

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CLAUDIO MARGAGLIO

**Una caratterizzazione di certi fasci algebrici coerenti ed
una ulteriore applicazione della proprietà di estensione**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 34 (1964), p. 369-377

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__369_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UNA CARATTERIZZAZIONE
DI CERTI FASCI ALGEBRICI COERENTI
ED UNA ULTERIORE APPLICAZIONE
DELLA PROPRIETÀ DI ESTENSIONE

*Nota *) di CLAUDIO MARGAGLIO (a Padova) **)*

SOMMARIO.

Sia K un corpo commutativo algebricamente chiuso, sia V una varietà algebrica su K e sia \mathcal{A} il fascio degli anelli locali di V .

(nn. 1,2). È noto ([1]) che se V è irriducibile e soddisfa alla $P.E.$ (si legga « proprietà di estensione ») allora ogniqualvolta vi è una sequenza esatta (di fasci ed omomorfismi algebrici) ¹⁾ del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{A}^q \quad (p, q \text{ interi positivi}),$$

il fascio \mathcal{M} soddisfa alla $P.E.$ Ci si può chiedere se viceversa ogni fascio su V , algebrico coerente e liscio (cioè privo di torsione) che inoltre soddisfi alla $P.E.$ sia localmente isomorfo al nucleo di un omomorfismo algebrico del tipo $\mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{A}^q$. La risposta è, per varietà localmente normali, affermativa e ciò segue dal fatto che ivi i fasci del tipo sopra detto risultano riflessivi (cioè canonicamente isomorfi al loro biduale).

Considerando in particolare una varietà affine si ha allora anche che i fasci algebrici coerenti e lisci soddisfacenti alla $P.E.$, definiti su una varietà affine del tipo di cui sopra sono caratteriz-

*) Pervenuta in Redazione il 21 gennaio 1964.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

***) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

¹⁾ Gli omomorfismi qui considerati sono tutti algebrici, anche quando ciò non è detto esplicitamente.

zati sia dal fatto di essere riflessivi che dal fatto di essere isomorfi al nucleo di un omomorfismo algebrico del tipo $\mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{A}^q$ giacchè in generale, se R è un dominio d'integrità noetheriano e se M è un R -modulo di tipo finito e privo di torsione, sono equivalenti le tre proprietà:

- a) « M è riflessivo »;
- b) « M è (isomorfo ad) un duale »;
- c) « M è (isomorfo ad) un nucleo d'omomorfismo R -lineare $R^p \longrightarrow R^q$ ».

(nn. 3,4). Sia V una varietà affine, irriducibile, avente anello delle coordinate a fattorizzazione unica. Risulta allora che ogni qualvolta si ha una sequenza esatta del tipo: $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}^n \longrightarrow \mathcal{A}$, (n intero positivo), se $n \leq 3$ il fascio \mathcal{M} risulta isomorfo al suo duale mentre per ogni intero $n > 3$ si trovano esempi in cui \mathcal{M} non è isomorfo al suo duale.

§ 1.

PROPOSIZIONE 1.: « Ogni fascio \mathcal{F} algebrico coerente e liscio su una varietà algebrica V irriducibile, soddisfacente alla P.E. e localmente normale, è canonicamente isomorfo al suo fascio biduale se e soltanto se \mathcal{F} soddisfa alla P.E. ».

Dimostrazione.

Si indichi con \mathcal{F}^* il duale $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ del fascio \mathcal{F} .

Anzitutto si osservi che se \mathcal{L} è fascio localmente libero sulla varietà algebrica U (qualunque) l'omomorfismo canonico $\omega: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}^{**}$ definito associando ad ogni germe $f_x \in \mathcal{L}_x$ l'omomorfismo $\varphi_x: \mathcal{L}_x^* \longrightarrow \mathcal{A}_x$ che porta $f_x^* \in \mathcal{L}_x^*$ in $f_x^*(f_x)$, è un isomorfismo. Ciò si può verificare sia osservando che se \mathcal{L} è definito da una certo \mathcal{U} -cociclo φ , (\mathcal{U} essendo un ricoprimento aperto di U), allora \mathcal{L}^* è definito dal controgrediente φ^{-1} di φ e quindi \mathcal{L}^{**} è definito nuovamente da φ , sia osservando che l'omomorfismo canonico $\omega: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}^{**}$ ha restrizione biettiva $\omega_x: \mathcal{A}_x \longrightarrow \mathcal{A}_x^{**}$ alle fibre.

Sia ora \mathcal{M} un fascio algebrico coerente e liscio soddisfacente alla P.E. definito su V . Sia $X(\mathcal{M}) = W$ (cfr. [1]) il chiuso di V costituito con i punti $(x) \in V$ tali che la fibra \mathcal{M}_x non sia \mathcal{A}_x -modulo

libero e sia $U = cW$. È noto (cfr. [1], tenendo conto che la questione è locale) che $Cdm(W) > 1$. Per quanto precede si ha allora che l'omomorfismo canonico $\omega: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{**}$ ha restrizione biiettiva ad U e pertanto è un isomorfismo, tenuto conto che i fasci $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}^{**}), \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}^{**}, \mathcal{M}), \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}^{**}, \mathcal{M}^{**}), \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ sono lisci e soddisfano alla P.E. (cfr. [1], [5] tenendo conto che la questione è locale).

OSSERVAZIONE: Sia \mathcal{F} un fascio algebrico coerente e liscio su V . Poichè $Cdm(X(\mathcal{F})) > 1$ l'omomorfismo canonico: $\omega: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{**}$ fornisce una iniezione di \mathcal{F} nel fascio \mathcal{F}^{**} algebrico coerente e liscio, soddisfacente alla P.E. tale che $\omega(\mathcal{F})$ sia sottofascio ammissibile di \mathcal{F}^{**} (cioè tale che $Cdm(Supp(\mathcal{F}^{**}/\omega(\mathcal{F}))) > 1$). Se ne può trarre un'altra prova dell'esistenza, per ogni fascio \mathcal{F} come sopra, del fascio $\overline{\mathcal{F}}$ (determinato a meno di isomorfismi) soprafascio ammissibile di \mathcal{F} ed algebrico coerente liscio e soddisfacente alla P.E. (Cfr. [5]).

COROLLARIO 1.1.: « Per ogni coppia \mathcal{M}, \mathcal{N} di fasci algebrici coerenti e lisci su V si ha ¹⁾ $\mathcal{M}^* \approx \mathcal{N}^*$ se e solo se $\overline{\mathcal{M}} \approx \overline{\mathcal{N}}$; in particolare, se \mathcal{F}, \mathcal{G} sono fasci algebrici coerenti su V , se U è un aperto ammissibile di V e se $\mathcal{F} \mid U \approx \mathcal{G} \mid U$ allora $\mathcal{F}^* \approx \mathcal{G}^*$ ».

COROLLARIO 1.2.: « Ogni fascio algebrico \mathcal{M} , coerente liscio e soddisfacente alla P.E. definito su V , è localmente isomorfo al nucleo di un omomorfismo algebrico $\mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{A}^q$ ».

COROLLARIO 1.3.: « Se \mathcal{F} è fascio algebrico coerente e liscio, soddisfacente alla P.E., definito su V ed è irriducibile per somma diretta, allora anche ogni suo sottofascio ammissibile \mathcal{G} è irriducibile per somma diretta ».

Dimostrazione dei corollari della proposizione 1.

1.1. Poichè per ogni fascio algebrico coerente e liscio \mathcal{F} su V il fascio \mathcal{F}^* è riflessivo (cfr. [1], Teor. 5) e poichè $\mathcal{F}^{**} \approx \overline{\mathcal{F}}$ segue che $\overline{\mathcal{M}} \approx \overline{\mathcal{N}}$ equivale a $\mathcal{M}^{**} \approx \mathcal{N}^{**}$ e che $\mathcal{M}^{**} \approx \mathcal{N}^{**}$ equivale a $\mathcal{M}^* \approx \mathcal{N}^*$; se \mathcal{F}, \mathcal{G} sono fasci algebrici coerenti si ha, posto $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}/(t\mathcal{F})$, (essendo $t\mathcal{F}$ il sottofascio di torsione di \mathcal{F}), $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}/(t\mathcal{G})$: $\mathcal{F} \mid U \approx \mathcal{G} \mid U$ implica $\mathcal{F}_1 \mid U \approx \mathcal{G}_1 \mid U$ e di seguito $\overline{\mathcal{F}_1} \approx \overline{\mathcal{G}_1}$, $\mathcal{F}_1^{**} \approx \mathcal{G}_1^{**}$, $\mathcal{F}^* \approx \mathcal{G}^*$ (giacchè $\mathcal{F}_1^* \approx \mathcal{F}^*$).

¹⁾ Gli isomorfismi verranno indicati con \approx oppure con \leftrightarrow .

1.2. È noto che se $\mathcal{M} = \mathcal{F}^*$ allora \mathcal{M} è localmente isomorfo al nucleo di un omomorfismo $\mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{A}^q$ (che si può dedurre dalla sequenza duale di una sequenza esatta del tipo: $\mathcal{A}^q \longrightarrow \mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$) e d'altra parte, se $\mathcal{M} \approx \mathcal{M}^{**}$, basta porre $\mathcal{F} = \mathcal{M}^*$.

1.3. Se $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$ allora $\mathcal{G}^{**} = \mathcal{G}_1^{**} \oplus \mathcal{G}_2^{**}$ e pertanto $\mathcal{F} \approx \overline{\mathcal{F}} \approx \overline{\mathcal{G}} \approx \overline{\mathcal{G}_1} \oplus \overline{\mathcal{G}_2}$.

§ 2.

LEMMA: « Sia R un dominio d'integrità noetheriano e sia M un R -modulo di tipo finito. Sono allora equivalenti fra loro le seguenti condizioni:

- a) M è riflessivo (cioè l'omomorfismo canonico $\omega : M \longrightarrow M^{**}$ è un isomorfismo);
- b) $M \approx N^*$ (cioè M è isomorfo al duale di qualche R -modulo N di tipo finito);
- c) Esiste una sequenza esatta del tipo $0 \longrightarrow M \longrightarrow R^p \xrightarrow{\varphi} R^q$.

Dimostrazione.

È immediato che a) implichi b) e che b) implichi c). Proviamo che c) implica a). Si ponga $H = \text{Im}(\varphi)$ e si consideri la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow R^p \xrightarrow{\varphi} H \longrightarrow 0$$

(avendo indicato con φ anche l'omomorfismo $R^p \longrightarrow H$ indotto da $R^p \longrightarrow R^q$).

Dualizzando si ottengono le due sequenze esatte:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^* \longrightarrow R^p \longrightarrow N \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow N \longrightarrow M^* \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{R}}^1(H, R) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

tenuto conto che $\text{Ext}_{\mathbb{R}}^1(R^p, R) = 0$, e dualizzando ancora si ottengono le sequenze esatte:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow N^* \longrightarrow R^p \longrightarrow H^{**} \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{R}}^1(N, R) \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow (\text{Ext}_{\mathbb{R}}^1(H, R))^* \longrightarrow M^{**} \longrightarrow N^*. \end{aligned}$$

Si osservi ora (cfr. [2] § 7, n. 10) che il modulo $(\text{Ext}_{\mathbb{R}}^1(H, R))^*$ è nullo poichè ha rango zero in quanto duale di un modulo di tipo finito di rango zero ed è privo di torsione in quanto duale.

Si ottiene quindi la sequenza d'ordine 2 ed esatta in M^{**} :
 $0 \longrightarrow M^{**} \longrightarrow R^p \longrightarrow H^{**}$ che per di più soddisfa al seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & R^p & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \omega & & \updownarrow & & \downarrow \omega' & & \\
 0 & \longrightarrow & M^{**} & \longrightarrow & R^p & \longrightarrow & H^{**} & &
 \end{array}$$

ove ω , ω' sono omomorfismi canonici iniettivi (cfr. [4]).

Dal diagramma segue che ω è anche suriettivo e quindi un isomorfismo.

PROPOSIZIONE 2.: « Sia V una varietà affine, irriducibile, soddisfacente alla P.E. e localmente normale e sia \mathcal{F} un fascio algebrico coerente e liscio su V . Sono allora equivalenti le seguenti condizioni:

- \mathcal{F} è riflessivo, cioè l'omomorfismo canonico $\omega: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{**}$ è un isomorfismo;
- esiste un fascio algebrico coerente \mathcal{G} tale che $\mathcal{F} \approx \mathcal{G}^*$;
- esiste una sequenza esatta $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{A}^q$;
- \mathcal{F} soddisfa alla P.E.

Ciò segue immediatamente tenuto conto del precedente lemma e della proposizione 1.

§ 3.

OSSERVAZIONE: « Sia R un anello commutativo con unità e sia $\varphi: R^p \longrightarrow R^q$ un R -omomorfismo definito con una certa matrice (con q righe e p colonne) $M = \|m_{ij}\|$. Se $\bar{\varphi}$ è l'omomorfismo definito dalla matrice trasposta di M si ha allora $(\text{Cnc}(\varphi))^* \approx \text{Nc}(\bar{\varphi})$ ».

Infatti, basta tenere conto che dalla sequenza esatta $R^p \longrightarrow R^q \longrightarrow F \longrightarrow 0$ si ottiene, dualizzando, la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow \text{Hom}_R(R^q, R) \longrightarrow \text{Hom}_R(R^p, R)$$

e si ha pure, indicati con ξ_1 , ξ_2 gli usuali isomorfismi con cui si identificano gli R -moduli liberi di tipo finito con il loro duale,

il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & F^* & \longrightarrow & \text{Hom}_R(R^q, R) & \xrightarrow{\text{Hom}_R(\varphi, R)} & \text{Hom}_R(R^p, R) \\
 & & \downarrow \xi_1 & & & & \downarrow \xi_2 \\
 & & R^q & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & R^p & &
 \end{array}$$

PROPOSIZIONE 3.: « Sia V una varietà algebrica affine irriducibile avente anello delle coordinate a fattorizzazione unica e si abbia su V la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{A}^3 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}.$$

Allora \mathcal{F} è isomorfo al suo duale ».

Dimostrazione.

Sia

$$\varphi(a_1, a_2, a_3) = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3, \quad P_i \in \Gamma(V, \mathcal{A}), \quad i = 1, 2, 3.$$

Non è restrittivo supporre che P_1, P_2, P_3 siano primi fra loro. Infatti (escluso il caso banale $P_1 = P_2 = P_3 = 0$) se $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ sono primi fra loro e $P_i = Q \cdot \bar{P}_i$, $i = 1, 2, 3$, $P_i, Q \in \Gamma(V, \mathcal{A})$, l'omomorfismo $\varphi' : \mathcal{A}^3 \rightarrow \mathcal{A}$ definito con $\varphi'(a_1, a_2, a_3) = \sum_1^3 P_i a_i$ ha lo stesso nucleo di φ . Si consideri allora (supposti P_1, P_2, P_3 primi fra loro) la zero-sequenza (in generale non esatta):

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\psi} \mathcal{A}^3 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{A}^3 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}$$

con $\psi(1) = (P_1, P_2, P_3)$ ed α definito dalla matrice:

$$\left\| \begin{array}{ccc}
 0 & P_3 & -P_2 \\
 -P_3 & 0 & P_1 \\
 P_2 & -P_1 & 0
 \end{array} \right\|.$$

Si osservi che poichè P_1, P_2, P_3 sono relativamente primi e $\mathcal{N}c(\alpha)$ è fascio localmente libero (cfr. [1]) su una varietà con anello delle coordinate a fattorizzazione unica, si ha che $\mathcal{S}m(\psi) = \mathcal{N}c(\alpha)$ e si osservi anche che il sottofascio $\mathcal{S}m(\alpha)$ di \mathcal{A}^3 è ge-

nerato dalle tre sezioni globali s_1, s_2, s_3 ottenute con le tre righe della matrice sopra scritta.

Sia W il chiuso formato con i punti $(x) \in V$ per i quali tutti e tre i germi $P_{ix}, (i = 1, 2, 3)$, appartengono all'ideale massimale di \mathcal{A}_x . Proviamo che, posto $U = cW$, risulta: $(\mathcal{E}nc(\psi))|U \approx (\mathcal{N}c(\varphi))|U$.

Si ha infatti: se ad esempio P_{1x} ammette inverso in \mathcal{A}_x , segue che se $(a_1, a_2, a_3)_x \in \mathcal{N}c(\varphi)$ allora $a_{1x} = -(P_2/P_1)_x a_{2x} - (P_3/P_1)_x a_{3x}$ e quindi posto $f_1 = 1, f_2 = (P_{2x} + a_{3x})P_{1x}, f_3 = (P_{3x} - a_{2x})/P_{1x}$ si ottiene:

$$(a_1, a_2, a_3)_x = {}_1^3 \sum_i f_i s_{ix}, (x \in V), \quad \text{cioè} \quad (a_1, a_2, a_3)_x \in \mathcal{I}m(\alpha).$$

Poichè $Cdm(W) > 1$, da $\mathcal{E}nc(\psi) | U \approx \mathcal{N}c(\varphi) | U$ segue (corollario 1.1) che $(\mathcal{E}nc(\psi))^* \approx (\mathcal{N}c(\varphi))^*$ e in base alla precedente osservazione (applicata all'omomorfismo $\mathcal{A}^3 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}$) $\mathcal{N}c(\varphi) \approx (\mathcal{N}c(\varphi))^*$.

OSSERVAZIONE: È banale che, data la sequenza esatta $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}^2 \longrightarrow \mathcal{A}$ risulta $\mathcal{M} \approx \mathcal{M}^*$ giacchè in questo caso \mathcal{M} è localmente libero e per le ipotesi fatte su V , libero.

§ 4.

ESEMPIO di sequenza esatta del tipo: $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}^4 \longrightarrow \mathcal{A}$ su V (come sopra) per la quale \mathcal{M} risulta non isomorfo ad \mathcal{M}^* .

Sia: $\mathcal{A}^4 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}$ l'omomorfismo (su $V = K^4$) definito con: $\varphi(a_1, a_2, a_3, a_4) = {}_1^4 \sum_i X_i a_i$ ($K[X_1, X_2, X_3, X_4]$ essendo l'anello dei polinomi a quattro variabili su K) e sia $\mathcal{F} = \mathcal{N}c(\varphi)$.

Indicato con (o) il punto origine di K^4 , si osservi che l' \mathcal{A}_o -modulo $I = \varphi_o(\mathcal{A}_o^4) = Im(\varphi_o)$ ha dimensione coomologica 3 (cfr. [3]) e quindi che la fibra \mathcal{F}_o non è generabile con meno di 5 elementi poichè (tenuto conto che $rg(\mathcal{F}) = 3$) se \mathcal{F}_o fosse generato da tre elementi sarebbe \mathcal{A}_o -modulo libero e se fosse generato da quattro elementi si potrebbe costruire una sequenza esatta: $0 \longrightarrow \mathcal{A}_o \longrightarrow \mathcal{A}_o^4 \longrightarrow \mathcal{F}_o \longrightarrow 0$ (ed I avrebbe dimensione coomologica < 3). A maggior ragione il fascio \mathcal{F} non è generabile con meno di 5 sezioni globali.

Per dimostrare che \mathcal{F} non è isomorfo al suo duale basta allora verificare che quest'ultimo è generato da quattro sezioni globali.

Si ha infatti:

definito l'omomorfismo $\mathcal{A} \xrightarrow{\psi} \mathcal{A}^4$ con $\psi(1) = (X_1, X_2, X_3, X_4)$, in base alla precedente osservazione del § 3 risulta, posto $\mathcal{G} = \mathcal{E}nc(\psi)$, che $\mathcal{G}^* \approx \mathcal{F}$ e quindi, per concludere che $\mathcal{F}^* \approx \mathcal{G}$ (e che perciò \mathcal{F}^* è generato da 4 sezioni), basta verificare che $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{G}}$ ($\in P.E.$).

Ciò si può fare direttamente tenendo conto che $X(\mathcal{G}) = (o, o, o, o)$ (cioè tenendo conto che fuori dell'origine di K_4 il fascio \mathcal{G} è localmente libero) oppure osservando che si può costruire una sequenza esatta su K^4 :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\psi} \mathcal{A}^4 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{A}^6 \xrightarrow{\beta} \mathcal{A}^4 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}$$

in cui gli omomorfismi φ, ψ sono quelli sopra definiti, l'omomorfismo β è definito con la matrice:

$$B = \| b_{i,k} \| = \left\| \begin{array}{cccccc} X_2 & X_3 & X_4 & 0 & 0 & 0 \\ -X_1 & 0 & 0 & X_3 & -X_4 & 0 \\ 0 & -X_1 & 0 & -X_2 & 0 & X_4 \\ 0 & 0 & -X_1 & 0 & X_2 & -X_3 \end{array} \right\|$$

ed α con la matrice $C = \| b_{s-k,i} \|$.

Ne segue senz'altro $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{G}}$ poichè $\mathcal{E}nc(\psi) = \mathcal{I}m(\alpha) = \mathcal{N}n(\beta) \in P.E.$

OSSERVAZIONE: Visto il precedente esempio, si può considerare la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{A}^s \longrightarrow \mathcal{A}^{4+s} \longrightarrow \mathcal{A} \quad (\text{con } s \text{ intero qualunque } > 0)$$

dal che seguono analoghi esempi per il caso delle sequenze del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}^n \longrightarrow \mathcal{A} \quad \text{con } n > 4.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] BALDASSARRI M.: *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci*. Atti del convegno internazionale di geometria algebrica tenuto a Torino nel maggio 1961.
- [2] BOURBAKI N.: *Algèbre*. Ch. II (II ed.), Hermann, Paris.
- [3] GRÖBNER W.: *Moderne algebraische Geometrie*. Springer-Verlag.
- [4] JANS J. P.: *Duality in Noetherian rings*. Proceedings of the Amer. Math. Soc. Vol. 12, n. 5, (X-1961).
- [5] MARGAGLIO C.: *Una dimostrazione elementare della proprietà di estensione per il fascio degli anelli locali di uno spazio affine ed alcune applicazioni di tale proprietà*. Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova. Vol. XXXIII, (1963).
- 6] SERRE J. P.: *Faisceaux algébriques cohérents*. Ann. of Math., 61 pp. 197-278.