

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNO BUSULINI

Sulla relazione triangolare in un l -gruppo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 28 (1958), p. 68-70

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__68_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLA RELAZIONE TRIANGOLARE IN UN l -GRUPPO

Nota () di BRUNO BUSULINI (a Padova)*

G. Birkhoff¹⁾ ha osservato che in un l -gruppo *commutativo* vale la disuguaglianza triangolare:

$$(1) \quad |a + b| \leq |a| + |b|,$$

ma che detta relazione non dovrebbe valere in generale. Poi, nel libro fondamentale per la teoria dei reticoli²⁾ stabilisce la relazione:

$$(2) \quad |a + b| \leq |a| + |b| + |a|.$$

Successivamente U. Morin³⁾ verifica per un l -gruppo che:

$$(3) \quad \begin{aligned} (a + b)^- &\geq a^- + b^-, \\ (a + b)^+ &\leq a^+ + b^+; \end{aligned}$$

dalle quali si ricava, tra le altre, le due seguenti:

$$(4) \quad |a + b| \leq a^+ + |b| - a^-,$$

$$(4') \quad |a + b| \leq b^- + |a| + b^+.$$

(*) Pervenuta in Redazione il 5 settembre 1957.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

¹⁾ G. BIRKHOFF, *Lattice-ordered groups* [Annals of Math., 1942; pag. 309].

²⁾ G. BIRKHOFF, *Lattice theory* [American Math. Soc., 1948; pag. 232].

³⁾ U. MORIN, *Algebra astratta* [Cedam, Padova 1955].

Pertanto la disuguaglianza triangolare, che vale evidentemente se a e b sono entrambi positivi, vale altresì se è positivo uno solo dei due elementi. Se invece uno (almeno) dei due elementi è negativo vale la:

$$(5) \quad |a + b| \leq |b| + |a|.$$

1. - Indicati con $|b|'$ il trasformato di $|b|$ mediante $-a^-$ e con $|a|^*$ il trasformato di $|a|$ mediante b^+ si ha inoltre:

$$(6) \quad \begin{aligned} |a + b| &\leq |a| + |b|', \\ |a + b| &\leq |b| + |a|^*. \end{aligned}$$

Infatti, dalle (4) e (4') segue che:

$$\begin{aligned} a + b &\leq a^+ + |b| - a^- = a^+ - a^- + a^- + |b| - a^- = |a| + |b|', \\ |a + b| &\leq -b^- + |a| + b^+ = -b^- + b^+ - b^+ + |a| + b^+ = |b| + |a|^*. \end{aligned}$$

2. - È facile dimostrare che: *non solo condizione sufficiente, ma anche necessaria, affinché in un l -gruppo G valga per ogni coppia di elementi la (1) è che esso sia commutativo.*

Infatti, siano a e b due elementi positivi del gruppo G . Quindi:

$$\begin{aligned} a + b &= |a + b| = |-(x + b)| = |-b - a| \leq |-b| + |-a| = b + a, \\ b + a &= |b + a| = |-(b + a)| = |-a - b| \leq |-a| + |-b| = a + b; \end{aligned}$$

e pertanto: $a + b = b + a$.

Ma se in un l -gruppo G è commutativo il sistema degli elementi positivi, allora è commutativo G stesso,⁴⁾; c. v. d.

3. - Se lo l -gruppo G non è commutativo, $|a + b| = |-b - a|$ dovrà confrontarsi sia con $|a| + |b|$ che con $|-b| + |-a| = |b| + |a|$. La disuguaglianza meno restrittiva che, ove sia vera, può in ogni caso sostituire la (1) è pertanto la:

$$(7) \quad |a + b| \leq (|a| + |b|) \cup (|b| + |a|).$$

⁴⁾ G. BIRKHOFF, loco cit. 2), pag. 234.

Che la (7) sia in ogni caso vera si verifica inoltre facilmente. Infatti:

$$|a| + |b| \geq a + b, \quad |b| + |a| \geq -b - a = -(a + b),$$

quindi:

$$(|a| + |b|) \cup (|b| + |a|) \geq (a + b) \cup -(a + b) = |a + b|.$$

4. - Poichè l'espressione a destra della disuguaglianza (7) è la medesima per tutte le otto coppie $a + b$, $a - b$, $-a + b$, $-a - b$, $b + a$, $-b + a$, $b - a$, $-b - a$, essa deve essere un loro seguente comune. È interessante osservare che essa è anzi il loro *minimo seguente comune*.

Infatti:

$$\begin{aligned} |a| + |b| &= a \cup -a + b \cup -b = (a + b \cup -b) \cup (-a + b \cup -b) = \\ &= (a + b) \cup (a - b) \cup (-a + b) \cup (-a - b), \end{aligned}$$

$$|b| + |a| = (b + a) \cup (b - a) \cup (-b + a) \cup (-b - a);$$

e quindi:

$$\begin{aligned} (|a| + |b|) \cup (|b| + |a|) &= (a + b) \cup (a - b) \cup (-a + b) \cup (-a - b) \\ &\cup (b + a) \cup (b - a) \cup (-b + a) \cup (-b - a); \quad \text{c. v. d.} \end{aligned}$$