Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Luigi Amerio

Funzioni debolmente quasi-periodiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 30 (1960), p. 288-301

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__288_0>

FUNZIONI DEBOLMENTE QUASI-PERIODICHE

Nota (*) *di* LUIGI AMERIO (*a Milano*).

§ **1.** - Sia B uno spazio di Banach (relativamente al corpo complesso), B^* lo spazio duale. Indicheremo con x gli elementi di B, con α gli elementi di B^*, con $\| x \|$, $\| \alpha \|$ le rispettive norme.

Sia poi

$$x = f(t)$$

una funzione della variabile reale t, definita nell'intervallo J $(-\infty < t < +\infty)$, a valori in B.

L'insieme $H_f\ [x;\ x = f(t),\ t \in J]$, in B, si chiamerà la *traiettoria* della funzione $f(t)$.

DEFINIZIONE. - *Diremo che* $f(t)$ *è debolmente quasi-periodica* (*d. q. p.*) *se, per ogni* $\alpha \in B^*$, *la funzione* (a valori complessi)

$$\alpha(f(t))$$

è quasi-periodica secondo Bohr.

Oggetto di questa Nota è di indicare varie proprietà delle funzioni ora definite, le quali si associano, secondo uno schema consueto nelle teorie astratte, alle funzioni quasi-periodiche in senso forte, la cui teoria è stata svolta dal Bochner in una classica Memoria [1]): le funzioni quasi-periodiche in senso forte si diranno, più brevemente, quasi-periodiche (q. p.). È chiaro poi che una funzione q. p. è anche d. q. p.

Tra i risultati ottenuti mi sembrano di un certo interesse le condizioni perchè una funzione d. q. p. sia q. p. (§§ 3, 5),

---

(*) Pervenuta in Redazione il 4 luglio 1960.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Politecnico, Milano.

[1]) S. BOCHNER, *Abstrakte fastperiodische funktionen*, Acta Math., 61 (1933), p. 149-184.

in particolare l'enunciato seguente: *condizione necessaria e sufficiente perchè $f(t)$, d. q. p., sia q. p. è che la sua traiettoria risulti relativamente compatta.*

Per indicare la convergenza debole di una successione $\{x_n\}$ al punto x useremo le notazioni

$$\lim_{n \to \infty}{}^{*} x_n = x, \quad \text{oppure} \quad x_n \xrightarrow{*} x. \tag{1,1}$$

È noto che il limite debole, se esite, è unico: la (1,1) significa poi che, per ogni $\alpha \in B^*$, risulta

$$\lim_{n \to \infty} \alpha(x_n) = \alpha(x).$$

Con le notazioni

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x, \quad \text{oppure} \quad x_n \to x,$$

intenderemo che la successione $\{x_n\}$ tende ad x (in senso forte), cioè che $\|x_n - x\| \to 0$.

§ **2.** - I. - *Se $f(t)$ è d. q. p., $f(t)$ risulta funzione limitata in J:*

$$\|f(t)\| \leq M. \tag{2,1}$$

Inoltre la traiettoria H_f è separabile.

Infatti, per ogni $\alpha \in B^*$, la funzione

$$\alpha(f(t))$$

è q. p., e quindi limitata: $|\alpha(f(t))| \leq m_\alpha$. Da noti teoremi [2]) seguono allora la (2, 1) e il resto della tesi.

II. - *Se risulta, uniformemente in J,*

$$\lim_{n \to \infty}{}^{*} f_n(t) = g(t), \tag{2,2}$$

le $f_n(t)$ essendo d. q. p., anche $g(t)$ è d. q. p.

Infatti, se è, per ogni $\alpha \in B^*$, e uniformemente in J,

$$\lim_{n \to \infty} \alpha(f_n(t)) = \alpha(g(t))$$

---

[2]) Cfr. E. HILLE, R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups*, Am. Math. Soc., 1957, p. 34, t. 2.8.6. p. 59.

dalla quasi-periodicità delle funzioni $\alpha(f_n(t))$ segue la quasi-periodicità di $\alpha(g(t))$. Perciò $g(t)$ è d. q. p.

III. - *Se $f(t)$ è d. q. p. e se $\{h_n\}$ è una successione di numeri reali tali che risulti, per ogni $t \in J$,*

$$\lim_{n \to \infty}{}^{*} f(t + h_n) = g(t), \tag{2,3}$$

allora $g(t)$ è d. q. p. e, detta Ω_f l'estensione convessa di H_f, risulta

$$\bar{\Omega}_f = \bar{\Omega}_g \tag{2,4}$$

(ove $\bar{\Omega}_f$ è la chiusura di Ω_f).

Osserviamo che, per ogni $\alpha \in B^*$, $\alpha(f(t))$ è funzione q. p. e quindi uniformemente continua in J. Perciò le funzioni $\varphi_n(t) = \alpha(f(t + h_n))$ sono equi-uniformemente continue in J ed egualmente q. p. Poichè, per la (2,3), si ha

$$\lim_{n \to \infty} \alpha(f(t + h_n)) = \alpha(g(t)),$$

segue dal lemma dimostrato nel § 3 che la convergenza è uniforme in J. Pertanto la (2,3) sussiste uniformemente in J e $g(t)$ risulta *d. q. p.*

Ricordiamo ora che $\bar{\Omega}_f$ è la chiusura dell'insieme Ω_f formato dai punti x definiti nel modo seguente. Presi p valori t_j e p valori λ_j, con

$$\lambda_j \geq 0, \ \sum_1^p{}_j \lambda_j = 1,$$

si ponga

$$x = \sum_1^p{}_j \lambda_j f(t_j).$$

Consideriamo ora un qualsiasi punto di Ω_g:

$$y = \sum_1^p{}_j \lambda_j g(t_j).$$

Si ha, per la (2,3),

$$y = \lim_{n \to \infty}{}^{*} \sum_{1}^{p}{}_{j} \lambda_j f(t_j + h_n) = \lim_{n \to \infty}{}^{*} x_n$$

essendo

$$x_n = \sum_{1}^{p}{}_{j} \lambda_j f(t_j + h_n) \in \Omega_f .$$

Per un teorema di Mazur [3]) $\bar{\Omega}_f$, chiuso e convesso, è anche debolmente chiuso.

Perciò $y \in \bar{\Omega}_f$, ed essendo y un punto qualsiasi di Ω_g, si trae che

$$\bar{\Omega}_g \subseteq \bar{\Omega}_f .$$

Ma dalla (2, 3) segue anche, uniformemente in J,

$$\lim_{n \to \infty}{}^{*} g(t - h_n) = f(t).$$

Ne segue

$$\bar{\Omega}_f \subseteq \bar{\Omega}_g .$$

e la (2,4) risulta dimostrata.

IV. - *Lo spazio B sia debolmente completo ed $f(t)$ debolmente continua. Condizione caratteristica perchè $f(t)$ sia d. q. p. è che da ogni successione reale $\{u_n\}$ possa estrarsi una sottosuccessione $\{z_n\}$ tale che la successione $\{f(t + z_n)\}$ converga debolmente ad una funzione $f_z(t)$, ed uniformemente rispetto a $t \in J$.*

Questo teorema estende il classico criterio di Bochner.

Che la condizione sia sufficiente è ovvio: proviamone perciò la necessità.

Poichè B è debolmente completo ed $x(f(t))$ è q. p. per ogni

---

[3]) Cfr. E. HILLE, R. S. PHILLIPS, loc. cit. in [2]), p. 36, t. 2.9.3.

$\alpha \in B^*$, esiste, per $-\infty < \lambda < +\infty$, il limite

$$(2,5) \quad \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha(f(\eta)) e^{-i\lambda\eta} d\eta = \lim_{t \to \infty} \alpha\left(\frac{1}{t} \int_0^t f(\eta) e^{-i\lambda\eta} d\eta\right) = \alpha(a(\lambda)),$$

avendo posto

$$(2,6) \qquad a(\lambda) = \lim_{t \to \infty}{}^* \frac{1}{t} \int_0^t f(\eta) e^{-i\lambda\eta} d\eta .$$

Per il teorema I, è $H_f \subset B_0$, sottospazio separabile di B. Allora[4]) è $a(\lambda) \in B_0$ e, detta $\{\alpha_r\}$ una successione determinante[5]) rispetto a B_0, risulta

$$(2,7) \qquad \| a(\lambda) \| = \operatorname{Sup}_r | \alpha_r(a(\lambda)) | .$$

Per la quasi-periodicità di $\alpha_r(f(t))$, è $\alpha_r(a(\lambda)) \neq 0$ solo in una successione $\{\lambda_{r,m}\}$: è allora, per la (2,7), $a(\lambda) \neq 0$ solo per $\lambda \in \{\lambda_n\} = U_r \{\lambda_{r,m}\}$. A causa delle (2,5) e (2,6), vale lo sviluppo di Fourier

$$\alpha(f(t)) \sim \sum_{1}^{\infty}{}_n \alpha(a(\lambda_n)) e^{i\lambda_n t}$$

e, detti

$$\alpha(P_n(t)) = \sum_{1}^{p_n}{}_k r_{n,k} \alpha(a(\lambda_k)) e^{i\lambda_k t}$$

i corrispondenti polinomi di Bochner, risulta, uniformemente in J,

$$\lim_{n \to \infty} \alpha(P_n(t)) = \alpha(f(t)) .$$

Sia $\{u_m\}$ una arbitraria successione reale, e $\{z_m\}$ una sottosuccessione tale che esista, per ogni k, il limite

$$\lim_{m \to \infty} e^{i\lambda_k z_m} = e^{i\mu_k} .$$

---

4) Cfr. 3).

5) Tale cioè che risulti, per ogni $x \in B_0$, $\| x \| = \operatorname{Sup}_r | \alpha_r(x) |$, cfr. E. HILLE, R. S. PHILLIPS, loc. cit. in 2), p. 34.

Dalla disuguaglianza

$$\alpha(f(t+z_p)) - \alpha(f(t+z_q)) \mid \leq \mid \alpha(f(t+z_p)) - \alpha(P_n(t+z_p)) \mid +$$
$$+ \mid \alpha(P_n(t+z_p)) - \alpha(P_n(t+z_q)) \mid + \mid \alpha(P_n(t+z_q)) - \alpha(f(t+z_q)) \mid$$

segue allora la convergenza uniforme, in J, della successione $\{\alpha(f(t+z_n))\}$. Il limite debole, $f_z(t)$, della successione $\{f(t+z_n)\}$ risulterà, infine, d. q. p. per teorema II.

§ **3.** - Lemma. - *Sia $\{\varphi_n(t)\}$ una successione di funzioni equi-uniformemente continue in J ed egualmente q. p., secondo Bohr.*

Sia poi $\{\eta_r\}$ una successione densa in J.

Se esiste finito, per ogni r, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\eta_r), \tag{3,1}$$

la successione $\{\varphi_n(t)\}$ converge uniformemente in J.

Con un noto ragionamento, dall'equi-uniforme continuità delle $\varphi_n(t)$, e dall'esistenza dei limiti (3,1), per ogni r, segue l'uniforme convergenza della successione $\{\varphi_n(t)\}$ in ogni intervallo limitato.

Ammettiamo ora che la successione $\{\varphi_n(t)\}$ non converga uniformemente in J. Esistono, in tale ipotesi, un numero $\sigma > 0$ e tre successioni $\{t_p\}$, $\{n'_p\}$, $\{n''_p\}$ tali che risulti

$$\mid \varphi_{n'_p}(t_p) - \varphi_{n''_p}(t_p) \mid \geq \sigma. \tag{3,2}$$

Poichè le $\varphi_n(t)$ sono egualmente quasi-periodiche, esse ammettono, in corrispondenza del valore $\frac{\sigma}{4}$, una comune ampiezza di inclusione $l_{\frac{\sigma}{4}}$, e un comune insieme di quasi-periodi.

Sia $J_{\frac{\sigma}{4}}$ un arbitrario intervallo, di ampiezza $l_{\frac{\sigma}{4}}$. Esiste, per ogni p, un quasi periodo τ_p (comune a tutte le $\varphi_n(t)$) tale che sia

$$t_p + \tau_p = \bar{t}_p \in J_{\frac{\sigma}{4}}, \quad \mid \varphi_n(t+\tau_p) - \varphi_n(t) \mid \leq \frac{\sigma}{4}.$$

Risulta allora, per la (3,2),

$$| \varphi_{n'_p}(\bar{t}_p) - \varphi_{n''_p}(\bar{t}_p) | \geq$$

$$\geq |\varphi_{n'_p}(t_p) - \varphi_{n''_p}(t_p)| - |\varphi_{n'_p}(t_p) - \varphi_{n'_p}(\bar{t}_p)| - |\varphi_{n''_p}(t_p) - \varphi_{n''_p}(\bar{t}_p)| \geq \frac{\sigma}{2} \,.$$

Perciò la successione $\{\varphi_n(t)\}$ non converge uniformemente in $J_{\frac{\sigma}{4}}$, ciò che è assurdo.

V. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè $f(t)$, d. q. p., sia q. p. è che la traiettoria H_f risulti relativamente compatta.*

Che la condizione sia necessaria è evidente: infatti la traiettoria H_f di una funzione q. p. $f(t)$ è relativamente compatta.

La condizione è sufficiente. Cominciamo col dimostrare che $f(t)$ è continua in J.

Infatti supponiamo che t_0 sia un punto di discontinuità per $f(t)$. Esistono allora un numero $\sigma > 0$ e due successioni $\{ h'_n \}$, $\{ h''_n \}$, infinitesime per $n \to \infty$, tali che risulti

$$\| f(t_0 + h'_n) - f(t_0 + h''_n) \| \geq \sigma. \tag{3,3}$$

Possiamo addirittura supporre, per la relativa compattezza della traiettoria H_f (estraendo eventualmente da $\{ h'_n \}$, $\{ h''_n \}$ due sottosuccessioni che indicheremo ancora con $\{ h'_n \}$, $\{ h''_n \}$), che risulti

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \; f(t_0 + h'_n) &= a' \\ \lim_{n \to \infty} \; f(t_0 + h''_n) &= a'', \end{aligned} \tag{3,4}$$

essendo, per la (3,3),

$$\| a' - a'' \| \geq \sigma. \tag{3,5}$$

Per il teorema di Hahn-Banach, esiste allora un funzionale $\alpha^* \in B^*$, tale che sia

$$\alpha^*(a') \neq \alpha^*(a''). \tag{3,6}$$

Ora si ha, per la continuità di $\alpha^*(f(t))$,

$$\alpha^*(f(t_0)) = \lim_{n\to\infty} \alpha^*(f(t_0 + h'_n)) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \alpha^*(f(t_0 + h''_n))$$

e quindi, per le (3,4),

$$\alpha^*(f(t_0)) = \alpha^*(a') = \alpha^*(a'') ,$$

contro la (3,6).

La continuità di $f(t)$ è perciò dimostrata. Per provare la quasi-periodicità, in base al criterio di Bochner, basta dimostrare che, presa una successione $\{h_n\}$, la successione $\{f(t+h_n)\}$ risulta relativamente compatta, rispetto alla convergenza uniforme nell'intervallo J.

Sia $\{\eta_r\}$ la successione dei numeri razionali. Poichè la traiettoria H_f è relativamente compatta, si può estrarre da $\{h_n\}$ una sottosuccessione (che diremo ancora $\{h_n\}$) tale che esista, per ogni r, il limite

$$\lim_{n\to\infty} f(\eta_r + h_n) = x_r . \tag{3,7}$$

Proviamo che le successioni $\{f(\eta_r + h_n)\}$ convergono uniformemente rispetto ad r. In caso contrario, esistono un numero $\sigma > 0$ e tre successioni

$$\{\xi_r\} \subseteq \{\eta_r\}, \qquad \{h'_r\} \subseteq \{h_r\}, \qquad \{h''_r\} \subseteq \{h_r\},$$

tali che risulti

$$\| f(\xi_r + h'_r) - f(\xi_r + h''_r) \| \geq \sigma. \tag{3,8}$$

Possiamo addirittura supporre, per la relativa compattezza della traiettoria, che sia

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} f(\xi_r + h'_r) &= b', \\ \lim_{r\to\infty} f(\xi_r + h''_r) &= b'', \end{aligned} \tag{3,9}$$

avendosi, per la (3,8),

$$\| b' - b'' \| \geq \sigma. \tag{3,10}$$

Per il teorema di Hahn-Banach, esiste allora un funzionale $\alpha^* \in B^*$, tale che risulti

$$\alpha^*(b') \neq \alpha^*(b''). \tag{3,11}$$

Osserviamo ora che la funzione $\alpha^*(f(t))$ è q. p.: perciò $\alpha^*(f(t))$ è uniformemente continua in J. Le funzioni traslate $\alpha^*(f(t + h_n)) = \varphi_n(t)$ sono allora, in J, equi-uniformemente continue ed egualmente quasi-periodiche. Si ha poi, per ogni r, a causa della (3,7),

$$\lim_{n \to \infty} \alpha^*(f(\eta_r + h_n)) = \alpha^*(x_r),$$

finito.

In virtù del lemma dianzi provato, si conchiude che la successione $\{\alpha^*(f(t + h_n))\}$ è uniformemente convergente in J.

Consideriamo ora le successioni $\{\xi_r + h'_r\}$, $\{\xi_r + h''_r\}$.

Estraendo da queste, eventualmente, due sottosuccessioni (che diremo ancora $\{\xi_r + h'_r\}$, $\{\xi_r + h''_r\}$), possiamo supporre, per il criterio di Bochner, che le successioni

$$\{\alpha^*(f(t + \xi_r + h'_r))\}, \quad \{\alpha^*(f(t + \xi_r + h''_r))\}$$

siano uniformemente convergenti nell'intervallo J.

Proviamo che è

$$\lim_{r \to \infty} \alpha^*(f(t + \xi_r + h'_r)) = \lim_{r \to \infty} \alpha^*(f(t + \xi_r + h''_r)). \tag{3,12}$$

Si ha

$$\begin{aligned} | \alpha^*(f(t + \xi_r + h'_r)) - \alpha^*(f(t + \xi_r + h''_r)) | &\leq \\ \leq | \alpha^*(f(t + \xi_r + h'_r)) - \alpha^*(f(t + \xi_r + h_r)) | &+ \\ + | \alpha^*(f(t + \xi_r + h_r)) - \alpha^*(f(t + \xi_r + h''_r)) | &. \end{aligned} \tag{3,13}$$

Inoltre, preso ad arbitrio $\varepsilon > 0$, si può determinare n_ε, in modo che, per $r, s > n_\varepsilon$, risulti, in tutto J,

$$|\alpha^*(f(t + h_r)) - \alpha^*(f(t + h_s))| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi anche

$$(3,14) \qquad |\alpha^*(f(t + \xi_r + h_r)) - \alpha^*(f(t + \xi_r + h_s))| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poichè risulta $\{h'_r\} \subseteq \{h_r\}$, $\{h''_r\} \subseteq \{h_r\}$, dalla (3,14), per $r > n_\varepsilon$, segue

$$|\alpha^*(f(t + \xi_r + h_r)) - \alpha^*(f(t + \xi_r + h'_r))| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\alpha^*(f(t + \xi_r + h_r)) - \alpha^*(f(t + \xi_r + h''_r))| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per $r > n_\varepsilon$, si trae allora dalla (3,13), in tutto J,

$$|\alpha^*(f(t + \xi_r + h'_r)) - \alpha^*(f(t + \xi_r + h''_r))| \leq \varepsilon$$

e la (3,12) risulta dimostrata.

In particolare, per $t = 0$, si ha, in virtù delle (3,9),

$$\alpha^*(b') = \lim_{r \to \infty} \alpha^*(f(\xi_r + h'_r)) = $$
$$= \lim_{r \to \infty} \alpha^*(f(\xi_r + h''_r)) = \alpha^*(b''),$$

contro la (3,11).

Le successioni $\{f(\eta_r + h_n)\}$ convergono pertanto uniformemente rispetto ad r. Preso $\varepsilon > 0$ esiste, in corrispondenza, un indice n_ε tale che, per $p, q > n_\varepsilon$, e qualunque sia r, risulti

$$(3,15) \qquad \|f(\eta_r + h_p) - f(\eta_r + h_q)\| \leq \varepsilon.$$

A causa della continuità di $f(t)$ segue allora, per gli stessi p, q, qualunque sia $t \in J$,

$$\|f(t + h_p) - f(t + h_q)\| \leq \varepsilon.$$

La quasi-periodicità di $f(t)$ è perciò dimostrata.

§ **4.** - Se $f(t)$ è d. q. p., diremo *regolare rispetto a* $f(t)$ una successione reale $z = \{z_k\}$, tale che sia, in tutto J,

$$\lim_{k \to \infty}{}^* f(t + z_k) = f_z(t). \tag{4,1}$$

Per il lemma dimostrato nel § 3, *la* (4,1) *vale uniformemente in* J, cioè, per ogni fissato $\alpha \in B^*$, risulta

$$\lim_{k \to \infty} \alpha(f(t + z_k)) = \alpha(f_z(t))$$

uniformemente in J. Inoltre $f_z(t)$ è funzione d. q. p. Infine, detto Z_f l'insieme delle successioni z regolari rispetto ad $f(t)$, si ricava dal teorema IV che *se* B *è debolmente completo, una qualsiasi successione reale* $u = \{u_k\}$ *contiene una sottosuccessione* $z \in Z_f$.

Ciò premesso, sussiste (in uno spazio qualsiasi) il seguente teorema.

VI. - *Sia* $f(t)$ *d. q. p. e sia valida la* (4,1), *per una successione* $z \in Z_f$.

Allora, se le norme $\| f(t) \|$, $\| f_z(t) \|$ *sono q. p., risulta, uniformemente in* J,

$$\lim_{k \to \infty} \| f(t + z'_k) \| = \| f_z(t) \|, \tag{4,2}$$

essendo $z' = \{z'_k\}$ *una conveniente sottosuccessione di* z.

Cominciamo con l'osservare che, per la quasi-periodicità di $\| f(t) \|$, esiste una sottosuccessione $z' \subseteq z$ tale che risulti (uniformemente in J)

$$\lim_{k \to \infty} \| f(t + z'_k) \| = \varphi(t), \tag{4,3}$$

$\varphi(t)$ essendo funzione q. p.

Dalle (4,1) e (4,3) segue allora

$$\|f_z(t)\| \leq \varphi(t). \tag{4,4}$$

Si ha poi, per la (4,1) e per l'uniformità della convergenza in J,

$$\lim_{k\to\infty}{}^{*} f_z(t - z'_k) = f(t). \tag{4,5}$$

Detta z'' una conveniente sottosuccessione di z' e posto

$$\psi(t) = \lim_{k\to\infty} \|f_z(t - z''_k)\|, \tag{4,6}$$

risulta, per la (4,5),

$$\|f(t)\| \leq \psi(t). \tag{4,7}$$

Inoltre le (4,5) e (4,6) valgono uniformemente in J.

Dalla (4,7) segue

$$\|f(t + z''_k)\| \leq \psi(t + z''_k)$$

e quindi per le (4,3), e (4,6),

$$\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \|f(t + z''_k)\| \leq \tag{4,8}$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \psi(t + z''_k) = \|f_z(t)\|.$$

Dalle (4,3), (4,4) e (4,8) segue la (4,2).

L'uniformità della convergenza, in J, si deduce poi dal lemma già ricordato.

§ **5.** - Possiamo dedurre dal teorema ora dimostrato una espressiva condizione perchè una funzione d.q.p. sia q.p.: tale condizione vale in spazi di natura alquanto particolare, ma di grande importanza nelle applicazioni.

Precisamente indicheremo con K uno spazio di Banach *debolmente completo,* nel quale sussista, in più, la seguente *proprietà: se* $x_n \xrightarrow{*} x$ *e* $\| x_n \| \to \| x \|$, *allora* $x_n \to x$.

Vale, in un tale spazio, la proposizione seguente.

VII. - *Sia* $f(t)$ *d. q. p., a valori in* K. *Condizione necessaria e sufficiente perchè* $f(t)$ *risulti q. p. è che, per ogni* $z \in Z_f$, *la norma* $\| f_z(t) \|$ *sia q. p.*

Che la condizione sia necessaria è evidente. Proviamone ora la sufficienza.

Osserviamo che, per il teorema precedente e per la definizione di spazio K, dalle (4,1) e (4,2) segue, per ogni $z \in Z_f$, in tutto J,

$$\lim_{k \to \infty} \| f(t + z'_k) - f_z(t) \| = 0, \tag{5,1}$$

con $z' \subseteq z$.

Per dimostrare la quasi-periodicità di $f(t)$ basterà provare la relativa compattezza della corrispondente traiettoria.

Ora, in caso contrario, esisterebbero un numero $\sigma > 0$ e una successione $u = \{u_k\}$ soddisfacenti alle condizioni

$$\| f(u_j) - f(u_k) \| \geq \sigma \qquad (j \neq k). \tag{5,2}$$

Estratta da u una sottosuccessione $z \in Z_f$, e da z una sottosuccessione z' per cui valga la (4,2), risulterebbe allora, per la (5,2),

$$\| f(z'_j) - f(z'_k) \| \geq \sigma \qquad (j \neq k)$$

ciò che è contro la (5,1), scritta per $t = 0$.

La traiettoria di $f(t)$ è perciò relativamente compatta, e la tesi risulta provata.

OSSERVAZIONE. - Spazi K di particolare rilievo sono gli spazi *uniformemente convessi,* o di Clarkson. *Per questi spazi* (comprendenti, in particolare, gli spazi hilbertiani e gli spazi L^p, con $p > 1$) *vale pertanto il teorema* VII.

Si noti che agli spazi di Clarkson può estendersi il teorema di Bohr sull'integrale di una funzione $q.p.$ Si dimostra infatti che *se* $f(t)$ *è funzione q.p. a valori in uno spazio uniformente convesso e se l'integrale* $g(t) = \int_0^t f(\eta)d\eta$ *è limitato, allora anche la funzione* $g(t)$ *risulta q.p.* [6]).

Questo enunciato estende quello già dimostrato per gli spazi hilbertiani [7]). Come è noto, se $f(t)$ è $q.p.$ in uno spazio B, di Banach, qualsiasi, la quasi-periodicità dell'integrale $g(t)$ è stata dimostrata da Bochner [8]) supponendo la traiettoria H_g *relativamente compatta*: si prova, con esempi [9]), che l'ipotesi di compattezza non può essere sostituita, nel caso generale, con quella di limitatezza.

---

[6]) L. Amerio, *Sull'integrazione delle funzioni quasi-periodiche astratte*, Ann. di Mat. (in corso di stampa).

[7]) L. Amerio, *Sull'integrazione delle funzioni quasi-periodiche a valori in uno spazio hilbertiano*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, 28 (1960).

[8]) S. Bochner, loc. cit. in [1]).

[9]) L. Amerio, loc. cit. in [6]).