$

Dimostrazione del teorema 2: Si ottiene subito, sfruttando la precedente proposiz. VI), il lemma 1 (n.º 2), e le osservazioni del n.º 2 di [1], (cfr. [1], n.º 7).

5. - Diremo che una terna di elementi di un bisistema B° è (1, 2, 3, 4)-isolata in B° , se essa è contemporaneamente (1)-isolata, (2)-isolata, (3)-isolata e (4)-isolata in B° (n.º 2).

TEOREMA 3: Se B è un insieme avente numero cardinale $\nu \geq 8$, ciascuna delle ν^3 terne di elementi di B è (1, 2, 3, 4)-isolata in un bisistema di sostegno B .

Alla dimostrazione di questo teorema premettiamo quella della proposizione seguente.

VII) Ciascuna delle cinque terne (a, a, a) , (a, a, b) , (b, a, a) , (a, b, a) , (a, b, c) è (1, 2, 3, 4)-isolata in un bisistema (di ordine 8) di sostegno $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

Infatti, sempre con ragionamenti analoghi a quello fatto nel n.º 5 di [1] per dimostrare la I) (e tenendo conto, nel 1º, 2º e 4º caso, del lemma 1 del presente lavoro), si riconosce facilmente che:

1º) La terna (a, a, a) è (1, 2, 3, 4)-isolata nel bisistema B° , di sostegno $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, così definito: i) B° è un sopra-bisistema del bisistema, di sostegno $\{a, b, c, d\}$, avente le tabelle (11), ii) ogni somma e prodotto che già non sia definito dalle (11) è $= d$.

2º) La terna (a, a, b) è (1, 2, 3, 4)-isolata nel bisistema di sostegno $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ così definito: i) $a + a = c$, $a + b = d$, $a + f = f$, $e + b = e$, $aa = e$, $ab = f$, $ad = d$, $cb = c$, $h + x = x + h = hx = xh = h$ per ogni $x \in B$, ii) ogni altra somma e prodotto è $= g$.

3°) La terna (b, a, a) è (1, 2, 3, 4)-isolata nel bisistema di sostegno $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, opposto ([1], n.° 3) di quello definito nel preced. capoverso, e ciò in virtù del lemma 13 di [1] (n.° 11) e del lemma 2 del presente lavoro (n.° 2).

4°) La terna (a, b, a) è (1, 2, 3, 4)-isolata nel bisistema di sostegno $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ così definito: *i*) $a + b = c$, $a + f = f$, $b + a = d$, $e + a = e$, $ab = e$, $ad = d$, $ba = f$, $ca = c$, $h + x = x + h = hx = xh = h$ per ogni $x \in B$, *ii*) ogni altra somma e prodotto è $= g$.

5°) La terna (a, b, c) è (1, 2, 3, 4)-isolata nel bisistema di sostegno $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ così definito: *i*) $a + b = d$, $a + g = g$, $b + c = e$, $f + c = f$, $ab = f$, $ae = e$, $bc = g$, $dc = d$, *ii*) ogni altra somma e prodotto è $= h$.

Per comodità del lettore, esporremo, a titolo di esempio, la dimostrazione dettagliata di quanto asserito in 4°). In base al lemma 1 del n.° 2, ci si può evidentemente limitare alla considerazione del sotto-bisistema B_1^0 (di ordine 7) di sostegno $B_1 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Osserviamo anzitutto che (in B_1^0) tutte le somme e tutti i prodotti sono diversi sia da a che da b . Ne segue intanto che i secondi membri delle eguaglianze (1), (2), (3), (4) (n.° 1) sono $= g$ per ogni terna (x, y, z) di elementi di B_1 , (supponendone, infatti, uno qualsiasi $\neq g$, si verrebbe sempre a concludere che un prodotto od una somma è eguale ad a , contro l'ipotesi; a figura invero come addendo o fattore in ogni somma o prodotto di B_1^0 che sia $\neq g$). Inoltre, ciascuno dei primi membri delle eguaglianze (1), (2), (3), (4) è $\neq g$ (in B_1^0) se e soltanto se $(x, y, z) = (a, b, a)$. E invero, limitandoci all'eguaglianza (1) (ragionamento analogo per le altre tre), se $x(y + z) \neq g$ in B_1^0 , dev'essere necessariamente $x(y + z) = d$ (l'eguaglianza $x(y + z) = c$, oppure $= e$, oppure $= f$ implicherebbe $y + z = a$, oppure $= b$, contro l'ipotesi), donde $x = a$, $y + z = d$, e da qui $y = b$, $z = a$, cioè $(x, y, z) = (a, b, a)$; viceversa $a(b + a) = ad = d \neq g$. Dunque la terna (a, b, a) è appunto (1, 2, 3, 4)-isolata nel bisistema B_1^0 e quindi anche (per il lemma 1) nel sopra-bisistema di B_1^0 considerato in 4°).

Dimostrazione del teorema 3: Si ottiene subito (cfr. [1], n.° 7), sfruttando la precedente proposiz. VII), il lemma 1 del n.° 2, e le osservazioni del n.° 2 di [1].

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOCCIONI, D.: *Indipendenza delle condizioni di distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 1-30.