Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Francesco Maisano

Sull'integrale generale di un sistema lineare del primo ordine ai differenziali totali a coefficienti costanti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 401-410

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__401_0>

SULL'INTEGRALE GENERALE DI UN SISTEMA LINEARE DEL PRIMO ORDINE AI DIFFERENZIALI TOTALI A COEFFICIENTI COSTANTI

Nota *) *di* FRANCESCO MAISANO (*a Palermo*) **)

1. - Riportiamo in questo numero i risultati dovuti a G. Trevisan relativi alla esplicitazione dell'integrale generale di un sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti e alla applicazione di tale espressione esplicita allo studio di un sistema lineare ai differenziali totali [1]).

A tali risultati si riallacciano le considerazioni che seguono e che consentono di precisare la forma dell'integrale generale di un sistema lineare ai differenziali totali di due variabili a coefficienti costanti

$$dY = (Adu + Bdv)Y ,$$

nell'ipotesi che gli autovalori associati alle matrici A e B abbiano tutti indice pari alla loro molteplicità.

Si consideri il sistema di equazioni differenziali ordinario

---

*) Pervenuta in redazione il 5 marzo 1964.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Palermo.
**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

[1]) G. TREVISAN: *Un'espressione esplicita per l'integrale di un sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti. Applicazioni.* Rend. del Seminario Matem. dell'Università di Padova. 1961 Vol. XXXI.

omogeneo ad n incognite, a coefficienti costanti

$$(1) \qquad Y' = AY\,.$$

Il vettore Y sarà ovviamente ad n componenti che si supporranno funzioni derivabili della variabile u.

Supponiamo che l'equazione caratteristica della matrice quadrata di tipo (n, n) A

$$|\,\lambda I - A\,| = 0 \text{ [2]}$$

ammetta come radici (distinte) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ con molteplicità rispettivamente $r_1, r_2, \ldots, r_t$ e quindi con $r_1 + r_2 + \ldots + r_t = n$.

Allora l'integrale generale del sistema (1) è

$$(2) \qquad Y = \sum_{i=1}^{t}\left[I + \sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{(-1)^s}{s\,!}\,u^s(\alpha_i I - A)^s\right]P_i e^{\alpha_i u}$$

dove P_i è la soluzione generale del sistema algebrico lineare

$$(3) \qquad (\alpha_i I - A)^{r_i} P_i = 0\;,$$

esprimibile, ove si tenga conto della circostanza che la matrice

$$(\alpha_i I - A)^{r_i}\;,$$

ha rango $(n - r_i)$, mediante combinazione lineare a parametri arbitrari di r_i soluzioni particolari indipendenti del sistema (3) stesso.

Il risultato espresso dalla (2) consente una immediata applicazione allo studio del sistema lineare ai differenziali totali

$$(4) \qquad dY = (A\,du + B\,dv)Y\;,$$

dove A e B sono matrici di tipo (n, n) a elementi costanti dati nel campo complesso e Y il vettore $\|\, y_i(u, v)\,\|$ ad n componenti.

Il sistema (4) è equivalente al sistema alle derivate parziali:

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\,Y = AY\;,$$

---

[2]) I rappresenta ora ed avanti una matrice unitaria di rango opportuno.

$$(5') \qquad \frac{\partial}{\partial v} Y = BY ,$$

e la condizione necessaria e sufficiente di completa integrabilità di tale sistema è data dalla permutabilità delle due matrici A e B (i prodotti essendo effettuati righe per colonne).

La soluzione del sistema (5) sarà data dalla (2) sotto la condizione (3) e dove si pensino i parametri da cui dipendono le P_i funzioni di v che dovranno determinarsi in modo che le (2) soddisfino anche al sistema (5').

È intanto ovvio che condizione necessaria e sufficiente perchè la (2), intesa nel senso sopra precisato, sia soluzione del sistema (5'), è che soluzione della (5') sia il generico addendo

$$(6) \qquad \left[I + \sum_{s=1}^{r_i-1} \frac{(-1)^s}{s\,!} u^s(\alpha_i I - A)^s\right] P_i e^{\alpha_i u} .$$

Ora perchè ciò accada occorre e basta scegliere

$$P_i = \varrho_1 S_{1/i} + \varrho_2 S_{2/i} + \dots + \varrho_{r_i} S_{r_i/i} ,$$

dove $S_{1/i}$, $S_{2/i}$, ..., $S_{r_i/i}$ sono r_i soluzioni particolari ed indipendenti del sistema algebrico (3) e ϱ_1, ϱ_2, ..., ϱ_{r_i} (funzioni di v) è l'integrale generale del sistema differenziale lineare a coefficienti costanti

$$(7) \qquad \varrho_j' = \varrho_1 h_{j,1} + \varrho_2 h_{j,2} + \dots + \varrho_{r_i} h_{j,r_i} \qquad (j = 1, 2, \dots, r_i)$$

i cui coefficienti $h_{j,s}$ $(s = 1, 2, \dots, r_i)$ sono univocamente determinati quali soluzioni del sistema di nr_i equazioni

$$BS_{j/i} = h_{1,j} S_{1/i} + h_{2,j} S_{2/i} + \dots + h_{r_i,j} S_{r_i/i} \qquad (j = 1, 2, \dots, r_i)$$

delle quali solo r_i^2 sono indipendenti.

Per la determinazione dell'integrale generale del sistema (5) e (5') bisognerà ovviamente trattare più sistemi del tipo (7), uno per ogni radice distinta dell'equazione caratteristica della matrice A.

2. - Con rispondenza alle nomenclature usate al n. 1, si ponga:

$$S_{1/i} = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{1n} \end{pmatrix}, \quad S_{2,i} = \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{2n} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad S_{r_i/i} = \begin{pmatrix} s_{r_i1} \\ s_{r_i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{r_in} \end{pmatrix}$$

ed

$$S_i = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & \dots & s_{r_i1} \\ s_{12} & s_{22} & \dots & s_{r_i2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{r_in} \end{pmatrix}$$

si denoti poi con H_{α_i} la matrice di tipo (r_i, r_i) dei coefficienti del sistema (7), matrice che diremo associata allo zero α_i dell'equazione caratteristica della matrice A o semplicemente matrice associata allo zero α_i.

Siano poi $\gamma_{1/i}, \gamma_{2/i}, \dots, \gamma_{\tau_i/i}$ gli zeri distinti dell'equazione caratteristica di H_{α_i}

$$| \lambda I - H_{\alpha_i} | = 0 ,$$

e abbiano rispettivamente molteplicità $\varrho_{1/i}, \varrho_{2/i}, \dots, \varrho_{\tau_i/i}$ e quindi con

$$\varrho_{1/i} + \varrho_{2/i} + \dots + \varrho_{\tau_i/i} = r_i . \tag{8}$$

L'integrale generale del sistema (7) sarà allora, in conformità alla (2)

$$\sum_{j=1}^{\tau_i} \left[I + \sum_{\sigma=1}^{e_{j/i}-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} v^\sigma (\gamma_{j/i} I - H_{\alpha_i})^\sigma \right] Q_{j/i} e^{\gamma_{j/i} v}$$

dove $Q_{j/i}$ è la soluzione generale del sistema algebrico

$$(\gamma_{j/i} I - H_{\alpha_i})^{e_{j/i}} Q_{j/i} = 0$$

e quindi risulterà:

$$P_i = S_i \sum_{j=1}^{\tau_i} \left[I + \sum_{\sigma=1}^{\varrho_{j/i}-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} v^\sigma (\gamma_{j/i} I - H_{\alpha_i})^\sigma \right] Q_{j/i} e^{\gamma_{j/i} v} .$$

Sostituendo tale espressione nella (6) si ottiene per il sistema (5) e (5′) la soluzione:

$$\left[I + \sum_{j=1}^{r_i-1} \frac{(-1)^s}{s\,!} u^s(\alpha_i I - A)^s\right] \cdot$$

$$\cdot\; S_i \sum_{j=1}^{\tau i} \left[I + \sum_{\sigma=1}^{\varrho_{j/i}-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma\,!} v^\sigma(\gamma_{j/i} I - H_{\alpha_i})^\sigma\right] Q_{j/i} e^{\gamma_{j/i} v} e^{\alpha_i u} \,.$$

L'integrale generale del sistema (5) e (5′) è dunque:

$$Y = \sum_{i=1}^{t} \left[I + \sum_{s=1}^{r_i-1} \frac{(-1)^s}{s\,!} u^s(\alpha_i I - A)^s\right] \cdot \tag{9}$$

$$\cdot\; S_i \sum_{j=1}^{\tau_i} \left[I + \sum_{\sigma=1}^{\varrho_{j/i}-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma\,!} v^\sigma(\gamma_{j/i} I - H_{\alpha_i})^\sigma\right] Q_{j/i} e^{\gamma_{j/i}} e^{\alpha_i u} \,.$$

Ma l'integrale del sistema (5) e (5′) può ottenersi scambiando il ruolo delle matrici A e B con procedimento analogo a quello ora seguito.

Si denotino con $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\bar{t}}$ gli zeri distinti dell'equazione caratteristica:

$$|\,\lambda I - B\,| = 0 \,,$$

della matrice B e siano $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_{\bar{t}}$ le relative molteplicità e quindi con $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \ldots + \bar{r}_{\bar{t}} = n$.

Fissata la radice β_k si denoti con $\bar{S}_k$ la matrice di tipo $(n, \bar{r}_k)$ le cui colonne rappresentino $\bar{r}_k$ soluzioni indipendenti del sistema lineare

$$(\beta_k I - B)^{\bar{r}_k} \bar{P}_k = 0 \,.$$

Siano poi $\bar{\gamma}_{1/k}, \bar{\gamma}_{2/k}, \ldots \bar{\gamma}_{\bar{\tau}_k/k}$ gli zeri distinti dell'equazione caratteristica

$$|\,\lambda I - \overline{H}_{\beta_k}\,| = 0 \,,$$

della matrice $\overline{H}_{\beta_k}$ associata allo zero $\overline{\beta}_k$ e $\bar{\varrho}_{1/k}, \bar{\varrho}_{2/k}, \ldots \bar{\varrho}_{\bar{\tau}_k\,k}$ le relative molteplicità e quindi con:

$$\bar{\varrho}_{1/k} + \bar{\varrho}_{2/k} + \ldots + \bar{\varrho}_{\bar{\tau}_k/k} = \bar{r}_k \,. \tag{10}$$

L'integrale generale del sistema (5) e (5') può allora scriversi:

$$(11) \qquad Y = \sum_{h=1}^{\bar{t}} \left[I + \sum^{\bar{r}_h - 1} \frac{(-1)^k}{k!} v^k (\beta_h I - B)^k \right] \cdot$$

$$\cdot \bar{S}_h \sum_{\mu=1}^{\bar{\tau}_h} \left[I + \sum^{\bar{\varrho}_{\mu/h} - 1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} u^\nu (\bar{\gamma}_{u/h} I - \bar{H}_{\beta_h})^\nu \right] \bar{Q}_{\mu/h} e^{\gamma_{\mu/h} u} e^{\beta_h v}$$

essendo $\bar{Q}_{\mu/h}$ la soluzione più generale del sistema algebrico:

$$\left(\bar{\gamma}_{\mu/h} I - \bar{H}_{\beta_h}\right)^{\bar{\varrho}_{\mu/h}} \bar{Q}_{\mu/h} = 0 \; .$$

Si fissi ora, a partire dalla (9), un integrale particolare del sistema (5) e (5'): ciò si otterrà in corrispondenza ad una particolare scelta dei parametri che intervengono nelle $Q_{j/i}$; è chiaro che, con una opportuna scelta dei valori dei parametri che intervengono nelle $\bar{Q}_{\mu/h}$, la (11) si riduce alla fissata soluzione.

Denotando ancora con la (9) e con la (11) le due determinazioni degli integrali particolari così ottenuti, dal diretto loro confronto si deduce che ciascuna delle $\gamma_{j/i}$ coincide con una β e ciascuna delle $\bar{\gamma}_{\mu/h}$ con una α ma « a priori » non è detto che $i \neq i'$ implici $\gamma_{j/i} \neq \gamma_{j'/i'}$, come non è detto che $h \neq h'$ implichi $\bar{\gamma}_{\mu/h} \neq \bar{\gamma}_{\mu'/h'}$.

Si consideri ora un generico α_i e un generico $\gamma_{j/i} = \beta_{h'}$ e poi l'unico addendo della (9)

$$(12) \qquad \left[I + \sum_{s=1}^{r_i - 1} \frac{(-1)^s}{s!} u^s (\alpha_i I - A)^s \right] \cdot$$

$$\cdot\, S_i \left[I + \sum_{\sigma=1}^{\varrho_{j/i} - 1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} v^\sigma (\gamma_{j/i} I - H_{\alpha_i})^\sigma \right] Q_{j/i} e^{\alpha_i u} e^{\gamma_{j/i} v} \; .$$

Esiste nella (11) un solo addendo e sia

$$\left[I + \sum_{K=1}^{\bar{r}_{h'} - 1} \frac{(-1)^K}{k!} v^K (\beta_{h'} I - B)^K \right] \cdot$$

$$\cdot\, \bar{S}_{h'} \left[I + \sum_{\gamma=1}^{\bar{\varrho}_{\mu h'} - 1} \frac{(-1)^\gamma}{\gamma!} u^\gamma (\bar{\gamma}_{\mu/h'} I - \bar{H}_{\beta_h})^\gamma \right] \bar{Q}_{\mu/h'} e^{\bar{\gamma}_{\mu/h'} u} e^{\beta_{h'} v}$$

(con $\bar{\gamma}_{\mu/h'} = \alpha_i$) identicamente eguale alla (12).

Ricordando ora l'ipotesi circa l'indice degli autovalori α e β sarà, qualunque sia α_i e $\beta_{h'}$

$$(\alpha_i I - A)^{r_i-1}\bar{S}_i \neq 0 \qquad (\alpha_h I - B)^{\bar{r}_{h'}-1}\bar{S}_{h'} \neq 0$$

e l'ultima identità implica:

$$r_i - 1 \leqslant \bar{\varrho}_{\mu/h'} - 1 \qquad \bar{r}_{h'} - 1 \leqslant \varrho_{j/i} - 1$$

$$\varrho_{j/i} \leqslant r_i \qquad \bar{\varrho}_{\mu/h'} = \bar{r}_{h'}$$

e quindi

$$r_i \leqslant \bar{\varrho}_{\mu/h'} \leqslant \bar{r}_{h'} \leqslant \varrho_{j/i} \leqslant r_i \ ,$$

cioè

$$r_i = \bar{\varrho}_{\mu/h'} = \varrho_{j/i} = \bar{r}_{h'} \ .$$

Si trova intanto il risultato: ad ogni zero α_i di molteplicità r_i dell'equazione $|\lambda I - A| = 0$ corrisponde un ben determinato zero $\beta_{h'}$ della $|\lambda I - B| = 0$ di eguale molteplicità.

Inoltre, ove si tenga conto delle (8) e (10), l'equazione caratteristica della matrice $H_{\alpha i}$ associata allo zero α_i ha un solo zero distinto e quindi di molteplicità r_i eguale allo zero $\beta_{h'}$ della $|\lambda I - B| = 0$ corrispondente alla α_i nel senso prima precisato.

Viceversa, l'equazione caratteristica della matrice $\bar{H}_{\beta h'}$ associata allo zero $\beta_{h'}$ ha un solo zero distinto e quindi di molteplicità r_i eguale alla α_i corrispondente alla $\beta_{h'}$.

Riassumendo: le due equazioni

$$|\lambda I - A| = 0 \qquad |\lambda I - B| = 0$$

hanno lo stesso numero di zeri distinti e gli zeri dell'una possono mettersi in una ed una sola maniera in corrispondenza biunivoca con gli zeri dell'altra in modo tale che coppie di zeri corrispondenti α, β abbiano eguale molteplicità e che le equazioni caratteristiche relative alle matrici $\bar{H}_\alpha$ e $\bar{H}_\beta$ ad essi corrispondenti abbiano l'una come unico zero β e l'altra come unico zero α.

D'ora in avanti se gli zeri di $|\lambda I - A| = 0$ sono $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ denoteremo i corrispondenti zeri (nel senso sopra precisato) della $|\lambda I - B| = 0$ rispettivamente con $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ e con $r_1, r_2, \ldots, r_t$ le relative molteplicità comuni.

In base ai risultati ora ottenuti l'integrale generale del sistema (5) e (5') può scriversi a partire dalle (9) e (11) nelle due forme:

$$
\begin{aligned}
(15) \qquad Y = \sum_{i=1}^{t} \left[I + \sum_{s=1}^{r_i-1} \frac{(-1)^s}{s!} u^s (\alpha_i I - A)^s \right] \cdot \\
\cdot S_i \left[I + \sum_{\sigma=1}^{r_i-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} v^\sigma (\beta_i I - H_{\alpha_i})^\sigma \right] Q_i e^{\alpha_i u} e^{\beta_i v}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(16) \qquad Y = \sum_{i=1}^{t} \left[I + \sum_{s=1}^{r_i-1} \frac{(-1)^s}{s!} v^s (\beta_i I - B)^s \right] \cdot \\
\cdot \overline{S}_i \left[I + \sum_{\sigma=1}^{r_i-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} u^\sigma (\alpha_i I - \overline{H}_{\beta_i})^\sigma \right] \overline{Q}_i e^{\alpha_i u} e^{\beta_i v}
\end{aligned}
$$

dove Q_i e $\overline{Q}_i$ sono vettori a r_i componenti costanti arbitrarie.

Si fissino nella (15) le matrici $\overline{Q}_i$ e quindi un'integrale particolare e si scelgano le Q_i in modo che la (16) fornisca lo stesso integrale particolare.

In corrispondenza a questa scelta risulterà:

$$S_i Q_i = \overline{S}_i \overline{Q}_i \,. \qquad (i = 1, 2, ..., t)$$

Ma il vettore $S_i Q_i$ rappresenta una generica soluzione del sistema algebrico lineare

$$(17) \qquad (\alpha_i I - A)^{r_i} P_i = 0$$

e il vettore $\overline{S}_i \overline{Q}_i$ una soluzione del sistema algebrico lineare

$$(18) \qquad (\beta_i I - B)^{r_i} \overline{P}_i = 0$$

e, potendo ragionare sulle $\overline{Q}_i$ come si è fatto sulle Q_i, concludiamo che i due sistemi algebrici (17) e (18) sono equivalenti e quindi, ricordando il significato delle matrici S_i e $\overline{S}_i$, si potrà scegliere nella (16)

$$\overline{S}_i = S_i \qquad (i = 1, 2, ..., t)$$

e in tal caso la (15) e la (16) forniranno integrali particolari eguali allora e solo quando si scelgano le Q_i eguali alle $\overline{Q}_i$.

Si deduce allora dal confronto della (15) e della (16) che

$$(\beta_i I - B)^\sigma S_i = S_i(\beta_i I - H_{\alpha_i})^\sigma$$

e quindi l'integrale generale del sistema (5) e (5') si scrive (utilizzando, per esempio, la (15))

$$Y = \sum_{i=1}^{t} \left[I + \sum_{s=1}^{r_i-1} \frac{(-1)^s}{s\,!} u^s(\alpha_i I - A)^s \right] \cdot \tag{19}$$

$$\cdot \left[I + \sum_{\sigma=1}^{r_i-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma\,!} v^\sigma(\beta_i I - B)^\sigma \right] P_i e^{\alpha_i u} e^{\beta_i v}$$

ove P_i $(i = 1, 2, ..., t)$ rappresenta la soluzione generale del sistema algebrico lineare (17) o, ciò che è lo stesso, del sistema algebrico (18) a questo equivalente.

3. - Il procedimento svolto al n. 2 che ha consentito di determinare l'integrale del sistema lineare ai differenziali totali

$$dY = (A\,du + B\,dv)Y$$

nell'ipotesi che gli autovalori di A e B siano tutti di indice $i = r$, può ovviamente essere generalizzato al caso dell'integrazione del sistema lineare ai differenziali totali del tipo

$$dY = (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + ... + A_m dx_m)Y \tag{20}$$

con $A_1, A_2, ..., A_m$ matrici di ordine n, date nel campo complesso, i cui autovalori siano di indice $i = r$, e Y il vettore $\| y_i(x_1, x_2, ..., x_m) \|$ ad n componenti.

Il sistema (20) è equivalente al sistema alle derivate parziali

$$\frac{\partial Y}{\partial x_i} = A_i Y \qquad (i = 1, 2, ..., m) \tag{21}$$

ed è noto che la condizione di completa integrabilità per tale sistema è data dalla permutabilità delle matrici $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Da quanto è stato detto nel numero precedente, le equazioni caratteristiche associate alle matrici A_i hanno eguale numero di zeri.

Inoltre se

$$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1t}$$

sono gli zeri relativi all'equazione caratteristica associata alla matrice A_1, rispettivamente di molteplicità

$$r_1, r_2, \ldots, r_t$$

gli zeri relativi all'equazione caratteristica associata alla generica matrice A_i si possono disporre nell'ordine

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{it} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

in modo che gli zeri α_{ij} abbiano molteplicità r_j e i sistemi lineari

$$(\alpha_{ij}I - A_i)^{r_j}P_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{22}$$

risultino equivalenti.

Iterando opportunamente il procedimento svolto al n. 2 si determina l'integrale generale del sistema (21) che si presenta nella forma:

$$Y = \sum_{i=1}^{t}\left[I + \sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{(-1)^s}{s\,!}\,x_1^s(\alpha_{1i}I - A_1)^s\right]\cdot$$

$$\cdot\left[I + \sum_{\sigma=1}^{r_i-1}\frac{(-1)^\sigma}{\sigma\,!}x_2^\sigma(\alpha_{2i}I - A_2)^\sigma\right]\ldots$$

$$\ldots\left[I + \sum_{\tau=1}^{r_i-1}\frac{(-1)^\tau}{\tau\,!}\,x_m^\tau\,(\alpha_{mi}I - A_m)^\tau\right]P_i e^{\alpha_{1i}x_1}e^{\alpha_{2i}x_2}\ldots e^{\alpha_{mi}x_m}\Bigg]$$

essendo P_i la soluzione generale di uno dei sistemi algebrici lineari (22).