

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO VOLPATO

**Sopra alcune proprietà geometriche di una
particolare classe di superficie**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 30 (1960), p. 328-348

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__328_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SOPRA ALCUNE PROPRIETÀ GEOMETRICHE DI UNA PARTICOLARE CLASSE DI SUPERFICIE

Nota () di MARIO VOLPATO (a Venezia)*

Proprietà geometriche che coinvolgono elementi differenziali di una superficie definita parametricamente dalle equazioni

$$x_i = x_i(u, v) \quad , \quad i = 1, 2, 3,$$

sono state stabilite in ipotesi molto generali per le funzioni $x_i(u, v)$ ¹⁾. È appena il caso di ricordare che se le funzioni $x_i(u, v)$ soddisfanno la condizione di Lipschitz, allora nei punti della superficie non aventi la controimmagine in un conveniente insieme di misura nulla della base, esiste il piano tangente. In quest'ordine di idee, valendomi di alcuni recenti risultati sulla teoria delle funzioni reali di più variabili reali²⁾, metto in evidenza, in questa Nota, una classe di superficie per le quali è possibile stabilire proprietà geome-

(*) Pervenuta in Redazione il 4 ottobre 1960.

Indirizzo dell'A.: Istituto Universitario, Ca' Foscari, Venezia.

1) Si veggia, per es., [1], [2]. L'ampia bibliografia riportata in queste opere ci esonera dal fare qui altre citazioni.

2) Alludo, principalmente, ai risultati di G. SCORZA DRAGONI, STAMPACCHIA e miei. In particolare si veggano i lavori dal [4] all'[11].

Avverto che tutte le considerazioni di questa Nota si svolgono nell'ambito della teoria delle funzioni reali di variabili reale, la misura e l'integrazione essendo sempre intese nel senso di LEBESGUE.

triche che involgono anche elementi differenziali di convenienti curve tracciate sulla superficie. Tanto per dare un'idea dell'ampiezza della classe di superficie che prendo in considerazione, segnalo che rientrano nella mia classe le superficie definite dalle equazioni

$$x_i = \int_a^u \int_c^v f_i(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad , \quad i = 1, 2, 3,$$

le funzioni $f_i(u, v)$ essendo sommabili (superficialmente) nel rettangolo $a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$. Tali superficie non sono necessariamente lipschitziane.

Per semplicità supporrò in questo lavoro che l'insieme base sia un rettangolo del piano (u, v) . Ma penso che i risultati che qui stabilisco possano sussistere, più in generale, anche se la frontiera della base soddisfa ad una condizione di Banach Vitali. L'importanza di questa condizione, in questioni che si apparentano a quelle di cui mi occupo, essendo stata messa in evidenza da G. Stampacchia³⁾.

1. - Superficie quasi ordinarie in modo regolare.

La classe delle superficie che noi prenderemo in considerazione, e che chiameremo superficie quasi ordinarie in modo regolare (brevemente: *Q.O.R.*) è definita nel modo che segue.

Una superficie

$$S = (T, R) : x_i = x_i(u, v), \quad i = 1, 2, 3, \quad (u, v) \in R = J_u \times J_v,$$

$$J_u = a \leq u \leq b \quad , \quad J_v = c \leq v \leq d,$$

intesa come immagine del rettangolo (base) R nella trasformazione T definita dalle equazioni

$$x_i = x_i(u, v) \quad , \quad i = 1, 2, 3,$$

³⁾ Cfr. in [7] il § 6 e seguenti.

è *Q.O.R.* quando le funzioni $x_i(u, v)$, ($i=1, 2, 3$), soddisfanno le condizioni

I) sono assolutamente continue rispetto alle singole variabili,

II) le derivate parziali x'_{iu} , $[x'_{iv}]$, ($i=1, 2, 3$), esistono in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di R con le rette $u = \text{cost.}$, $[v = \text{cost.}]$, subordinano su quasi tutte queste sezioni delle funzioni continue e posto

$$\text{Estr. Sup.}_{v \in J_v} |x'_{iu}(u, v)| = L_i(u), \quad [\text{Estr. Sup.}_{u \in J_u} |x'_{iv}(u, v)| = M_i(v)],$$

le funzioni $L_i(u)$, $[M_i(v)]$, $i=1, 2, 3$, sicuramente misurabili⁴⁾ in J_u , $[J_v]$, son ivi sommabili⁵⁾.

Come è noto, la I) implica da sola l'esistenza, quasi ovunque in R , e la misurabilità delle derivate parziali x'_{iu} , $[x'_{iv}]$, $i=1, 2, 3$. La II), pertanto, condiziona la struttura dell'insieme di misura superficiale nulla ove possono mancare le x'_{iu} , $[x'_{iv}]$ e condiziona altresì queste derivate. È appena il caso di avvertire che una superficie *Q.O.R.* può non essere lipschitziana e una superficie lipschitziana può non essere *Q.O.R.* Si prova invece immediatamente che una superficie *Q.O.R.* è assolutamente continua secondo Tonelli. Infatti, a norma della II) le funzioni

$$w_i(u) = \int_c^d |x'_{iv}(u, \eta)| d\eta, \quad \bar{w}_i(v) = \int_a^b |x'_{iu}(\xi, v)| d\xi,$$

sono addirittura continue⁶⁾, rispettivamente, in J_u e J_v , gli

⁴⁾ Si veggia in [3] la nota (13), e in [12] la p. 279. Per una esplicita dimostrazione cfr. [13].

⁵⁾ Questa condizione è certamente soddisfatta se le derivate x'_{iu} , $[x'_{iv}]$, sono maggiorate, in modulo, da funzioni sommabili della sola variabile u , $[v]$.

⁶⁾ In [10] si veggia, per es., il ragionamento a p. 100 per dimostrare la disuguaglianza (86).

integrali

$$\int_a^b w_i(u) du \quad , \quad \int_c^d \bar{w}_i(v) dv,$$

sono allora finiti e pertanto le $x_i(u, v)$ sono a variazione limitata secondo Tonelli. Inoltre, per la I) e la II) esse sono continue. E dopo di ciò la I) ci dice anche che esse sono, appunto, assolutamente continue secondo Tonelli.

Una vasta classe di superficie *Q.O.R.* è costituita dalle superficie definite dalle equazioni

$$x_i = x_i(u, v) = \int_a^u \int_c^v f_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad i = 1, 2, 3, \quad (u, v) \in R,$$

ove le funzioni $f_i(u, v)$ sono sommabili (superficialmente) in R .

Infatti, un noto teorema di Fubini porge le uguaglianze

$$x_i(u, v) = \int_a^u d\xi \int_c^v f_i(\xi, \eta) d\eta = \int_c^v d\eta \int_a^u f_i(\xi, \eta) d\xi,$$

ove le funzioni

$$\int_c^v f_i(u, \eta) d\eta \quad , \quad \left[\int_a^u f_i(\xi, v) d\xi \right],$$

sono sommabili rispetto ad u , $[v]$, per ogni fissato v , $[u]$, (assolutamente) continue rispetto a v , $[u]$, per quasi tutti gli u , $[v]$, e maggiorate, in modulo, dalle funzioni

$$\int_c^d |f_i(u, \eta)| d\eta \quad , \quad \left[\int_a^b |f_i(\xi, v)| d\xi \right],$$

della sola variabile u , $[v]$, sommabili in J_u , $[J_v]$. Per un

noto teorema di G. Scorza Dragoni⁷⁾, sussistono allora le uguaglianze

$$x'_u(u, v) = \int_c^v f_i(u, \eta) d\eta \quad , \quad \left[x'_v(u, v) = \int_a^u f_i(\xi, v) d\xi \right],$$

in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di R con le rette $u = \text{cost.}$, $[v = \text{cost.}]$. Donde la conclusione.

Ricordo che una mia osservazione fatta altrove⁸⁾, assicura, più in generale, che se le funzioni $p_i(u, v)$, $[q_i(u, v)]$, $i = 1, 2, 3$, sono misurabili rispetto ad u , $[v]$, continue rispetto a v , $[u]$, e soddisfacenti le

$$\begin{aligned} |p_i(u, v)| &\leq L_i(u) \quad , \quad [|q_i(u, v)| \leq M_i(v)], \\ \int_a^u \{p_i(\xi, v) - p_i(\xi, c)\} d\xi &= \int_c^v \{q_i(u, \eta) - q_i(a, \eta)\} d\eta, \end{aligned}$$

allora le funzioni

$$\begin{aligned} x_i(u, v) &= \int_a^u p_i(\xi, v) d\xi + \int_c^v q_i(a, \eta) d\eta = \\ &= \int_c^v q_i(u, \eta) d\eta + \int_a^u p_i(\xi, c) d\xi, \end{aligned}$$

soddisfanno I), II).

2. - Curve della base e curve della superficie.

Sulla base di una superficie $Q.O.R.$

$$S = (T, R) : x_i = x_i(u, v) \quad , \quad i = 1, 2, 3, (u, v) \in R,$$

⁷⁾ Cfr. [5], [6].

⁸⁾ V. [11].

noi prenderemo in considerazione solamente quelle curve, che chiameremo *ammissibili* per S , caratterizzate dalla seguente definizione:

Una curva

$$\gamma = (\mathcal{C}, J_t) : u = u(t) \quad , \quad v = v(t) \quad , \quad t \in J_t = r \leq t \leq s,$$

intesa come immagine dell'intervallo J_t nella trasformazione \mathcal{C} definita dalle equazioni

$$u = u(t) \quad , \quad v = v(t),$$

è ammissibile per la superficie $S = (T, R)$ quando

- i) per ogni $t \in J_t$, risulta $(u(t), v(t)) \in R$,
- ii) le funzioni $u(t), v(t)$ sono assolutamente continue in J_t .
- iii) i prodotti

$$L_i(u(t))u'(t) \quad , \quad M_i(v(t))v'(t) \quad , \quad i = 1, 2, 3,$$

sicuramente misurabili⁹⁾, sono sommabili in J_t ¹⁰⁾.

E sulla superficie $S = (T, R)$ prenderemo in considerazione solamente quelle curve Γ che sono immagini, nella trasformazione T , di una curva ammissibile γ , cioè quelle curve

$$\Gamma = (T\mathcal{C}, J_t) : x_i = x_i(u(t), v(t)), \quad i = 1, 2, 3, \quad t \in J_t,$$

che sono immagini dell'intervallo J_t nella trasformazione prodotto $T\mathcal{C}$.

Se T_0 è un punto dell'intervallo J_t per il quale esistono

⁹⁾ Cfr. C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen Über Reelle Funktionen*, Chel. Publ. Comp., New York, (1948), Kap. X. nn. 496-499, pp. 556-563.

¹⁰⁾ Attesa la misurabilità dei prodotti in discorso, se $L_i^*(u)$, $[M_i^*(v)]$, sono funzioni che dominano i moduli di x'_i , $[v'_i]$, basta che siano sommabili i prodotti $L^*(u(t))u'(t)$, $[M^*(v(t))v'(t)]$. Ed è appena il caso di ricordare che questi ultimi sono certamente sommabili se, per esempio, $L_i^*(u)$, $[M_i^*(v)]$, sono limitate, oppure se $u(t), v(t)$ sono monotone.

e non sono simultaneamente nulle le tre derivate

$$\left[\frac{d}{dt} x_i(u(t), v(t)) \right]_{t=t_0}, \quad i = 1, 2, 3,$$

la retta di equazioni parametriche

$$(1) \quad x^i = x_i(u(t_0), v(t_0)) + \left(\frac{d}{dt} x_i(u(t), v(t)) \right)_{t=t_0} \rho,$$

ρ essendo il parametro, è l'unica, come si può vedere con ragionamenti elementari¹¹⁾, che gode della proprietà asintotica espressa dalla

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overline{PR}}{\overline{P_0R}} = 0,$$

P e P^0 essendo i punti, rispettivamente, di coordinate $[x_1(u(t), v(t)), x_2(u(t), v(t)), x_3(u(t), v(t))]$, $[x_1(u(t_0), v(t_0)), x_2(u(t_0), v(t_0)), x_3(u(t_0), v(t_0))]$, ed R il piede del piano perpendicolare per P alla retta (1). E pertanto chiameremo tale retta la tangente alla curva Γ nel punto P^0 .

3. - Punti ordinari della base di una superficie *Q.O.R.*

Nella base di una superficie *Q.O.R.* si possono individuare dei punti, che noi chiameremo ordinari per la superficie, nei quali le funzioni $x_i(u, v)$, $i=1, 2, 3$, si comportano, sostanzialmente, come se avessero le derivate parziali prime continue.

Noi ora caratterizzeremo tali punti e dimostreremo che i punti non ordinari della base sono contenuti nell'unione di un insieme di verticali e di un insieme di orizzontali

¹¹⁾ Cfr. G. SCRIZZA DRAGONI, *Elementi di analisi matematica*, parte II, 2ª ed., Cedam, Padova (1956), n. 89, pp. 154-157.

segati, ognuno, in insiemi di misura lineare nulla, rispettivamente dalle orizzontali e dalle verticali. Questa circostanza ci ha suggerito di chiamare quasi ordinarie in modo regolare le nostre superficie. Dimostreremo infine che nei punti ordinari le funzioni $x_i(u, v)$, $i=1, 2, 3$, sono differenziabili nel senso di Stolz.

Ecco le proprietà che caratterizzano un punto ordinario.

Un punto $(u_0, v_0) \in R$ è ordinario per la superficie $Q.O.R.$

$$S = (T, R) : x_i = x_i(u, v) \quad , \quad i = 1, 2, 3, (u, v) \in R,$$

quando

j) $L_i(u_0), M_i(v_0)$, $i=1, 2, 3$, sono numeri reali finiti,

jj) le funzioni $x'_u(u_0, v)$, $x'_v(u, v_0)$ sono continue,

jjj) qualunque sia la curva

$$\gamma = (T, J_t) : u = u(t) \quad , \quad v = v(t) \quad , \quad t \in J_t,$$

ammissibile per $S = (T, R)$, sussistono, per ogni $t \in J_t$, simultaneamente le uguaglianze

$$\begin{aligned} (2) \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(h)} \int_{u_0}^{u_0 + \sigma(h)} x'_u(\xi, v(t+h)) d\xi = \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(h)} \int_{u_0}^{u_0 + \sigma(h)} x'_u(\xi, v(t)) d\xi = x'_u(u_0, v(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(h)} \int_{v_0}^{v_0 + \sigma(h)} x'_v(u(t+h), \eta) d\eta = \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(h)} \int_{v_0}^{v_0 + \sigma(h)} x'_v(u(t), \eta) d\eta = x'_v(u(t), v_0), \end{aligned}$$

con $\sigma(h)$ funzione qualsiasi, continua in un intorno di $h=0$, nulla per $h=0$, e sempre dello stesso segno di h , o sempre di segno contrario ad h , per $h \neq 0$.

Ciò premesso, dimostriamo i seguenti teoremi

TEOREMA 1. - *Quasi tutti i punti della base di una superficie Q.O.R. sono ordinari. E gli eventuali punti non ordinari appartengono all'unione di un conveniente insieme di verticali e di un conveniente insieme di orizzontali segati, ognuno, in insiemi di misura lineare nulla, rispettivamente, dalle orizzontali e dalle verticali;*

TEOREMA 2. - *In tutti i punti ordinari della base di una superficie Q.O.R.*

$$S = (T, R) : x_i = x_i(u, v) \quad , \quad i = 1, 2, 3, (u, v) \in R,$$

le funzioni $x_i(u, v)$ sono differenziabili nel senso di Stolz.

Per quanto riguarda il teorema 1, osserviamo che, per ogni fissato indice i , ($i=1, 2, 3$), la funzione $L_i(u)$, $[M_i(v)]$, assume, quasi ovunque, valori finiti e la funzione $x'_u(u, v)$, $[x'_v(u, v)]$, subordina funzioni continue su quasi tutte le rette $u = \text{cost.}$, $[v = \text{cost.}]$. Pertanto, basta dimostrare che a prescindere in J_u , $[J_v]$, da un conveniente insieme di misura lineare nulla indipendente da t e da $v(t)$, $[u(t)]$, sussiste la (2), [(3)].

Ora, a norma di un lemma da me stabilito¹²), fissata $v(t)$, la (2), (il ragionamento è analogo per la (3)), sussiste in J_u a prescindere da un insieme $J^*(u)$ di misura nulla e indipendente da t . Basta allora provare che $J^*(u)$ non dipende da $v(t)$. La prova è pressochè immediata.

Infatti, analizzando il ragionamento svolto nella dimostrazione di quel lemma, si scorge che $J^*(u)$ dipende solamente dalla funzione $L_i(u)$ e da quelle porzioni chiuse $J_n(u)$, di $J(u)$, ($n=1, 2, \dots$), di misura maggiore di $b-a-\frac{1}{n}$, sicfatte che la $x'_u(u, v(t))$, considerata solo sulle verticali $u \in J_n(u)$, risulta uniformemente continua rispetto alla cop-

¹²) V. [9]. lemma 1. p. 40.

pia (u, t) . Ebbene, è possibile scegliere $J_n(u)$ in maniera da essere indipendente da $v(t)$. Per questo, basta che $J_n(u)$ sia quella porzione chiusa di $J(u)$, di misura maggiore di $b - a - \frac{1}{n}$, tale che la subordinata di $x'_i(u, v)$ sulle verticali aventi l'ascissa $u \in J_n$, risulti uniformemente continua rispetto alla coppia (u, v) . Di qui la conclusione.

Dimostriamo ora il teorema 2. Se (u_0, v_0) è un punto ordinario per $S = (T, R)$, posto

$$(4) \quad \begin{aligned} \Omega_i(u, v) &= x_i(u, v) - x_i(u_0, v_0) - \\ &- \{x'_{i_u}(u_0, v_0)(u - u_0) + x'_{i_v}(u_0, v_0)(v - v_0)\}, \\ d &= \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}, \end{aligned}$$

basta provare che il rapporto $\frac{\Omega_i(u, v)}{d}$, ($i = 1, 2, 3$), è infinitesimo con d .

A tale scopo osserviamo che l'assoluta continuità rispetto alle singole variabili della funzione $x_i(u, v)$, ($i = 1, 2, 3$), implica l'uguaglianza

$$\begin{aligned} \Omega_i(u, v) &= \int_{u_0}^u \{x'_{i_u}(\xi, v) - x'_{i_u}(u_0, v_0)\} d\xi + \\ &+ \int_{v_0}^v \{x'_{i_v}(u_0, \eta) - x'_{i_v}(u_0, v_0)\} d\eta, \end{aligned}$$

e quindi la disuguaglianza

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Omega_i(u, v)}{d} \right| &\leq \frac{1}{|u - u_0|} \left| \int_{u_0}^u \{x'_{i_u}(\xi, v) - x'_{i_u}(u_0, v_0)\} d\xi \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{|v - v_0|} \int_{v_0}^v \{x'_{i_v}(u_0, \eta) - x'_{i_v}(u_0, v_0)\} d\eta \right|. \end{aligned}$$

Donde la conclusione non appena si tenga conto che, a norma

di *jjj*) sussistono le uguaglianze

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{1}{u - u_0} \int_{u_0}^u x'_u(\xi, v) d\xi = x'_u(u_0, v),$$

$$\lim_{v \rightarrow v_0} \frac{1}{v - v_0} \int_{v_0}^v x'_v(u, \eta) d\eta = x'_v(u, v_0),$$

rispettivamente, su tutti i punti della verticale $u = u_0$ e della orizzontale $v = v_0$.

4. - Curve ammissibili, regolari in punto ordinario.

Diremo che una curva γ , ammissibile per una superficie *Q.O.R.*, è regolare nel punto $P_0(u_0, v_0)$ di R , ordinario per la superficie, quando

k) nell'intervallo J_t esiste un solo valore t_0 per il quale sono soddisfatte le

$$u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0,$$

kk) esistono le derivate $u'(t_0)$, $v'(t_0)$ non simultaneamente nulle,

kkk) risultano nulle, per $t = t_0$, le derivate degli integrali indefiniti rispettivamente delle funzioni $L_i(u(t))u'(t)$ se $u'(t_0) = 0$, delle funzioni $M_i(v(t))v'(t)$ se $v'(t_0) = 0$, $i = 1, 2, 3$ ¹³).

Ebbene, è immediato provare il seguente

TEOREMA 3. - Dato un punto ordinario per una superficie *Q.O.R.*, esistono sempre delle curve ammissibili regolari in esso.

¹³) È ovvio che questa condizione consente a t_0 quasi tutte le posizioni in J_t .

Infatti, se $P_0(u_0, v_0)$ è un punto ordinario per una superficie $Q.O.R.$, e se $P_1(u_1, v_1)$ è un punto della base R distinto da P_0 , basta porre

$$u(t) = u_0 + (u_1 - u_0)t, \quad v(t) = v_0 + (v_1 - v_0)t, \quad J_t = 0 \leq t \leq 1,$$

per ottenere una curva ammissibile γ regolare in P_0 .

5. - Le immagini regolari dei punti ordinari.

Diremo che l'immagine $P^0(x_1(u_0, v_0), x_2(u_0, v_0), x_3(u_0, v_0))$, nella superficie $Q.O.R.$ $S = (T, R)$, di un punto $P_0(u_0, v_0)$ di R ordinario per S , è regolare se la matrice

$$(5) \quad \begin{vmatrix} x'_{1u}(u_0, v_0) & x'_{2u}(u_0, v_0) & x'_{3u}(u_0, v_0) \\ x'_{1v}(u_0, v_0) & x'_{2v}(u_0, v_0) & x'_{3v}(u_0, v_0) \end{vmatrix}$$

ha caratteristica due.

Ciò premesso, sussiste il seguente

TEOREMA 4. - *Se $P^0(x_1(u_0, v_0), x_2(u_0, v_0), x_3(u_0, v_0))$ è l'immagine, nella superficie $Q.O.R.$ $S = (T, R)$, di un punto $P_0(u_0, v_0)$ di R ordinario per S , e se P^0 è regolare, allora l'immagine $\Gamma: x_i = x_i(u(t), v(t))$ di ogni curva $\gamma: u = u(t), v = v(t)$ ammissibile per S e regolare in P_0 è dotata in P^0 di tangente rappresentata parametricamente dalle equazioni*

$$(6) \quad x_i = x_i(u_0, v_0) + \{x'_{iu}(u_0, v_0)u'(t_0) + x'_{iv}(u_0, v_0)v'(t_0)\} \rho,$$

$$i = 1, 2, 3,$$

t_0 essendo il valore del parametro t per cui sussistono le

$$(7) \quad u'(t_0) = u_\rho, \quad v'(t_0) = v_\rho,$$

e ρ essendo il parametro.

Sia dunque

$$\gamma = (\mathcal{C}, J_t) : u = u(t) \quad , \quad v = v(t) \quad , \quad t \in J_t,$$

una curva ammissibile per la superficie *Q.O.R.*

$$S = (T, R) : x_i = x_i(u, v) \quad , \quad i = 1, 2, 3, \quad (u, v) \in R,$$

e sia $P_0(u_0, v_0)$ un punto di R ordinario per S . Supponiamo che γ sia regolare in P_0 , di guisa che, a norma di kk , esiste in J_t un solo valore t_0 per cui sussistono le (7).

Dobbiamo provare che la retta di equazioni parametriche (6) è la tangente alla curva

$$\Gamma = (T\mathcal{C}, J_t) : \widetilde{x}_i = x_i(u(t), v(t)) \quad , \quad i = 1, 2, 3, \quad t \in J_t,$$

nel punto $P^0(x_1(u(t_0), v(t_0)), x_2(u(t_0), v(t_0)), x_3(u(t_0), v(t_0)))$, immagine, in S , del punto $P_0(u(t_0), v(t_0))$.

Attesa la definizione di retta tangente ad una curva della superficie da noi assunta alla fine del n. 2, basta provare che sussistono le

$$(8) \left[\frac{d}{dt} x_i(u(t), v(t)) \right]_{t=t_0} = x'_{i_u}(u(t_0), v(t_0))u'(t_0) + x'_{i_v}(u(t_0), v(t_0))v'(t_0),$$

$$i = 1, 2, 3.$$

tali derivate risultando allora non simultaneamente nulle a norma di kk) e del fatto che è due la caratteristica della matrice (5).

Proveremo le (8) adattando, sostanzialmente, al caso attuale, un ragionamento da me svolto in [9].

Sono intanto evidenti le uguaglianze

$$\begin{aligned} & \frac{x_i(u(t_0 + h), v(t_0 + h)) - x_i(u(t_0), v(t_0))}{h} = \\ & = \frac{1}{h} \int_{u(t_0)}^{u(t_0+h)} x'_{i_u}(\xi, v(t_0 + h)) d\xi + \frac{1}{h} \int_{v(t_0)}^{v(t_0+h)} x'_{i_v}(u(t_0), \eta) d\eta, \end{aligned}$$

che seguono dalla proprietà I) delle superficie *Q.O.R.* Basta

allora provare che, per ogni fissato i , ($i = 1, 2, 3$), sussistono le

$$(9) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{u(t_0)}^{u(t_0+h)} x'_{i_u}(\xi, v(t_0+h)) d\xi = x'_{i_u}(u(t_0), v(t_0)) u'(t_0).$$

$$(10) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(t_0)} \int_{v(t_0)}^{v(t_0+h)} x'_{i_v}(u(t_0), \eta) d\eta = x'_{i_v}(u(t_0), v(t_0)) v'(t_0).$$

E svolgiamo il ragionamento per provare la (9) dato che la (10) si stabilisce in maniera analoga. Se $u'(t_0) = 0$, il secondo membro della (9) è nullo dato che, a norma di jj , $x'_{i_u}(u(t_0), v(t_0))$ è un numero reale finito. Ma nullo è pure il primo membro della (9) perchè sussiste la

$$\left| \frac{1}{h} \int_{u(t_0)}^{u(t_0+h)} x'_{i_u}(\xi, v(t_0+h)) d\xi \right| \leq \left| \frac{1}{h} \int_{u(t_0)}^{u(t_0+h)} L_i(\xi) d\xi \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} L_i(u(t)) u'(t) dt \right|,$$

e perchè, a norma di kkk , risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} L_i(u(t)) u'(t) dt = 0.$$

La (9) è dunque provata nel caso in cui $u'(t_0) = 0$. Se invece è $u'(t_0) \neq 0$, posto

$$\sigma(h) = u(t_0+h) - u(t_0),$$

si ha

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{u(t_0)}^{u(t_0+h)} x'_{i_u}(\xi, v(t_0+h)) d\xi = \\ & = \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h} \frac{1}{\sigma(h)} \int_{u(t_0)}^{u(t_0)+\sigma(h)} x'_{i_u}(\xi, v(t_0+h)) d\xi, \end{aligned}$$

con $\sigma(h)$ continua, nulla per $h = 0$, e, in un intorno di $h = 0$

(escluso $h=0$), sempre dello stesso segno di h o sempre di segno contrario ad h , appunto perchè $u'(t_0) \neq 0$. Allora a norma di *jjj*), segue ancora la (9) che, pertanto sussiste in ogni caso.

Il teorema è così provato.

6. - Il piano tangente ad una superficie *Q.O.R.* nei punti che sono immagini regolari di punti ordinari.

Abbiamo ormai tutti gli elementi per studiare l'esistenza del piano tangente ad una superficie *Q.O.R.*, senza rinunciare per tale piano alle principali proprietà di cui esso gode nelle classiche ipotesi della geometria differenziale.

Sussiste in proposito il seguente

TEOREMA 5. - *Se $P^0(x_1(u_0, v_0), x_2(u_0, v_0), x_3(u_0, v_0))$ è l'immagine, nella superficie *Q.O.R.* $S=(T, R)$, di un punto $P_0(u_0, v_0)$ ordinario per S , e se P^0 è regolare, allora il piano π_0 di equazioni parametriche*

$$(11) \quad x_i = x_i(u_0, v_0) + x'_{i_u}(u_0, v_0)\lambda + x'_{i_v}(u_0, v_0)\mu, \quad i = 1, 2, 3,$$

dove λ e μ sono i parametri, contiene le rette tangenti in P^0 alle curve immagini, in S , delle curve ammissibili regolari in P_0 ed è l'unico piano per cui sussiste la relazione

$$(12) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\overline{PR}}{\delta} = 0,$$

P essendo il punto di coordinate $(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$, R il piede della normale per P al piano π_0 e δ la distanza di P da P^0 .

Ed è appunto questo teorema che ci suggerisce di assumere il piano π_0 come piano tangente alla superficie S nel punto P^0 .

La dimostrazione del teorema enunciato può essere contenuta in un piano elementare adattando al caso attuale, per esempio, il ragionamento svolto da G. Scorza Dragoni¹⁴⁾ per

¹⁴⁾ V. loc. cit. in ¹¹⁾, nn. 141, 142, pp. 228-232.

stabilire l'esistenza del piano tangente ad una superficie considerata nelle ipotesi classiche. Comunque, anche per comodità del lettore, noi riporteremo per sommi capi quelle considerazioni.

Premettiamo che la prima parte del teorema è conseguenza immediata dei teoremi 3 e 4. Infatti, variando γ nell'insieme non vuoto delle curve ammissibili regolari in P_0 , ed essendo uguale a due la caratteristica della matrice (5), la retta tangente in P^0 a $\Gamma = T(\gamma)$, varia descrivendo, appunto, il piano di equazioni parametriche (11). Resta quindi da provare la seconda parte del teorema. Per stabilire l'unicità del piano che gode della proprietà espressa dalla (12), proveremo che se un piano π passa per P^0 e gode della proprietà (12), allora π contiene le rette tangenti in P^0 alle curve $\Gamma = T(\gamma)$ con γ ammissibile e regolare in P_0 .

Sia infatti m la retta tangente in P^0 ad una fissata $\Gamma = T(\gamma)$ e sia M il punto di intersezione del piano normale ad m condotto per il punto $P(x_1(u(t), v(t)), x_2(u(t), v(t)), x_3(u(t), v(t)))$. Attesa la proprietà asintotica di m , si ha

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overline{PM}}{\delta} = 0,$$

t_0 essendo quel valore di J_t per cui $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$ e δ essendo la distanza di P da P^0 .

A norma della (12), sussiste inoltre la relazione

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overline{PR}}{\delta} = 0,$$

e quindi, essendo

$$\overline{RM} \leq \overline{RP} + PM,$$

si ha

$$(13) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overline{RM}}{\delta} = 0,$$

Non solo. ma detto Q il piede della normale a π per M , la

(13) e la $\overline{QM} \leq \overline{RM}$ implicano la

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overline{QM}}{\delta} = 0,$$

e quindi la

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{QM}{MP^n} = 0,$$

sufficiente, quest'ultima, per assicurare l'appartenenza di m a π , visto che il rapporto QM/MP^0 è costante e vale il seno dell'angolo non ottuso formato dalla m con π .

Per concludere la dimostrazione del teorema resta da provare che il piano di equazioni parametriche (11) soddisfa effettivamente alla proprietà asintotica espressa dalla (12). È quello che ora faremo. Posto

$$\begin{aligned} (14) \quad E(u, v) &= \sum_1^3 x'_{i_u}(u, v)^2; \quad F(u, v) = \\ &= \sum_1^3 x'_{i_u}(u, v)x'_{i_v}(u, v); \quad G(u, v) = \sum_1^3 x'_{i_i}(u, v)^2, \end{aligned}$$

osserviamo che la regolarità del punto $P^0(x_1(u_0, v_0), x_2(u_0, v_0), x_3(u_0, v_0))$ implica le

$$E(u_0, v_0) > 0, \quad E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - F^2(u_0, v_0) > 0, \quad G(u_0, v_0) > 0,$$

e che la differenziabilità secondo Stolz delle funzioni $x_i(u, v)$ ($i=1, 2, 3$), nel punto ordinario $P_0(u_0, v_0)$ porge, per ogni punto (u, v) di R , le uguaglianze

$$\begin{aligned} (15) \quad x_i(u, v) &= x_i(u_0, v_0) + x'_{i_u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \\ &+ x'_{i_v}(u_0, v_0)(v - v_0) + \Omega_i(u, v), \quad (i = 1, 2, 3,) \end{aligned}$$

ove le funzioni $\Omega_i(u, v)$ sono infinitesime con

$$d = \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}$$

e quindi, per la continuità delle $x_i(u, v)$, con

$$\delta = \sqrt{\sum_1^3 |x_i(u, v) - x_i(u_0, v_0)|^2}$$

Per δ^2 si trova allora la nota espressione

$$\delta^2 = E(u_0, v_0)(u - u_0)^2 + 2F(u_0, v_0)(u - u_0)(v - v_0) + G(u_0, v_0)(v - v_0)^2 + \varepsilon,$$

con

$$\frac{\varepsilon}{d^2} = \sum_1^3 \left| \left(\frac{\Omega_i}{d} \right)^2 + 2 \left(\frac{\Omega_i}{d} \right) \left[x'_{i_u}(u_0, v_0) \frac{u - u_0}{d} + x'_{i_v}(u_0, v_0) \frac{v - v_0}{d} \right] \right|,$$

infinitesimo rispetto a d , e la forma quadratica

$$\eta^2 = E(u_0, v_0)(u - u_0)^2 + 2F(u_0, v_0)(u - u_0)(v - v_0) + G(u_0, v_0)(v - v_0)^2,$$

($\eta > 0$), definita positiva. Il rapporto $\frac{\eta^2}{d^2}$ ha allora un minimo positivo e il reciproco $\frac{d^2}{\eta^2}$ è allora limitato. Ciò implica, successivamente, le

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\varepsilon/\eta^2}{d} = 0 \quad , \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon/\eta^2}{\delta} = 0 \quad , \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\eta} = 1.$$

Ciò premesso, consideriamo il punto T di coordinate

$$x_i(u_0, v_0) + x'_{i_u}(u_0, v_0)(u - u_0) \frac{\delta}{\eta} + x'_{i_v}(u_0, v_0)(v - v_0) \frac{\delta}{\eta},$$

$$i = 1, 2, 3,$$

appartenente, quindi, al piano π_0 . Si verifica subito la $P^0T^2 = \delta^2$, mentre, assumendo le (15) come coordinate del punto P , si trova $\overline{PT}^2 = \left(1 - \frac{\delta}{\eta}\right)\eta^2 + \omega$ con ω conveniente infinitesimo di ordine superiore al secondo rispetto a d . Anche il rapporto

$\frac{\omega}{\eta^2}$ risulta allora infinitesimo con δ . Ciò implica

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{PT}}{\delta} \right)^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \left(1 - \frac{\delta}{\eta} \right)^2 + \frac{\omega}{\eta^2} \left(\frac{\eta}{\delta} \right)^2 \right\} = 0,$$

e pertanto la (12), visto che \overline{PR} non supera, certamente \overline{PT} .
Il teorema 5 è così completamente dimostrato.

7. - Elementi differenziali delle curve di una superficie Q.O.R.

Per le curve di una superficie Q.O.R., e parliamo sempre di curve che sono immagini di curve ammissibili della base, accenniamo, da ultimo, alcune proprietà che raccogliamo nel seguente

TEOREMA 6. - *Se*

$$\Gamma : x_i = x_i(u(t), v(t)) \quad , \quad (i = 1, 2, 3), \quad t \in J_t,$$

è l'immagine nella superficie Q.O.R.

$$S = (T, R) : x_i = x_i(u, v) \quad , \quad (i = 1, 2, 3), \quad (u, v) \in R,$$

di una curva

$$\gamma : u = u(t), v = v(t) \quad , \quad t \in J_t$$

ammissibile per S, allora le funzioni $x_i(u(t), v(t))$, $i = 1, 2, 3$, risultano assolutamente continue e, per quasi tutti i valori di t di J_t , sussistono le

$$\frac{d}{dt} x_i(u(t), v(t)) = x'_{iu}(u(t), v(t))u'(t) + x'_{iv}(u(t), v(t))v'(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Posto

$$E(u, v) = \sum_1^3 |x'_{iu}(u, v)|^2; \quad F(u, v) = \sum_1^3 x'_{iu}(u, v)x'_{iv}(u, v);$$

$$G(u, v) = \sum_1^3 |x'_{iv}(u, v)|^2,$$

la lunghezza di Γ è allora data dall'integrale

$$\int_{\Gamma} \sqrt{E(u(t), v(t))u'(t)^2 + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))v'(t)^2} dt$$

la forma differenziale quadratica

$$E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2,$$

porgendo, come nel caso classico, il quadrato dell'elemento d'arco su Γ .

Queste proprietà seguono dal mio teorema sulla derivazione delle funzioni composte¹⁵⁾ e dal noto teorema di Tonelli sulla rettificazione delle curve.

LAVORI CITATI

- [1] T. RADÒ, *Length and area*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. XXX. (1948).
- [2] L. CESARI, *Surface Area*, Princeton Univ. Press, N. J. (1955).
- [3] L. CESARI, *Sul teorema di densità in senso forte*, Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa, serie II, vol. VIII (1939), pp. 301-307.
- [4] G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XVII (1948), pp. 102-106.
- [5] G. SCORZA DRAGONI, *Una applicazione della quasi continuità semi-regolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continua rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Accad. Naz. Lincei, serie VIII, vol. XII (1952), pp. 55-61.
- [6] G. SCORZA DRAGONI, *Sulla derivazione degli integrali indefiniti*, ibidem, vol. XX (1956), pp. 711-714.
- [7] G. STAMPACCHIA, *Sopra una classe di funzioni in due variabili. Applicazioni agli integrali doppi del calcolo delle variazioni*, Giorn. di Mat. di Battaglini, vol. 79, pp. 169-208.
- [8] G. STAMPACCHIA, *Sopra una classe di funzioni di n variabili*, Ricerche di Mat., vol. I (1952), pp. 27-54.
- [9] M. VOLPATO, *Sulla assoluta continuità e sulla validità della classica formula di derivazione delle funzioni composte*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXVII (1957), pp. 37-47.

¹⁵⁾ V. [9].

- [10] M. VOLPATO, *Sulla derivabilità, rispetto a valori iniziali ed a parametri, delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine*, ibidem. vol. XXVIII (1958), pp. 71-106.
- [11] M. VOLPATO, *Sull'espressione differenziale: $p(x, y)dx + q(x, y)dy$ nell'ambito delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto all'altra variabile*, ibidem, vol. XXV (1956), pp. 303-306.
- [12] S. CINQUINI, *Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, serie II, vol. VIII (1939), pp. 271-283.
- [13] L. TIBALDO, *Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile. Applicazioni*, Rend. Accad. Naz. Lincei, serie VIII, vol. II (1947), pp. 146-152.