RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

Sugli autoomeomorfismi di una corona circolare privi di punti uniti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 33 (1963), p. 1-32

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__1_0>

SUGLI AUTOOMEOMORFISMI DI UNA CORONA CIRCOLARE PRIVI DI PUNTI UNITI

Memoria *) *di* GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (*a Padova*)

In questa Memoria mi occupo di quegli autoomeomorfismi di una corona circolare, che non hanno punti uniti, e che applicano le due circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa.

Per formulare con una certa concisione il risultato finale di questa ricerca, rammenterò che una curva semplice ed aperta è libera in un autoomeomorfismo, se è priva di punti in comune con la propria immagine nell'autoomeomorfismo; e dirò che una curva semplice ed aperta del piano reale euclideo ambiente aggira un punto del piano a meno di ε, se con l'aggiunta di un arco, che abbia un diametro minore del numero reale e positivo ε, si può completare in una curva semplice e chiusa, aggirante il punto. Ciò premesso, ecco il teorema che mi propongo di stabilire:

Nel piano reale euclideo ambiente, un autoomeomorfismo di una corona circolare, il quale non lasci alcun punto invariato, ed applichi le due circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa, o ammette come libera una curva semplice ed aperta, che sia contenuta nella corona e che congiunga le due circonferenze estreme della corona, oppure amette come libera una curva semplice ed aperta, che sia contenuta nella corona e che aggiri il centro della

---

*) Pervenuta in redazione il 24 luglio 1962.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

corona a meno di ε, il numero reale e positivo ε potendosi prefissare a piacere.

Raggiungerò questo risultato [1]) utilizzando un procedimento dimostrativo che posseggo già da tempo, e che trova il suo fondamento nelle considerazioni esposte nella mia Memoria *Sulle traslazioni piane generalizzate* [2]). A questa Memoria, indicata nel seguito con la lettera $\mathfrak{M}$, rimando per i teoremi preparatorii e per la terminologia [3]).

§ 1. Considerazioni e posizioni preliminari.

1. - L'ambiente al quale apparterranno tutti i punti, tutte le curve, le linee e le superficie che avremo occasione di considerare, è il piano reale euclideo.

E sia t un autoomeomorfismo della corona circolare $\mathfrak{S}$ dell'ambiente. La trasformazione topologica t applichi le due circonferenze estreme di $\mathfrak{S}$ ciascuna su se stessa, e non ammetta punti uniti.

Nel piano ambiente si fissi un sistema di coordinate polari. Il polo cada nel centro della corona, l'asse polare potendo invece essere scelto ad arbitrio. Come unità di misura per gli angoli si assuma l'angolo giro; e come unità di misura per le lunghezze, il raggio di quella interna delle due circonferenze che delimitano $\mathfrak{S}$, supponendo poi, senza introdurre per questo restrizioni essenziali, che il raggio dell'altra sia proprio il doppio di quella interna. La convenzione per la scelta del verso positivo delle rotazioni sarà fissata in seguito.

---

[1]) Conseguito nell'ambito dell'attività prestata presso i Gruppi matematici del Consiglio nazionale delle ricerche italiano.

[2]) Pubblicata nelle Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg, volume 21 (1957), pagg. 13-43.

[3]) Colgo poi l'occasione per correggere qualche errore di stampa ivi sfuggito: a pag. 30, rigo 11, invece di σ_0 e σ_1, si legga σ_1 e σ_0; a pag. 31, rigo 9, invece di $t^{-1}(\varepsilon_1)$ si legga $t^{-1}(\varepsilon_0)$; a pag. 35, rigo 6, invece di δ si legga δ_m.

Se ξ è uno degli argomenti del punto $\mathfrak{P}$ di $\mathfrak{S}$, ed η il modulo di $\mathfrak{P}$, tutti gli altri argomenti di $\mathfrak{P}$ si ottengono aggiungendo a ξ i numeri interi relativi, mentre il modulo risulta compreso fra 1 e 2, estremi inclusi.

Pertanto, se $\varphi(\xi, \eta)$ è uno degli argomenti di $\mathfrak{t}(\mathfrak{P})$ [4]), e $\chi(\xi, \eta)$ il modulo dello stesso punto, tutti gli altri argomenti di $\mathfrak{t}(\mathfrak{P})$ si ottengono aggiungendo a $\varphi(\xi, \eta)$ i numeri interi relativi, mentre il modulo è sempre compreso fra 1 e 2, estremi inclusi. Inoltre risulta identicamente

$$\chi(\xi, 1) = 1 \ , \qquad \chi(\xi, 2) = 2 \ , \tag{1}$$

attesa l'ipotesi relativa al comportamento di $\mathfrak{t}$ sulle circonferenze che delimitano $\mathfrak{S}$. Attesa la stessa ipotesi, e la mancanza di punti uniti nella $\mathfrak{t}$, le differenze

$$\varphi(\xi, 1) - \xi \ , \qquad \varphi(\xi, 2) - \xi \tag{2}$$

non possono mai assumere valori interi relativi.

2. - Si fissi ora, nel piano ambiente, un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. E si interpretino ξ ed $\eta - 1$ rispettivamente come ascissa, x, e come ordinata, y, di un punto P del piano.

Al variare di ξ e di η, cioè di x e di y, il punto P descrive la striscia S, delimitata dall'orizzontale dei punti che hanno l'ordinata nulla e da quella dei punti che hanno l'ordinata unitaria, questa orizzontale e quella appartenendo entrambe ad S.

Ed al punto corrente $\mathfrak{P}$ di $\mathfrak{S}$ vengon così rispettivamente associati i punti

$$\ldots, \ (x - 2, y), \ (x - 1, y), \ (x, y), \ (x + 1, y), \ (x + 2, y), \ldots$$

di S, e soltanto questi; tutto ciò in un senso ovvio, sul quale qui non è il caso di insistere.

3. - Se x ed y son di nuovo l'ascissa e l'ordinata del punto corrente P di S, la funzione univoca $f(x, y)$ è determinata a meno

---

[4]) **Naturalmente, se $\mathfrak{C}$ è un punto di $\mathfrak{S}$, o un insieme di punti di $\mathfrak{S}$, ed m un intero relativo, $\mathfrak{t}^m(\mathfrak{C})$ è l'immagine di $\mathfrak{C}$ nella potenza $\mathfrak{t}^m$ di $\mathfrak{t}$. Analogamente in seguito, in casi analoghi.**

di una costante additiva, se le si impone di esser definita in S, di esservi continua, e di esser sempre uguale, nel punto corrente (x, y), ad uno dei valori rispettivamente assunti da $\varphi(x, y+1)$. La costante additiva di cui si parla è poi intera, positiva o negativa o nulla; ed è individuata non appena si fissi il valore di $f(x, y)$ in un punto di S, per esempio nell'origine, O, del sistema cartesiano ortogonale introdotto nel piano. Il valore di $f(0, 0)$ si può scegliere poi ad arbitrio fra quelli possibili per $\varphi(0, 1)$; sicchè, in definitiva, il valore di quella tal costante additiva si può scegliere ad arbitrio nella totalità degli interi relativi.

Fissato il valore di $f(0, 0)$, fissata cioè la funzione $f(x, y)$, si ponga

$$g(x, y) = \chi(x, y+1) - 1 \ ,$$

di guisa che anche la funzione $g(x, y)$ è univoca e continua nella striscia S.

Al punto corrente (x, y) di S si associ, come rispettivo trasformato, il punto $(f(x, y), g(x, y))$ della stessa S. Si vien così a definire un autoomeomorfismo, t, di S, il quale porge, diciamo, una delle immagini rettificate di t [5]).

4. - Per l'autoomeomorfismo t, le (1) si traducono rispettivamente nelle identità

$$g(x, 0) = 0 \ , \quad g(x, 1) = 1 \ , \tag{3}$$

le quali esprimono la circostanza, ovvia, che t applica le due orizzontali delimitanti S ciascuna su se stessa. Inoltre è chiaro che risulta, sempre identicamente,

$$f(x+1, y) = f(x, y) + 1 \ , \quad g(x+1, y) = g(x, y) \ , \tag{4}$$

cioè, se si preferisce, che t è periodica, nella x, con periodo unitario.

Quest'ultima circostanza si può esprimere anche dicendo che t è permutabile con quell'autoomeomorfismo ϑ di S, che muta il punto corrente (x, y) di S rispettivamente nel punto $(x+1, y)$.

---

[5]) La terminologia riecheggia quella usata da Poincaré nella Memoria *Sur un théorème de géométrie* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXIII (1912), pagg. 375-407); se ne vegga la pagina 386.

E le (4), equivalendo alle

$$t\vartheta = \vartheta t\ , \tag{5}$$

porgono anche

$$t\vartheta^{-1} = \vartheta^{-1}t\ , \tag{6}$$

che equivale alle

$$f(x-1,\,y) = f(x,\,y) - 1\ , \qquad g(x-1,\,y) = g(x,\,y)\ , \tag{7}$$

e ci dice che t, naturalmente, è permutabile anche con ϑ^{-1}. Naturalmente non sarebbe difficile passare direttamente dalle (4) alle (7), senza ricorrere alla (5) ed alla (6).

La circostanza che le differenze (2) non possono mai assumere valori interi relativi, si riflette in quella analoga per le differenze

$$f(x,\,0) - x\ , \qquad f(x,\,1) - x\ ; \tag{8}$$

ne segue, attesa la continuità delle (8), che la differenza $f(x,\,0) - x$ o è sempre negativa, o è sempre positiva, o è sempre minore di 1, o è sempre maggiore di 1; e così via, nei riguardi di ogni intero relativo; analogamente per la differenza $f(x,\,1) - x$.

La circostanza che t sia priva di punti uniti, implica quella, che non ammette punti uniti nemmeno t.

5. - Per risalire da t a t, cioè per risalire da t alla sua immagine circolare [6]), basta ripartire i punti di S in classi, in tal guisa, che due punti di S appartengano alla medesima classe, se, e soltanto se, hanno ordinate uguali ed ascisse differenti per numeri interi relativi; e basta interpretare come immagine della classe che contiene il punto corrente $(x,\,y)$ quella che rispettivamente contiene il punto $(f(x,\,y),\ g(x,\,y))$.

6. - Insieme con t, si possono interpretare come immagini rettificate di t anche le trasformazioni

$$t\vartheta,\quad t\vartheta^{-1},\quad t\vartheta^{2},\quad t\vartheta^{-2},\dots\ ; \tag{9}$$

la cosa è implicita appunto nell'arbitrarietà insita nella funzione

---

[6]) Qui si può ripetere quanto si è detto nella nota precedente.

$f(x, y)$, che è individuata appunto a meno di una costante additiva, intera e relativa, arbitraria.

Indi tutto quello che siam venuti dicendo per t, sussiste anche per le trasformazioni topologiche (9). In particolare, anche le (9) sono prive di punti uniti.

E per individuare quella immagine rettificata t di $\mathbf{t}$, su cui fissare la nostra attenzione, noi imporremo a t di mutare l'origine, O, delle coordinate del sistema cartesiano ortogonale scelto, in un punto, $t(O)$, che abbia un'ascissa positiva e minore di 1.

7. - Fissata in tal guisa t, o, se si preferisce, $f(x, y)$, le circostanze poste in luce verso la fine del n° 4, assicurano che risulta sempre

$$f(x, 0) > x \ , \tag{10}$$

cioè, che, nella t, l'ascissa di ogni punto dell'asse x aumenta nel passare dal punto all'immagine; e che accanto alla (10) sussiste anche la

$$f(x, 0) < x + 1 \ , \tag{11}$$

di guisa che, nella t, l'ascissa di ogni punto dell'asse x aumenta sì nel passare dal punto all'immagine, ma aumenta di una quantità minore di 1.

In particolare, l'ascissa di $t^{-1}(O)$ è negativa e maggiore dell'unità negativa.

8. - Non è poi restrittivo aggiungere l'ipotesi che il punto $t(O)$ sia contenuto nel segmento con gli estremi in O e $\vartheta(t^{-1}(O))$, o, se si preferisce, nel segmento con gli estremi in O e $t^{-1}(\vartheta(O))$. Una tal ipotesi è senz'altro soddisfatta, se $\vartheta(t^{-1}(O))$ coincide con $t(O)$ [7]. Che se invece $t(O)$ e $\vartheta(t^{-1}(O))$ sono distinti, una tal ipotesi implica soltanto una scelta opportuna del verso positivo delle rotazioni in quel tal sistema di coordinate polari.

Nelle nostre ipotesi, la convenzione attuale implica che il punto $t^{-1}(O)$ è contenuto nel segmento con gli estremi in $\vartheta^{-1}(t(O))$ ed O, o, se si prefersice, in $t(\vartheta^{-1}(O))$ ed O. E viceversa.

---

[7]) Si noti che t e ϑt^{-1} possono coincidere identicamente.

9. - Nelle considerazioni del numero precedente si è ripresentata la seconda delle trasformazioni (9), cioè la

$$t\vartheta^{-1} ,$$

insieme con la sua inversa, la ϑt^{-1}, che coincide con

$$t^{-1}\vartheta ,$$

così come $t\vartheta^{-1}$ coincideva con $\vartheta^{-1}t$. La considerazione di una tale altra immagine rettificata $t\vartheta^{-1}$ di t, e la considerazione della sua inversa $t^{-1}\vartheta$, si riveleranno sempre più come essenziali. Tanto che ci farà comodo aver posto

$$w = t^{-1}\vartheta ,$$

di guisa che risulta

$$t\vartheta^{-1} = w^{-1} ,$$

mentre la trasformazione topologica w si presenta come un'immagine rettificata di t^{-1}.

10. - Per legittimare più facilmente l'applicazione della teoria esposta in $\mathfrak{M}$, non sarà poi male prolungare t, w e ϑ in tutto il piano, in guisa da convertirle in altrettante traslazioni piane generalizzate.

Allo scopo, basta supporre [8]) che in ciascuno dei due semipiani rispettivamente definiti dalla $y \leqslant 0$ e dalla $y \geqslant 1$, le trasformazioni prolungate, che saranno indicate anch'esse con t, w e ϑ, non alterino le ordinate dei punti trasformandi, e portino le semirette verticali, cioè quelle dirette come l'asse delle y, in semirette verticali.

L'autoomeomorfismo piano t è permutabile con ϑ anche dopo i prolungamenti; dopo i prolungamenti risulta sempre

$$w = t^{-1}\vartheta ,$$

---

[8]) Le considerazioni dei ni 10, 11, 12 e 13 del testo, riprendono cose dette nella mia Memoria su *Una dimostrazione dell'ultimo teorema geometrico di Poincaré* (Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova, volume XXV (1956), pagg. 1-104); se ne veggano il terzo paragrafo ed il quarto.

e ϑ è addirittura una traslazione piana ordinaria. D'ora in poi t, w e ϑ staranno sempre ad indicare le trasformazioni prolungate.

Le trasformazioni t e w sono uniformemente continue in tutto il piano; ed ammettono entrambe un numero positivo come estremo inferiore delle distanze dei punti del piano dalle rispettive immagini.

Previa l'eventuale trasformazione di t mediante un opportuno autoomeomorfismo del piano, non è poi restrittivo supporre, come faremo, che le ascisse dei punti $t(O)$ e $w(O)$ siano date da numeri razionali. Peraltro si tratta di un'ipotesi che ci servirà soltanto per rendere più spedita la prossima definizione del complesso K, che sarà utilizzato nello studio di t.

11. - Il numero razionale e positivo 2ι sia un sottomultiplo del numero 1/8, nonchè dell'ascissa di $t(O)$ e di quella di $w(O)$. E si ponga anzi che sia

$$\iota = 1/16\varkappa \ ,$$

e che le ascisse di $t(O)$ e $w(O)$ siano rispettivamente uguali a

$$2p\iota \quad \text{e} \quad 2q\iota \ ,$$

di guisa che $\varkappa$, p e q sono numeri naturali. Il numero ι sia poi così piccolo, che ogni sottoinsieme del piano sia libero tanto nella t quanto nella w, se il suo diametro è minore di 6ι; e si tratta di una condizione lecita appunto perchè le distanze del punto corrente del piano dai rispettivi trasformati in t ed in w hanno dei confini inferiori positivi e perchè t e w sono uniformemente continue.

Consideriamo indi i quadrati definiti dalle disuguaglianze

$$\begin{array}{lllll}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\ldots ; \ -3\iota \leqslant x \leqslant -\iota \, , & 2\iota \leqslant y \leqslant 4\iota & ; \ -\iota \leqslant x \leqslant \iota \, , & 2\iota \leqslant y \leqslant 4\iota & ; \ldots \\
\ldots ; \ -2\iota \leqslant x \leqslant 0 \, , & 0 \leqslant y \leqslant 2\iota & ; \ 0 \leqslant x \leqslant 2\iota \, , & 0 \leqslant y \leqslant 2\iota & ; \ldots \\
\ldots ; \ -3\iota \leqslant x \leqslant -\iota \, , & -2\iota \leqslant y \leqslant 0 & ; \ -\iota \leqslant x \leqslant \iota \, , & -2\iota \leqslant y \leqslant 0 & ; \ldots \\
\ldots ; \ -2\iota \leqslant x \leqslant 0 \, , & -4\iota \leqslant y \leqslant -2\iota & ; \ 0 \leqslant x \leqslant 2\iota \, , & -4\iota \leqslant y \leqslant -2\iota & ; \ldots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{array}$$

e suddividiamo i loro lati orizzontali (diretti cioè come l'asse delle x) in due parti uguali mediante i rispettivi punti medii, che sono altrettanti vertici di due altri quadrati dello stesso tipo. Ciascun quadrato dà luogo così ad una cella convessa, che ha due lati verticali (diretti cioè come l'asse delle y), lunghi 2ι, e quattro lati orizzontali, lunghi ι e distribuiti in due coppie di lati allineati.

E così otteniamo un complesso K di celle esagonali e convesse. Penseremo i lati ed i vertici di queste celle anch'essi come elementi di K, e li chiameremo anche i lati ed i vertici di K. Ma quando parleremo di celle di K intenderemo sempre di riferirci a quelle bidimensionali.

È ovvio che:

La somma delle celle di K esaurisce tutto il piano; ogni sottoinsieme limitato del piano ha punti in comune soltanto con finite celle di K;

che:

Due celle (distinte) di K, qualunque esse siano, o son disgiunte, oppure hanno in comune tutto un lato di K, e soltanto un tal lato; ogni lato di K appartiene a due, e soltanto a due, celle di K;

che:

Due lati (distinti) di K, qualunque essi siano, o sono disgiunti, oppure hanno in comune un vertice di K, e soltanto un tal vertice;

che:

Ogni vertice di K appartiene a tre, e soltanto a tre, celle di K e (quindi) a tre, e soltanto a tre, lati di K;

e, finalmente, che:

Ogni stella di K, cioè ogni somma di tre celle di K con un certo vertice in comune (il centro della stella), è libera sia nella t, sia nella w,

quest'ultima proposizione essendo conseguenza delle condizioni imposte al numero ι e del fatto che i diametri delle stelle di K sono minori di 6ι.

Le circostanze poste in luce assicurano che sono soddisfatte, nel caso attuale, le condizioni considerate nel n° 4 di $\mathfrak{M}$; e questo, tanto con riferimento alla traslazione piana generalizzata t, quanto con riferimento alla traslazione piana generalizzata w.

Sicchè tutta la teoria sviluppata in $\mathfrak{M}$ si può applicare al complesso K attuale, sia con riferimento a t, sia con riferimento a w.

Inoltre è ovvio che:

I punti O, $t(O)$ e $w(O)$ sono altrettanti vertici di K;

che:

Le stelle di K sono poi libere anche nella traslazione piana ordinaria ϑ,

perchè il numero ι non supera il numero $1/16$; e, finalmente che:

Il complesso K è applicato su se stesso dalla traslazione piana ordinaria ϑ,

nel senso che ogni vertice, ogni lato ed ogni cella di K è rispettivamente portato da ϑ in un tal vertice, in un tal lato, in una tal cella, e rispettivamente proviene, nella ϑ, da un tal vertice, da un tal lato, da una tal cella.

12. - Un sottocomplesso connesso di celle di K è internamente connesso, a norma della seconda proposizione del numero precedente. Ne segue che:

Se un sottocomplesso connesso di celle di K e la sua immagine nella ϑ (nella ϑ^{-1}) non hanno punti in comune, il sottocomplesso non ha punti in comune nemmeno con le sue immagini in ϑ^2, in ϑ^3, in ϑ^4,....,

e quindi non ne ha in comune nemmeno con le sue immagini in ϑ^{-2}, in ϑ^{-3}, in ϑ^{-4}, ecc., ecc. Nel fatto, basta applicare alla traslazione ϑ la proposizione 7) di $\mathfrak{M}$. Ed anzi:

La conclusione sussiste, anche se quel sottocomplesso connesso e la sua immagine nella ϑ (nella ϑ^{-1}) non hanno in comune punti che siano interni e all'uno e all'altra;

come si riconosce subito, se si ricorda bene quella tal proposizione 7) di $\mathfrak{M}$.

13. - Celle di K, le quali si possano mutare le une nelle altre mediante potenze di ϑ, saranno dette equivalenti, rispetto a ϑ.

Si considerino ora le celle di K contenute nella striscia S (le quali esauriscono la striscia S). E si distribuiscano queste celle in classi di equivalenza, rispetto a ϑ, ponendo due celle in una medesima classe, quando, e soltanto quando, esse sono equivalenti rispetto a ϑ. Classi di equivalenza che abbiano celle in comune coincidono.

La totalità di queste classi di equivalenza è finita. Sia N il numero dei suoi elementi. Allora è immediato che:

Se un sottoinsieme connesso di celle di K appartiene ad S e contiene più di N celle, esso ha in comune almeno una cella con la propria immagine nella ϑ.

Infatti, nel caso contrario il sottocomplesso avrebbe necessariamente almeno una cella in comune con almeno una delle sue immagini in ϑ^2, in ϑ^3, in ϑ^4, ...; e ci troveremmo in contraddizione con la seconda proposizione del n° 11 e l'ultima del numero precedente.

14. - Consideriamo di nuovo un sottocomplesso di celle di K, sempre contenute nella striscia S. Adesso il sottocomplesso potrà anche non esser più connesso, ma tutte le sue componenti connesse dovranno avere almeno un lato sul segmento OU, individuato dall'origine O delle coordinate cartesiane e dal punto unità U dell'asse delle ascisse. E mostriamo che:

La conclusione precedente sussiste anche in queste nuove ipotesi, naturalmente sempre se il sottocomplesso contiene più di N celle.

Allo scopo, consideriamo le celle di K contenute nel rettangolo individuato dalle disuguaglianze

$$\iota \leqslant x \leqslant 1 + \iota\,, \qquad -2\iota \leqslant y \leqslant 0\,,$$

ed aggreghiamole a quelle del sottocomplesso. Otteniamo un sottocomplesso connesso di celle di K. E questo sottocomplesso, nei riguardi della striscia individuata dalle disuguaglianze

$$-\infty < x < +\infty\,, \qquad -2\iota \leqslant y \leqslant 1\,,$$

si trova in condizioni analoghe a quelle contemplate nell'enunciato del numero precedente. Indi esso e la sua immagine nella ϑ hanno almeno una cella in comune, necessariamente contenuta in S, e quindi comune anche al sottocomplesso di partenza ed alla sua immagine nella ϑ.

15. - Per snellire il più possibile la prossima dimostrazione del teorema, chiuderemo questo paragrafo indicando degli altri lemmi.

Ed implicitamente fisseremo anche qualche convenzione ulteriore sul simbolismo.

Il segmento λ_0 con gli estremi nei punti O e $t(O)$ è, per t, un arco di traslazione, elementare rispetto a K. La suddivisione simpliciale h_0 subordinata su λ_0 da K è la spezzata con i vertici successivi nei punti dell'asse x aventi per ascisse rispettive 0, ι, 2ι, ..., $2p\iota$. La traiettoria π_0 generata da λ_0 nella t è l'orizzontale dei punti con l'ordinata nulla. Uno, Π_0, dei due campi adiacenti a π_0 è costituito dai punti con l'ordinata positiva, e l'altro, Π_0', da quelli con l'ordinata negativa.

Il segmento μ_0 con gli estremi nei punti O e $w(O)$ è, per w, un arco di traslazione, elementare rispetto a K. La suddivisione simpliciale k_0 subordinata su μ_0 da K è la spezzata con i vertici successivi nei punti dell'asse x aventi per ascisse rispettive $0, \iota, 2\iota, \dots, 2q\iota$. La traiettoria σ_0 generata da μ_0 nella w è l'orizzontale dei punti con l'ordinata nulla. Epperò uno, Σ_0, dei due campi adiacenti a σ_0 coincide con Π_0, e l'altro, Σ_0', con Π_0'.

Il segmento ν_0 con gli estremi nell'origine O delle coordinate cartesiane e nel punto unità U dell'asse delle ascisse è, per ϑ, un arco di traslazione, elementare rispetto a K. La suddivisione simpliciale l_0 subordinata su ν_0 da K è la spezzata con i vertici successivi nei punti dell'asse x aventi per ascisse rispettive 0, ι, 2ι, ..., $16\varkappa\iota$. La traiettoria τ_0 generata da ν_0 nella ϑ è di nuovo l'orizzontale dei punti con l'ordinata nulla. Epperò uno, T_0, dei suoi due campi adiacenti coincide con Π_0 e Σ_0, e l'altro, T_0', con Π_0' e Σ_0'.

A norma delle convenzioni del n° 8, introdotte senza imporre restrizioni essenziali:

Il punto $t(O)$ è contenuto nel segmento μ_0;

mentre, attese le (10) e (11):

I punti $t(O)$ e $w(O)$ sono entrambi interni al segmento ν_0;

e di qui segue che:

Tutti i lati della spezzata h_0 son lati anche per la spezzata k_0;

e segue altresì che:

Tutti i lati di k_0 son lati anche di l_0;

di guisa che anche tutti i lati della spezzata h_0 compaiono fra i lati della spezzata l_0.

16. - Sia ora h una spezzata semplice ed aperta, che abbia come lati soltanto lati di K e come estremi gli stessi estremi, O e $t(O)$, di h_0. Quei punti di h che non appartengono ad h_0 siano interni a Π_0; di guisa che, se si pone $k = h + t(O)w(O)$, anche k è una spezzata semplice ed aperta.

E sia c una spezzata semplice ed aperta, contenuta, in quanto insieme di punti, nell'insieme dei punti di h. Uno, P, degli estremi di c appartenga ad h_0; e l'altro, Q, sia interno ad h. Allora Q è diverso da O e $t(O)$, nonchè da $w(O)$; pertanto:

Se h è un arco di traslazione per la t, la curva c è libera nella t;
ed analogamente:

Se k è un arco di traslazione per la w, la curva c è libera nella w.

Ebbene, nel numero successivo noi proveremo che:

Se c è libera nella t e nella w, essa è necessariamente libera anche nella ϑ;
e questo, a norma di un risultato noto e ricordato anche nella 7) di $\mathfrak{M}$, ci darà senz'altro che:

Nelle ipotesi del teorema precedente, c non è libera soltanto in t, w e ϑ, ma anche in tutte le potenze t^m, w^m e ϑ^m, per poco che l'intero relativo m non sia nullo;
ma nel n° 18 proveremo altresì che:

Nelle solite ipotesi, c è libera anche in tutti i prodotti di t per le diverse potenze di ϑ;
vale a dire, che allora c è libera anche in tutte le immagini rettificate di t.

Indi, se c è per di più contenuta nella striscia S, basta risalire da S ad $\mathfrak{S}$, perchè c dia luogo, in $\mathfrak{S}$, ad una curva semplice ed aperta, libera nella t.

17. - Per le dimostrazioni, indichiamo con X il punto che ha la stessa ascissa di P e l'ordinata uguale a -1; e con Z quello che ha l'ordinata uguale a -1 e l'ascissa nulla.

I punti $t(Z)$, $w(Z)$ e $\vartheta(Z)$ hanno, rispettivamente, le stesse ascisse di $t(O)$, $w(O)$ e $\vartheta(O)$; le loro ordinate sono uguali a -1.

I segmenti λ, μ e ν abbiano come estremi rispettivi Z e $t(Z)$, Z e $w(Z)$, Z e $\vartheta(Z)$. Allora λ è un arco di traslazione per t; e μ per w; e ν per ϑ. L'orizzontale dei punti con l'ordinata uguale a -1 fornisce la traiettoria, π, generata da λ nella t; quella, σ, generata da μ nella w; e quella, τ, generata da ν nella ϑ. Nel piano, il luogo dei punti con l'ordinata maggiore di -1 fornisce uno, Π, dei due campi adiacenti a π; nonchè uno, Σ, di quelli adiacenti a σ; ed uno, T, di quelli adiacenti a τ.

Poniamo quindi $c' = XP + c$, di guisa che la spezzata semplice ed aperta c' è contenuta in Π, se si prescinde dal punto X, ed è libera tanto nella t, quanto nella w. E per concludere nel senso voluto dal terzo lemma del numero precedente, ammettiamo che c' e $\vartheta(c')$ abbiano dei punti in comune; e facciamo vedere che una simile ipotesi conduce ad un assurdo.

Nelle condizioni attuali, i punti comuni a c' e $\vartheta(c')$ sono diversi tanto da X, quanto da $\vartheta(X)$. Pertanto, nelle ipotesi attuali, e con riferimento a ϑ, la curva c' contiene uno pseudoarco di traslazione, ϱ, con l'origine nel punto X.

Sia Y il termine di ϱ. Il punto Y o è interno a $\vartheta(\varrho)$, o è interno a $\vartheta^{-1}(\varrho)$, com'è ricordato anche nella 8) di $\mathfrak{M}$. E le due circostanze si escludono a vicenda, com'è ricordato nella stessa proposizione.

Supponiamo che si presenti la prima circostanza. E indichiamo con ϱ' quel sottoarco di ϱ che ha gli estremi in X e $\vartheta^{-1}(Y)$. Indi poniamo

$$j = X\vartheta(X) + \vartheta(\varrho') + \varrho\,;$$

e denotiamo con J il sottoinsieme chiuso e limitato del piano, delimitato dalla curva semplice e chiusa j.

Nella ϑ, il segmento $X\vartheta(X)$ è un altro arco di traslazione atto a generare la traiettoria τ. E tutti i punti di ϱ diversi da X sono interni a $T(=\Pi)$. Epperò, giusta le considerazioni finali del n° 3 di $\mathfrak{M}$, l'insieme J è quasieccezionale per $X\vartheta(X)$ e T, rispetto a ϑ. Quindi gli interni di J e $\vartheta(J)$ sono disgiunti e sono contenuti in T, a norma, se non altro, di quanto è ricordato in quello stesso n° 3 di $\mathfrak{M}$.

Consideriamo ora la curva $t(\varrho)$. Essa parte dal punto $t(X)$, che è interno al segmento $X\vartheta(X)$ attese la (10) e la (11) e la definizione istessa di t all'esterno di S. Essa è contenuta in $\Pi(=T)$, a meno del punto $t(X)$. Essa non può incontrare ϱ, perchè ϱ è libera nella t, in quanto sottoarco di c', che è libera nella t. Essa non può incontrare $\vartheta(\varrho')$, che appartiene a $\vartheta(c')$, perchè essa appartiene a $t(c')$, e perchè $t(c')$ non può incontrare $\vartheta(c')$, atteso che c' è libera in $w^{-1}(=\vartheta^{-1}t)$. Dunque la curva $t(\varrho)$ è contenuta nell'interno dell'insieme J, se si eccettua il punto $t(X)$. Indi $\vartheta(t(\varrho))$ è contenuta nell'interno dell'insieme $\vartheta(J)$, se si eccettua il punto $\vartheta(t(X))$, che è diverso da $t(X)$. Ma gli interni di J e $\vartheta(J)$ sono disgiunti. Dunque $t(\varrho)$ e $\vartheta(t(\varrho))$ non hanno punti comuni, cosa assurda, perchè $\vartheta(t(\varrho)) = t(\vartheta(\varrho))$, e perchè l'intersezione di ϱ e $\vartheta(\varrho)$ non è vuota.

Il ragionamento esposto permette di esaurire anche il caso che si presenti la seconda di quelle circostanze; anche il caso, cioè, che Y sia interno a $\vartheta^{-1}(\varrho)$, o, se si preferisce, che $\vartheta(Y)$ sia interno a ϱ.

Nel fatto, indichiamo stavolta con ϱ' il sottoarco di ϱ con gli estremi in X e $\vartheta(Y)$. Indi poniamo

$$j = X\vartheta^{-1}(X) + \vartheta^{-1}(\varrho') + \varrho \,;$$

e denotiamo con J il sottoinsieme chiuso e limitato, delimitato, nel piano ambiente, dalla curva semplice e chiusa j attuale.

Nella ϑ, il segmento $\vartheta^{-1}(X)X$ è un arco di traslazione, atto a generare la traiettoria τ. E tutti i punti di ϱ, diversi da X, sono interni a $T(=\Pi)$. Quindi gli interni di J e $\vartheta^{-1}(J)$ sono disgiunti, ed appartengono a T, per motivi analoghi a quelli indicati nel caso precedente.

E consideriamo adesso la curva $t^{-1}(\varrho)$. Essa parte dal punto $t^{-1}(X)$, interno al segmento $\vartheta^{-1}(X)X$ a norma delle solite (10) e (11) e della definizione di t all'esterno di S. Essa è contenuta in $\Pi(=T)$, a meno del punto $t^{-1}(X)$. Essa non può incontrare ϱ, perchè ϱ è libera nella t^{-1}, in quanto appartiene a c', che è libera nella t^{-1}. Essa non può incontrare $\vartheta^{-1}(\varrho)$, che appartiene a $\vartheta^{-1}(c')$, perchè essa appartiene a $t^{-1}(c')$, e perchè $t^{-1}(c')$ non incontra

$\vartheta^{-1}(c')$, atteso che c' è libera nella $w(=\vartheta t^{-1})$. Dunque la curva $t^{-1}(\varrho)$ è contenuta nell'interno di J, se si eccettua il punto $t^{-1}(X)$. Indi $\vartheta^{-1}(t^{-1}(\varrho))$ è contenuta nell'interno di $\vartheta^{-1}(J)$, se si eccettua il punto $\vartheta^{-1}(t^{-1}(X))$, che è diverso da $t^{-1}(X)$. Ma gli interni di J e $\vartheta^{-1}(J)$ sono disgiunti. Dunque $t^{-1}(\varrho)$ e $\vartheta^{-1}(t^{-1}(\varrho))$ non hanno punti in comune. Cosa assurda, perchè $\vartheta^{-1}(t^{-1}(\varrho))$ coincide con $t^{-1}(\vartheta^{-1}(\varrho))$, e perchè l'intersezione di ϱ e $\vartheta^{-1}(\varrho)$ non è vuota. Donde la conclusione desiderata, anche nel caso che si presenti quella tal seconda circostanza.

Per quello che ha tratto al quarto lemma del numero precedente, non vi è nulla da aggiungere a quello che si è già detto: per dimostrarlo basta rifarsi alla circostanza ivi ricordata, secondo la quale ogni curva semplice ed aperta, libera in una traslazione piana generalizzata, non è libera soltanto nella traslazione e nell'inversa della traslazione, ma è libera anche nei loro quadrati, nei loro cubi, ecc., ecc.

18. - E passiamo finalmente alla dimostrazione dell'ultimo lemma, tuttora in sospeso.

Ferme le notazioni precedenti, noi sappiamo ormai che c' è libera in t, in w ed in ϑ; anzi che c' è libera in t, in w, in ϑ, in t^{-1}, in w^{-1} ed in ϑ^{-1}, nei loro quadrati, nei loro cubi, ecc., ecc.

Ed invece di dimostrare che c' è libera nei prodotti di t per le potenze di ϑ, noi potremo dimostrare che:

Essa è libera nei prodotti di t^{-1} per le potenze di ϑ.

Ancora un'osservazione. Nelle condizioni attuali, $t(c')$ e $t(\vartheta(c'))$ non hanno punti in comune, atteso che c' e $\vartheta(c')$ non ne hanno. Ma $t(\vartheta(c'))$ coincide con $\vartheta(t(c'))$. Pertanto, nelle condizioni attuali $t(c')$ è libera nella ϑ; ed in quanto tale, essa è libera anche in ϑ^{-1}, in ϑ^2, in ϑ^{-2}, in ϑ^3, ecc., ecc. In conclusione, nelle condizioni attuali le curve

$$t(c')\ ,\quad \vartheta(t(c'))\ ,\quad \vartheta^{-1}(t(c'))\ ,\quad \vartheta^2(t(c'))\ ,\quad \vartheta^{-2}(t(c'))\ ,\ldots\ ,$$

sono disgiunte a due a due; e la stessa circostanza si presenta anche per le curve

$$t^{-1}(c')\ ,\quad \vartheta(t^{-1}(c'))\ ,\quad \vartheta^{-1}(t^{-1}(c'))\ ,\quad \vartheta^2(t^{-1}(c'))\ ,\quad \vartheta^{-2}(t^{-1}(c'))\ ,\ldots\ ,$$

come si riconosce con lo stesso ragionamento, applicandolo a $t^{-1}(c')$) ed a $t^{-1}(\vartheta(c'))$.

Ciò premesso, consideriamo prima il caso della curva c' e delle sue immagini nelle trasformazioni ϑt^{-1}, $\vartheta^2 t^{-1}$, $\vartheta^3 t^{-1}$,..., riserbandoci di esaminare dopo quello della curva c' e delle sue immagini nelle trasformazioni $\vartheta^{-1}t^{-1}$, $\vartheta^{-2}t^{-1}$, $\vartheta^{-3}t^{-1}$,... .

La curva c' è libera nella w, cioè nella ϑt^{-1}; e ϑ è una traslazione piana ordinaria. Pertanto, o c' è libera anche in $\vartheta^2 t^{-1}$, $\vartheta^3 t^{-1}$, $\vartheta^4 t^{-1}$,...; ovvero si può determinare il numero r, intero e maggiore di 1, in tal guisa, che c' incontri la propria immagine nella $\vartheta^r t^{-1}$ e sia libera nelle $\vartheta^{r+1}t^{-1}$, $\vartheta^{r+2}t^{-1}$, $\vartheta^{r+3}t^{-1}$,... .

Nel primo sottocaso non vi è nulla da dire. Nel secondo, indichiamo stavolta con Y il primo punto dell'insieme $\vartheta^2(t^{-1}(c')) + ... + \vartheta^r(t^{-1}(c'))$ incontrato da chi percorra c' a partire da X; e con ϱ il sottoarco individuato su c' da X e Y.

Il punto Y appartiene ad una ed una sola delle curve $\vartheta^2(t^{-1}(c'))$,..., $\vartheta^r(t^{-1}(c'))$. E sia questa $\vartheta^s(t^{-1}(c'))$, di guisa che il numero intero s è maggiore di 1, e l'arco ϱ non incontra nessuna delle curve $\vartheta^m(t^{-1}(c'))$, se il numero intero e positivo m è diverso da s.

E stavolta indichiamo con ϱ' il sottoarco individuato su $\vartheta^s(t^{-1}(c'))$ da Y e $\vartheta^s(t^{-1}(X))$.

La curva semplice ed aperta $\varrho + \varrho'$ è contenuta nell'insieme $T(= \Sigma = \Pi)$, a meno degli estremi, X e $\vartheta^s(t^{-1}(X))$, che appartengono a τ. Inoltre il punto $\vartheta(X)$ è interno al segmento con gli estremi in X e $\vartheta^s(t^{-1}(X))$, atteso che s è maggiore di 1 e che l'ascissa di $\vartheta(t^{-1}(X))$ è maggiore di quella di X (per i soliti motivi). Indi $\varrho + \varrho'$ incontra la propria immagine nella ϑ [9]).

Ora questo è assurdo. Nel fatto, le curve ϱ e $\vartheta(\varrho)$ non si possono incontrare, perchè c' è libera nella ϑ. Le curve ϱ' e $\vartheta(\varrho')$ non si possono incontrare, perchè le curve $\vartheta^s(t^{-1}(c'))$ e $\vartheta^{s+1}(t^{-1}(c'))$ sono disgiunte, come si è già osservato. Le curve ϱ e $\vartheta(\varrho')$ non si possono incontrare, perchè ϱ non incontra nessuna delle curve

---

[9]) **Nelle condizioni attuali la cosa è immediata. E non vi è nessun bisogno di ricorrere al teorema di Brouwer ricordato nella 2) di $\mathfrak{M}$.**

$\vartheta^m(t^{-1}(c'))$, se il numero intero e positivo m è diverso da s. E per questo stesso motivo, la curva ϱ' non può incontrare $\vartheta(\varrho)$. Donde la prima parte della conclusione, nel senso che c' è libera in ϑt^{-1}, $\vartheta^2 t^{-1}$, $\vartheta^3 t^{-1}$,... .

Per quello che ha tratto alla seconda parte della dimostrazione, se c' è libera in $\vartheta^{-1}t^{-1}$, $\vartheta^{-2}t^{-1}$, $\vartheta^{-3}t^{-1}$,... non vi è nulla da dire.

Nel caso contrario, si determini il numero intero negativo s e si scelga il punto Y su c' in tal guisa, che il sottoarco ϱ individuato su c' da X ed Y abbia in comune Y, e soltanto Y, con la curva $\vartheta^s(t^{-1}(c'))$ e non incontri nessuna delle curve $\vartheta^m(t^{-1}(c'))$, se il numero intero e negativo m è diverso da s; tutto questo si può fare certamente, perchè ϑ è una traslazione piana ordinaria. E si indichi con ϱ' il sottoarco individuato su $\vartheta^s(t^{-1}(c'))$ dai punti $\vartheta^s(t^{-1}(X))$ ed Y.

La curva semplice ed aperta $\varrho + \varrho'$ è contenuta nell'insieme $T(= \Sigma = \Pi)$, a meno degli estremi, $\vartheta^s(t^{-1}(X))$ ed X, che appartengono a τ. Inoltre l'ascissa del punto $\vartheta^s(t^{-1}(X))$ è minore di quella di $\vartheta^{-1}(X)$, perchè il numero intero s è negativo e perchè l'ascissa di $t^{-1}(X)$ è minore di quella di X (per i soliti motivi). E l'ascissa di $\vartheta^{-1}(X)$ è ovviamente minore di quella di X. Indi il punto $\vartheta^{-1}(X)$ è interno al segmento con gli estremi in $\vartheta^s(t^{-1}(X))$ ed X. Epperò la curva semplice ed aperta $\varrho + \varrho'$ incontra la propria immagine nella ϑ^{-1}. E questo è assurdo. Infatti ϱ e ϱ' sono ovviamente libere nella ϑ^{-1}. Inoltre ϱ non può incontrare $\vartheta^{-1}(\varrho')$, per il modo come è stato scelto Y su c'. E ϱ' non può incontrare $\vartheta^{-1}(\varrho)$; chè altrimenti ϱ incontrerebbe $\vartheta(\varrho')$, cosa impossibile, quando $s < -1$, per il modo come è stato scelto Y su c', cosa impossibile, quando $s = -1$, perchè c' è libera nella t^{-1}.

§ 2. La dimostrazione del teorema.

19. - Ferme le solite notazioni (e qui rammentiamo esplicitamente quelle del n° 15), il complesso K ammette celle eccezionali per λ_0 e Π_0, rispetto a t, giusta la 27) di $\mathfrak{M}$.

E le celle di K, eccezionali, rispetto a t, per λ_0 e Π_0, sono ovviamente eccezionali anche per μ_0 e Σ_0, rispetto a w.

Ammettendo celle che sono eccezionali tanto per λ_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per μ_0 e Σ_0, rispetto a w, il complesso K ammette anche catene che sono eccezionali tanto per λ_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per μ_0 e Σ_0, rispetto a w.

Ed a proposito di siffatte catene, noi ora fisseremo alcune notazioni, che saranno mantenute in tutto il seguito.

Precisamente, la n-pla ordinata Δ_n di celle $\delta_1, \ldots, \delta_n$ del complesso K,

$$\Delta_n = (\delta_1, \ldots, \delta_n) , \tag{12}$$

sarà sempre una catena eccezionale tanto per λ_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per μ_0 e Σ_0, rispetto a w.

Dopo di ciò, λ_1 indicherà quell'arco di traslazione di t, che si ottiene aggiungendo δ_1 a λ_0; π_1 sarà la traiettoria generata da λ_1 nella t; Π_1 indicherà quel campo adiacente a π_1, che a norma della 35) di $\mathfrak{M}$ non contiene nessun punto di δ_1[10]), e Π_1' l'altro campo adiacente a π_1. Indi λ_2 sarà quell'arco di traslazione di t, che si ottiene aggiungendo δ_2 a λ_1; π_2 indicherà la traiettoria generata da λ_2 nella t; Π_2 sarà quel campo adiacente a π_2, che a norma della stessa 35) di $\mathfrak{M}$ non contiene nessun punto di δ_2, e Π_2' l'altro campo adiacente a π_2. E così via, fino a λ_n, che indicherà quell'arco di traslazione di t, che si ottiene aggiungendo δ_n a λ_{n-1}; fino a π_n, che sarà la traiettoria generata da λ_n nella t; e fino a Π_n, che indicherà il campo adiacente a π_n privo di punti in comune con δ_n, ed a Π_n' , che sarà l'altro campo adiacente a π_n.

Allo stesso modo, μ_1 indicherà quell'arco di traslazione di w, che si ottiene aggiungendo δ_1 a μ_0; σ_1 sarà la traiettoria generata da μ_1 nella w; Σ_1 indicherà quel campo adiacente a σ_1, che non contiene nessun punto di δ_1, e Σ_1' l'altro campo adiacente a σ_1. E naturalmente μ_2 sarà quell'arco di traslazione di w, che si ottiene aggiungendo δ_2 a μ_1; σ_2 indicherà la traiettoria generata da μ_2 nella w; Σ_2 sarà quel campo adiacente a σ_2, che non contiene

[10]) Si stia attenti alle differenze nel simbolismo. Nella 35) di $\mathfrak{M}$, gli attuali campi Π_0, Π_0', Π_1 e Π_1' erano indicati con Σ_0, Σ_0', Σ_1 e Σ_1'; e Π_1 era un poligono.

nessun punto di δ_2, e Σ_2' l'altro campo adiacente a σ_2. E così via, fino a μ_n, σ_n, Σ_n e Σ_n', il cui significato ormai è ovvio.

E ancora: h_1, h_2, ..., h_n rappresenteranno le suddivisioni simpliciali rispettivamente subordinate su λ_1, λ_2, ..., λ_n da K; e k_1, k_2, ..., k_n quelle rispettivamente subordinate da K su μ_1, μ_2, ..., μ_n.

20. - Ciò premesso, rammentiamo rapidamente alcuni risultati stabiliti in $\mathfrak{M}$. Si guadagnerà in chiarezza.

Intanto, a norma delle istesse definizioni contenute nel n° 8 di $\mathfrak{M}$:

Se r è un intero positivo o nullo, minore di n, l'intersezione di h_r e δ_{r+1} (di k_r e δ_{r+1}) è formata da lati di h_r (di k_r) interni ad h_r (a k_r);

mentre:

Quei lati di h_{r+1} (di k_{r+1}) che non appartengono ad h_r (a k_r) compaiono necessariamente fra i lati di δ_{r+1}.

Nelle cose dette è implicito che:

Le spezzate h_0, h_1, ..., h_n hanno tutte lo stesso primo e lo stesso ultimo lato, al pari delle spezzate k_0, k_1, ..., k_n;

sicchè:

Gli archi λ_1, λ_2, ..., λ_n hanno tutti gli stessi estremi, O e $t(O)$, di λ_0; gli archi μ_1, μ_2, ..., μ_n hanno tutti gli stessi estremi, O e $w(O)$, di μ_0.

Da questa, dalla prima proposizione di questo numero e dalla 21) di $\mathfrak{M}$ si deduce subito che:

Se r è un intero positivo o nullo, minore di $n-1$, ed s un intero maggiore di $r+1$, ma non superiore ad n, l'intersezione di h_r e δ_s (di k_r e δ_s) o è vuota, o è formata da lati di h_r (di k_r), interni ad h_r (a k_r),

le ipotesi del lemma implicando altresì che n è maggiore di 1.

E finalmente, ferme sempre le solite notazioni, rammentiamo che:

I campi Π_0, Π_1, ..., Π_n vanno decrescendo, ed i campi Π_0', Π_1', ..., Π_n' vanno crescendo;

che:

L'insieme $\delta_1 + \delta_2 + ... + \delta_n$ è contenuto tanto in $\Pi_0 + \lambda_0$,

quanto in $\Pi'_n + \lambda_n$, *e non ha nessun punto in* Π'_0 *e* Π_n;
ed analogamente, che:

I campi $\Sigma_0, \Sigma_1, ..., \Sigma_n$ *vanno decrescendo, ed i campi* $\Sigma'_0, \Sigma'_1, ..., \Sigma'_n$ *vanno crescendo*;
e che:

L'insieme $\delta_1 + \delta_2 + ... + \delta_n$ *è contenuto tanto in* $\Sigma_0 + \sigma_0$, *quanto in* $\Sigma'_n + \sigma_n$, *e non ha nessun punto in* Σ'_0 *e* Σ_n;
tutte queste ultime circostanze essendo fornite dalla 50) di $\mathfrak{M}$, formulata nelle condizioni attuali.

La sesta proposizione di questo numero a la 36) di $\mathfrak{M}$ porgono poi, che:

Le traiettorie π_0 *e* π_n *sono rispettivamente contenute negli insiemi* $\Pi'_n + \pi_n$ *e* $\Pi_0 + \pi_0$;
e l'ottava e quella 36) istessa, che:

Le traiettorie σ_0 *e* σ_n *sono rispettivamente contenute negli insiemi* $\Sigma'_n + \sigma_n$ *e* $\Sigma_0 + \sigma_0$.

21. - Ferme sempre le solite notazioni, passiamo a stabilire altri due lemmi, di notevole importanza per gli scopi attuali. Precisamente passiamo a mostrare che:

Nelle ipotesi poste, i lati della spezzata h_r $(r = 0, 1, ..., n)$ *sono lati anche per la spezzata* k_r,
cioè che λ_r appartiene a μ_r; ed a mostrare che:

Nelle solite ipotesi, quei lati di k_r *che non compaiono fra i lati di* h_r $(r = 0, 1, ..., n)$ *appartengono al segmento con gli estremi in* $t(O)$ *e* $w(O)$,
di guisa che μ_r si ottiene aggregando questo segmento a λ_r, e coincide con λ_r, se, e soltanto se, questo segmento degenera.

Se $r = 0$, questi lemmi si riducono alla prima ed alla terza proposizione del n° 15. Sicchè possiamo dimostrarli procedendo per induzione.

Ammettiamo dunque che le circostanze indicate si presentino per λ_r, μ_r, h_r e k_r, r essendo qui un intero, positivo o nullo, minore di n; e facciamo vedere che allora esse si presentano anche per λ_{r+1}, μ_{r+1}, h_{r+1} e k_{r+1}.

Ed incominciamo col mostrare che quei lati di k_r che non appartengono ad h_r, non possono essere nemmeno lati di δ_{r+1}.

La cosa è ovvia, se δ_{r+1} non ha lati su λ_0. Nel fatto, allora r è maggiore di 0 e δ_{r+1} è contenuta in Π_0, attesa la quinta e la settima proposizione del numero precedente. D'altra parte, quei làti di k_r che non appartengono ad h_r, sono contenuti nel segmento $t(O)w(O)$, attesa l'ipotesi induttiva, e quindi appartengono a π_0. Donde la conclusione parziale, almeno in questo primo caso.

Ma la cosa si stabilisce abbastanza facilmente anche se δ_{r+1} ha dei lati su λ_0. Nel fatto, allora δ_{r+1} è eccezionale anche per λ_0 e Π_0, rispetto a t, a norma della 54) di $\mathfrak{M}$. Indi, quei lati di δ_{r+1} che appartengono a π_0, appartengono anche ad h_0, se non altro per la settima proposizione del numero precedente (nel caso di $n = 1$). D'altra parte, quei lati di k_r che non appartengono ad h_r, sono contenuti nel segmento $t(O)w(O)$, attesa l'ipotesi induttiva; e questo segmento ha in comune con λ_0 soltanto il punto $t(O)$. Pertanto la conclusione parziale desiderata è raggiunta anche nel secondo caso.

A norma, ora, dei risultati del n° 8 di $\mathfrak{M}$, la sottopoligonale di k_r, sostituita nell'aggiunzione di δ_{r+1} a μ_r, ha come primo e come ultimo lato, su k_r, dei lati di δ_{r+1}, epperò di h_r, atteso quanto siamo venuti dicendo.

Di qui, e dal fatto che h_r è una sottopoligonale semplice della poligonale semplice k_r, si deduce subito che la sottopoligonale di h_r, sostituita nell'aggiunzione di δ_{r+1} a λ_r, coincide con quella di k_r, sostituita nell'aggiunzione di δ_{r+1} a μ_r.

Accanto alle poligonali sostituite, consideriamo adesso le corrispondenti poligonali aggiunte. Esse sono formate entrambe da lati di δ_{r+1}. Esse hanno gli stessi estremi delle corrispondenti poligonali sostituite. Esse, aggregate alle corrispondenti poligonali sostituite, dànno luogo a poligonali semplici e chiuse, che delimitano poligoni contenenti δ_{r+1}. Tutte queste circostanze discendono dai risultati del n° 8 di $\mathfrak{M}$. E tutte queste circostanze dicono ovviamente che coincidono anche le poligonali aggiunte, e non soltanto quelle sostituite. E di qui si trae appunto che i lati di h_{r+1} appartengono anche a k_{r+1}, perchè quelli di h_r appartengono a k_r, data l'ipotesi induttiva; e si trae altresì che quei lati di k_{r+1} che non appartengono ad h_{r+1}, coincidono con quei lati di k_r che non appartengono ad h_r, e quindi appartengono anch'essi al segmento $t(O)w(O)$, sempre per l'ipotesi induttiva. E le conclusioni desiderate sono raggiunte.

22. - Sia ora d un lato di h_n, epperò anche di k_n. E siano δ e δ^0 le due celle di K adiacenti a λ_n, lungo d; esse sono adiacenti anche a μ_n, lungo d. Ebbene, noi proveremo che:

Quella rivolta verso Π_n, lungo d, è rivolta anche verso Σ_n, lungo d.

Si ponga, per esempio, che δ sia quella rivolta verso Π_n, lungo d, l'ipotesi implicando soltanto una scelta opportuna nei simboli.

In quanto rivolta verso Π_n, lungo d, la cella δ contiene nell'interno dei punti di Π_n, epperò di Π_0, che contiene Π_n (n° 20, sesta proposizione).

Se d appartiene per di più ad h_0, la circostanza posta in luce implica che l'interno di δ appartiene a Π_0. Indi δ^0 ha l'interno in Π'_0, epperò in $\Sigma'_0(=\Pi'_0)$, e quindi in Σ'_n, che contiene Σ'_0 (n° 20, ottava proposizione). Pertanto δ^0 è rivolta verso Σ'_n lungo ogni lato che essa ha in comune con k_n. Quindi δ è rivolta verso Σ_n, lungo d.

Se d non appartiene ad h_0, scegliamo il numero intero r, positivo o nullo e minore di n, in guisa che d non appartenga ad h_r, ma appartenga ad h_{r+1}. Allora d è un lato di δ_{r+1} (n° 20, seconda proposizione). Inoltre δ è diversa da δ_{r+1}, atteso che l'interno di δ_{r+1} è contenuto in Π'_n (n° 20, settima proposizione) e che δ è rivolta verso Π_n, lungo d. Ma l'interno di δ_{r+1} è contenuto anche in Σ'_n, attesa la nona proposizione del n° 20. E la conclusione ormai è facile.

23. - La poligonale h_n è contenuta in $\Pi_0 + \pi_0$, al pari di tutta la traiettoria π_n, a norma del penultimo risultato del n° 20.

Ma la seconda e la settima proposizione di quel numero permettono di dire qualcosa di più. Nel fatto, a norma della seconda, quei lati di h_1 che non appartengono ad h_0, sono lati di δ_1; quei lati di h_2 che non appartengono ad h_1, sono lati di δ_2; e così via, fino a quei lati di h_n che non appartengono ad h_{n-1}, i quali sono lati di δ_n. Epperò basta ricordare la settima, per concludere che:

Quei lati di h_n che non appartengono ad h_0, hanno i loro interni nell'insieme aperto Π_0.

La poligonale h_n è semplice, al pari della poligonale rettilinea h_0. Inoltre essa ha come primo, e come ultimo lato, rispettivamente, il primo, e l'ultimo lato di h_0 (n° 20, terza proposizione).

Di qui, e dal risultato precedente, si deduce subito che quei lati di h_n che non appartengono ad h_0 si distribuiscono in tante poligonali semplici,

$$\alpha_{n.1}\,, \quad \alpha_{n.2}\,, \quad \ldots\,, \quad \alpha_{n.r_n}\,, \tag{13}$$

contenute in Π_0, a meno dei rispettivi estremi, diciamoli

$$P_{n.1} \text{ e } Q_{n.1}\,, \quad P_{n.2} \text{ e } Q_{n.2}\,, \quad \ldots\,, \quad P_{n.r_n} \text{ e } Q_{n.r_n}\,, \tag{14}$$

che sono interni ad h_0. E poichè ogni poligonale (13) ha come lati estremi due lati verticali, si deduce altresì che le poligonali (13) sono a due a due disgiunte, al pari dei segmenti

$$P_{n.1}Q_{n.1}\,, \quad P_{n.2}Q_{n.2}\,, \quad \ldots\,, \quad P_{n.r_n}Q_{n.r_n}\,,$$

diciamoli rispettivamente

$$\alpha_{0.1}\,, \quad \alpha_{0.2}\,, \quad \ldots\,, \quad \alpha_{0.r_n}\,,$$

supponendo, per esempio, che essi si succedano nell'ordine scritto, quando si percorre h_0 da O verso $t(O)$, e supponendo che una circostanza analoga si presenti anche per i punti (14), cioè per i punti $P_{n.1}$, $Q_{n.1}$, $P_{n.2}$, $Q_{n.2}$, ..., $P_{n.r_n}$ e $Q_{n.r_n}$.

Poniamo poi

$$\beta_{0.1} = \beta_{n.1} = Q_{n.1}P_{n.2}\,, \ \ldots, \qquad \beta_{0.r_n-1} = \beta_{n.r_n-1} = Q_{n.r_n-1}P_{n.r_n}$$

(se il numero intero r_n non è soltanto maggiore di zero, ma anche maggiore di uno). E poniamo altresì

$$\gamma_{n.1} = \alpha_{0.1} + \alpha_{n.1}\,, \ \ldots, \qquad \gamma_{n.r_n} = \alpha_{0.r_n} + \alpha_{n.r_n}\,,$$

nonchè

$$c_{0.n} = \alpha_{0.1} + \beta_{0.1} + \alpha_{0.2} + \ldots + \beta_{0.r_n-1} + \alpha_{0.r_n}\,,$$

e

$$c_n = \alpha_{n.1} + \beta_{n.1} + \alpha_{n.2} + \ldots + \beta_{n.r_n-1} + \alpha_{n.r_n}\,,$$

di guisa che le poligonali

(15) $$\gamma_{n.1}, \quad \dots, \quad \gamma_{n.r_n}$$

sono semplici e chiuse, e le poligonali $c_{0.n}(=P_{n.1}Q_{n.r_n})$ e c_n semplici e aperte.

24. - I poligoni delimitati dalle poligonali (15) vengano rispettivamente denotati con i simboli

(16) $$\Gamma_{n.1}, \quad \dots, \quad \Gamma_{n.r_n}.$$

Essi sono formati da aggregati di celle di K; e ciascuno di essi ha almeno un lato su h_0. Inoltre:

Se l'intero r_n è maggiore di 1, *essi sono a due a due disgiunti*;

peraltro:

Aggregati al segmento $c_{0,n}$ essi dànno luogo, in ogni caso, ad un continuo,

che sarà indicato con C_n, e che è limitato.

Indichiamo poi con D_n la totalità di quelle celle di K che concorrono a formare i poligoni (16). Allora:

Le celle di Δ_n appartengono tutte al sottocomplesso D_n del complesso K,

come segue dalla 62) di $\mathfrak{M}$. Inoltre D_n possiede come componenti connesse i poligoni (16). Pertanto:

Tutte le componenti connesse di D_n hanno almeno un lato sul segmento OU;

epperò:

Fermo il resto, se la catena Δ_n è per di più contenuta nella striscia S e la sua lunghezza n è maggiore del numero N di quelle tali classi di equivalenza, il complesso D_n e la sua immagine nella ϑ hanno almeno una cella in comune,

come segue subito dalla proposizione dimostrata nel n° 14.

Le condizioni imposte alla catena Δ_n nell'enunciato precedente non sono peraltro compatibili. La cosa risulterà esplicitamente nel seguito.

25. - Le poligonali h_n, k_n e c_n soddisfanno a tutte le condizioni imposte nel n° 16 alle poligonali h, k e c. La cosa discende subito dai lemmi del n° 21, dalla proposizione del n° 23, e dalla circostanza che c_n è contenuto nell'interno di h_n, essendo contenuta in h_n e non contenendo nè il primo, nè l'ultimo lato di h_n.

Inoltre h_n e k_n sostengono archi di traslazione rispetto a t e w, nell'ordine. Indi, a norma dei risultati del n° 16:

La curva c_n è libera in t, in w, in ϑ, in t^{-1}, in w^{-1} ed in ϑ^{-1}, nei loro quadrati, nei loro cubi, ecc., ecc.;

e sempre per gli stessi risultati:

Essa è libera anche in tutti i prodotti di t per le diverse potenze di ϑ,

cioè in tutte le immagini rettificate dell'autoomeomorfismo $\mathbf{t}$ della corona $\mathfrak{S}$.

26. - Supponiamo ora che almeno una delle celle di Δ_n contenga punti con l'ordinata maggiore di 1, oppure uguale ad 1.

Allora almeno uno dei poligoni (16) incontra tanto l'orizzontale dei punti con l'ordinata nulla, quanto quella dei punti con l'ordinata unitaria. Epperò la stessa circostanza si presenta anche per una delle poligonali (13), almeno. Pertanto la curva c_n contiene almeno una curva semplice ed aperta, p_n, che attraversa la striscia S, nel senso appunto che p_n è contenuta nell'interno di S, a meno degli estremi, che appartengono, uno, all'asse delle x, e l'altro, alla solita orizzontale dei punti con l'ordinata unitaria.

In quanto porzione di c_n, la curva p_n è libera in tutte le immagini rettificate di $\mathbf{t}$, ed in tutte le potenze di ϑ secondo esponenti diversi da zero. Inoltre essa è contenuta nella striscia S. Pertanto basta risalire da S ad $\mathfrak{S}$, per riconoscere che p_n dà luogo, in $\mathfrak{S}$, ad una curva, che è aperta e semplice, che è libera nella $\mathbf{t}$, e che congiunge le due circonferenze estreme di $\mathfrak{S}$.

Sicchè, se si presenta il caso contemplato all'inizio di questo numero, il nostro teorema della prefazione è dimostrato.

27. - Quindi, nella dimostrazione del teorema possiamo limitarci al caso che tutte le catene Δ_n, eccezionali tanto per λ_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per μ_0 e Σ_0, rispetto a w, siano costituite da celle contenute nella striscia S. E potremo anzi limitarci al caso che tutte queste catene siano formate da celle contenute nella striscia S^* individuata dalle disuguaglianze

$$(17) \qquad -\infty < x < +\infty\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 - 2\iota\,,$$

atteso che altrimenti fra quelle catene ve ne sarebbe almeno una con un lato di una delle sue celle sito sull'orizzontale dei punti con l'ordinata unitaria.

E noi mostreremo che:

Nelle ipotesi attuali, la lunghezza n di una tal catena Δ_n, eccezionale tanto per λ_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per μ_0 e Σ_0, rispetto a w, non può superare il numero N delle classi di equivalenza nelle quali sono state distribuite le celle di K contenute in S [11]),
giustificando così anche l'affermazione delle ultime righe del n° 24.

Ragioneremo per assurdo, supponendo che la solita catena Δ_n abbia una lunghezza maggiore di N, e sia contenuta in S^*, epperò in S.

Il continuo C_n del n° 24 non può contenere $\vartheta(C_n)$; ed il continuo $\vartheta(C_n)$ non può contenere C_n. Tutto questo, perchè ϑ è una traslazione piana ordinaria, e perchè C_n è limitato.

Inoltre C_n e $\vartheta(C_n)$ hanno in comune almeno una cella di K, atteso che la circostanza si presenta per D_n e $\vartheta(D_n)$, a norma dell'ultima proposizione del n° 24.

Indi la frontiera, $c_n + c_{0.n}$, di C_n incontra quella, $\vartheta(c_n) + \vartheta(c_{0.n})$, di $\vartheta(C_n)$.

D'altra parte $c_{0.n}$ non incontra $\vartheta(c_n) + \vartheta(c_{0.n})$, e $\vartheta(c_{0.n})$ non incontra $c_n + c_{0,n}$; tutto questo, perchè $c_{0,n}$ è interno al segmento v_0 e perchè i punti di c_n esterni a $c_{0,n}$ sono interni a T_0. Indi c_n incontra $\vartheta(c_n)$, cosa impossibile (n° 25). E l'assurdo porge la conclusione.

28. - Nella dimostrazione del nostro teorema possiamo limitarci ormai al caso: che tutte le catene (12), eccezionali tanto per λ_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per μ_0 e Σ_0, rispetto a w, siano contenute nella striscia S^*, individuata dalle (17); e che le loro lunghezze descrivano un insieme numerico limitato, epperò provvisto del massimo, atteso che si tratta di un insieme di numeri naturali [12]).

---

11) E volendo si potrebbe dimostrare che n è minore di $N - 8\varkappa$.

12) Nelle considerazioni dei ni 26 e 27 è implicito che questo caso si presenta certamente, se tutte le curve semplici ed aperte che attra-

Ebbene, postici in questo caso, supponiamo che la lunghezza n della solita catena Δ_n raggiunga proprio questo massimo valore possibile.

29. - Il primo lato di h_n è di prima categoria, per λ_n e Π_n, rispetto a t; e l'ultimo di seconda. Tutto ciò in conformità della 25) di $\mathfrak{M}$.

Su h_n consideriamo, a partire da O, l'ultimo lato di prima categoria, rispetto a λ_n, Π_n e t; ed il primo di seconda. Diciamo d' quello e d'' questo. Allora d' e d'' non hanno punti in comune, giusta la 24) e la 26) di $\mathfrak{M}$; e d' precede d'', giusta la 28) della stessa $\mathfrak{M}$.

Fra d' e d'' sono compresi uno o più lati di h_n, quelli speciali per λ_n, Π_n e t. Questi ultimi son tutti eccezionali, per λ_n, Π_n e t, giusta la 29) di $\mathfrak{M}$, e forniscono il sottoarco di λ_n speciale rispetto a Π_n, t e K.

Come abbiamo già visto nel n° 21, tutti i lati della poligonale h_n son lati anche per la poligonale k_n. Ma noi ora vedremo che:

---

versano S incontrano le rispettive immagini nella t. Sicchè questo caso si presenta certamente, se la (10), cioè la $f(x, 0) > x$, è accompagnata dalla $f(x, 1) < x$; epperò anche se sono verificate le ipotesi dell'ultimo teorema geometrico di Poincaré, nella sua formulazione topologica. E spero di potermi esimere da ulteriori indicazioni bibliografiche, rimandando, se proprio occorre, alle mie due Memorie citate in [2]) e in [8]), a quella *Sugli autoomeomorfismi del piano privi di punti uniti* (Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova, volume XVIII (1949), pagg. 1-53), ed a quella dedicata ad *Una dimostrazione del teorema di Brouwer sulle traslazioni piane generalizzate* (Annali di matematica pura ed applicata, serie IV, volume XXXIX (1955), pagg. 1-10); ed avvertendo che ai lavori ivi indicati bisogna aggiungere una Nota *Sugli autoomeomorfismi periodici di una striscia*, dovuta ad L. de Vito (e pubblicata nei Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova, volume XXVI (1956), pagg. 124-138). Peraltro voglio rammentare che quando tutte le curve semplici ed aperte, che attraversano S, incontrano le rispettive immagini nella t, allora t ammette, come libera, tutta una curva semplice e chiusa, che sia contenuta nella corona $\mathfrak{S}$ e che aggiri il centro della corona {la cosa, come ha osservato de Vito nel lavoro ricordato in questo momento è implicita tanto nella mia Memoria citata in [8]), quanto nella dimostrazione del teorema di Poincaré data da von Kerékjártó nel 1928}.

Nelle ipotesi attuali, nessun lato di h_n, speciale per λ_n, Π_n e t, può essere eccezionale per μ_n, Σ_n e w;
anzi, più generalmente, che:

Nelle ipotesi attuali, nessun lato di h_n, eccezionale per λ_n, Π_n e t, può essere eccezionale per μ_n, Σ_n e w.

Sia d un tal lato eccezionale di h_n. E δ sia la cella di K adiacente a λ_n, lungo d, e rivolta verso Π_n, lungo d. Allora δ è eccezionale per λ_n, Π_n e t. Inoltre, in quanto cella adiacente a μ_n, lungo d, essa è rivolta verso Σ_n, lungo d, giusta la proposizione del n° 22. Sicchè, se essa fosse eccezionale anche per μ_n, Σ_n e w, la catena $(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n, \delta)$ sarebbe eccezionale tanto per λ_0, Π_0 e t, quanto per μ_0, Σ_0 e w, ed avrebbe come lunghezza $n + 1$. Cosa impossibile, atteso il significato attuale del numero n. E la conclusione è raggiunta.

A questo punto è immediato che:

Nelle stesse ipotesi, i lati di h_n, speciali per λ_n, Π_n e t, risultano, in quanto lati di k_n, o tutti di prima categoria, per μ_n, Σ_n e w, o tutti di seconda;
nel fatto, basta ricordare la 26) di $\mathfrak{M}$, accanto alla prima proposizione di questo numero.

30. - Supponiamo dunque che tutti i lati di h_n, speciali per λ_n, Π_n e t, siano della seconda categoria, in quanto lati di k_n, rispetto a μ_n, Σ_n e w.

In questo caso, indichiamo con d_{n+1} il primo dei lati di h_n speciali per λ_n e Π_n, rispetto a t; cioè quello, che è speciale per λ_n e Π_n, rispetto a t, e che ha un estremo in comune con d'. Indichiamo poi con δ' la cella di K adiacente a λ_n, lungo d', e rivolta verso Π_n, lungo d'; e con δ_{n+1} quella adiacente a λ_n, lungo d_{n+1}, e rivolta verso Π_n, lungo d_{n+1}.

Le celle δ' e δ_{n+1} hanno in comune il vertice fornito dall'estremo comune a d' e d_{n+1}; epperò esse appartengono ad una medesima stella di K.

Inoltre δ', in quanto di prima categoria rispetto a λ_n, Π_n e t, contiene almeno un punto di $t^{-1}(\lambda_n)$; e δ_{n+1}, in quanto di seconda categoria rispetto a μ_n, Σ_n e w, contiene almeno un punto di $w(\mu_n)$.

Ebbene, indichiamo con Q_n un punto di μ_n siffatto, che $w(Q_n)$

appartenga a δ_{n+1}; e con R_n un punto di λ_n siffatto, che $t^{-1}(R_n)$ appartenga a δ'.

E mostriamo che il punto Q_n è interno a λ_n.

Nel fatto, δ_{n+1} appartiene a $\Pi_0 + \lambda_0$, attesa la settima proposizione del n° 20, perchè la catena $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n+1})$ è eccezionale per λ_0, Π_0 e t. Inoltre δ_{n+1} non contiene nè l'origine, nè il termine di λ_n, in quanto essa è eccezionale per λ_n, Π_n e t; pertanto δ_{n+1} non contiene nemmeno l'origine ed il termine di λ_0, attesa la quarta proposizione dello stesso n° 20. Quindi, un punto di δ_{n+1}, situato su $w(\mu_n)$, cioè su $w(\lambda_n) + \vartheta(O)w^2(O)$, non può coincidere con $w(O)$ e non può appartenere al segmento, eventualmente degenere, $\vartheta(O)w^2(O)$, il quale appartiene a π_0 e non ha punti in comune con λ_0. Epperò $w(Q_n)$ è interno a $w(\lambda_n)$, come si voleva.

Mostriamo adesso che Q_n ed R_n sono distinti, se ι è abbastanza piccolo.

Allo scopo, basta far vedere che la distanza fra R_n e $\vartheta(Q_n)$ è minore di 1, quando ι è abbastanza piccolo. Epperò basta dimostrare che la distanza fra R_n e $\vartheta(Q_n)$, o, se si preferisce, che la distanza fra $t^{-1}(R_n)$ e $t^{-1}(\vartheta(Q_n))$ tende a zero, quando ι tende a zero. Ora $t^{-1}(R_n)$ appartiene a δ' e $t^{-1}(\vartheta(Q_n))$ appartiene a δ_{n+1}; inoltre δ' e δ_{n+1} appartengono ad una medesima stella di K e i diametri delle stelle di K sono minori di 6ι; epperò quella distanza tende appunto a zero, quando ι tende a zero.

Indi, se ι è abbastanza piccolo, Q_n ed R_n individuano su h_n una spezzata semplice ed aperta, c_n^*.

Poniamo $P_n = O$, ovvero $P_n = t(O)$, secondo che R_n appartiene alla poligonale individuata su h_n da O e Q_n, ovvero a quella individuata da Q_n e $t(O)$.

Allora R_n appartiene sempre alla poligonale c_n individuata su h_n da P_n e Q_n. E basta applicare a c_n i lemmi del n° 16, per concludere che c_n^* è libera in t, in t^{-1}, in ϑ, in ϑ^{-1}, nei loro quadrati, nei loro cubi, ecc., ecc., nonchè in tutti i prodotti di t per potenze di ϑ.

Supponiamo ora ι tanto piccolo, che la distanza fra R_n e $\vartheta(Q_n)$ non sia minore soltanto di 1, ma sia minore anche di un certo numero reale e positivo ζ, che ci riserbiamo di fissare.

Spostiamoci sul segmento $R_n\vartheta(Q_n)$, partendo da R_n, fino ad incontrare il primo punto, $\vartheta(Q'_n)$, comune al segmento ed a $\vartheta(c^*_n)$, e senza escludere che $\vartheta(Q'_n)$ possa coincidere con R_n. Indi ritorniamo indietro, su $\vartheta(Q'_n)R_n$, fino ad incontrare il primo punto, R'_n, comune a $\vartheta(Q'_n)R_n$ e c^*_n, e senza escludere che R'_n possa coincidere con $\vartheta(Q'_n)$.

La distanza fra i punti R'_n e $\vartheta(Q'_n)$ è minore di 1 (e di ζ). Quindi Q'_n ed R'_n sono distinti. E individuano, su c^*_n, una spezzata semplice ed aperta, c'_n, che è libera in t, in t^{-1}, in ϑ, in ϑ^{-1}, nei loro quadrati, nei loro cubi, ecc., ecc., nonchè in tutti i prodotti di t per potenze di ϑ.

La spezzata $c'_n + R'_n\vartheta(Q'_n)$, diciamola c''_n, è un arco di traslazione nella ϑ: si consideri infatti la striscia, eventualmente degenere, riempita dalle orizzontali per i punti di c'_n (e per quelli delle immagini di c'_n nelle diverse potenze di ϑ); in questa striscia, $\vartheta(c'_n)$ separa ovviamente c'_n da $\vartheta^2(c'_n)$, epperò separa anche c'_n dal segmento $\vartheta(R'_n)\vartheta^2(Q'_n)$; donde la conclusione, ormai facile. La traiettoria generata da c''_n nella ϑ è una linea semplice, aperta, propria, periodica nella x, col periodo unitario [13]).

Se si risale da S ad $\mathfrak{S}$, la curva c'_n dà luogo ad una curva semplice ed aperta, $\mathfrak{c}'_n$, contenuta in $\mathfrak{S}$ e libera nella $\mathfrak{t}$; e la curva c''_n dà luogo ad una curva semplice e chiusa, $\mathfrak{c}''_n$, che è contenuta in $\mathfrak{S}$ ed aggira il centro di $\mathfrak{S}$. Inoltre $\mathfrak{c}''_n$ si ottiene da $\mathfrak{c}'_n$ mediante l'aggiunta di un arco, il cui diametro si può supporre minore del numero reale positivo ε prefissato, pur di supporre abbastanza piccolo il numero reale positivo ζ, tuttora in nostro arbitrio.

31. - Rimane da considerare l'altro caso, quello che tutti i lati di h_n, speciali per λ_n, Π_n e t, siano della prima categoria, in quanto lati di k_n, e con riferimento a μ_n, Σ_n e w.

In questo caso indichiamo con d_{n+1} l'ultimo dei lati di h_n speciali per λ_n, Π_n e t; cioè quello che è speciale per λ_n, Π_n e t e che ha un estremo in comune con d''. Ed indichiamo con δ_{n+1} la cella adiacente a λ_n, lungo l'attuale lato d_{n+1}, e rivolta verso

---

[13]) Per la terminologia, si veggano le pagg. 2 e 4 della Memoria citata in [8]).

Π_n, lungo l'attuale lato d_{n+1}; e con δ'' quella adiacente a λ_n, lungo d'', e rivolta verso Π_n, lungo d''.

Allora δ'' e d_{n+1} appartengono ad una medesima stella di K. Inoltre δ'' contiene almeno un punto di $t(\lambda_n)$; e δ_{n+1} contiene almeno un punto di $w^{-1}(\mu_n)$.

Ebbene, indichiamo con Q_n un punto di μ_n siffatto, che $w^{-1}(Q_n)$ appartenga a δ_{n+1}; e con R_n un punto di λ_n siffatto, che $t(R_n)$ appartenza a δ''.

Il punto Q_n è interno a λ_n. Infatti, δ_{n+1} appartiene a $\Pi_0 + \lambda_0$ e non contiene O e $t(O)$, come si riconosce con ragionamenti analoghi a quelli svolti nel numero precedente, a proposito di una circostanza analoga. E di qui si trae appunto, sempre in maniera analoga, che un punto comune a δ_{n+1} e $w^{-1}(\mu_n)$, cioè a δ_{n+1} e $w^{-1}(\lambda_n) + w^{-1}(t(O))O$, è necessariamente interno a $w^{-1}(\lambda_n)$.

Dopo di ciò si riconosce di nuovo che Q_n ed R_n sono distinti, quando ι è abbastanza piccolo; anzi che la distanza fra R_n e $\vartheta^{-1}(Q_n)$ tende a zero, quando ι tende a zero, perchè allora è infinitesima quella fra $t(R_n)$ e $t(\vartheta^{-1}(Q_n))$. E si comprende che l'analogia dei ragionamenti attuali, con quelli svolti nel caso precedente, si può spingere fino alla conclusione, considerando di nuovo le spezzate c_n e c_n^*, ma considerando la spezzata $\vartheta^{-1}(c_n^*)$ al posto della spezzata $\vartheta(c_n^*)$ ed il segmento $R_n\vartheta^{-1}(Q_n)$ al posto del segmento $R_n\vartheta(Q_n)$. E la dimostrazione del teorema è finita.